



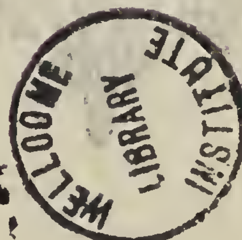
ELEMENS DE LA GEOMETRIE DE L'INFINI.

SUITE DES MEMOIRES de l'Académie Royale des Sciences.



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCXXVII.





PRÉFACE.

LES premiers Géometres n'avoient encore fait que très-peu de chemin, lorſqu'ils s'apperçurent que le Côté d'un Quarré, & ſa Diagonale étoient incommenſurables, c'eſt-à-dire, que quelque grandeur que l'on pût prendre pour être la meſure exacte de l'une de ces deux Lignes, elle ne pouvoit jamais être la meſure exacte de l'autre. Delà naiſſoient les Nombres incommenſurables, ou irrationels, qui ſe trouvoient en une quantité ſans comparaiſon plus grande que les Nombres rationels, & ordinaires; & parce qu'on voyoit bien qu'ils étoient d'une nature particuliere, mais abſolument inconnue, les Anciens les évitoient avec beaucoup d'art dans la ſolution des Problemes, & ne les y admettoient point. Cependant on les reçoit aujourd'hui ſans difficulté, & les ſolutions qu'ils fourniſſent ſont parfaitement légitimes. Ce n'eſt pas qu'on les connoiſſe mieux, mais on s'eſt familiariſé avec eux à force d'en rencontrer, ils ont vaincu par leur foule, & par leur opiniâtreté à ſe préſenter preſque par-tout.

Je crois avoir prouvé dans ce Livre, que les Nombres irrationels ne le ſont que parce que l'Infini entre néceſſairement dans leur nature, mais comme la maniere dont il y entre n'eſt nullement apparente, & qu'elle n'avoit point été apperçue, c'étoit l'Infini que l'on rencontroit dès la naiſſance de la Géométrie, ſi déguiſé, & ſi enveloppé, qu'on n'en avoit aucun ſoupçon.

Les Anciens ont vu que dans l'angle de contingence formé par la circonférence d'un Cercle, & par ſa Tangente, il ne pouvoit paſſer aucune ligne droite qui le diviſât. C'eſt là un angle infiniment petit, & l'Infini commence à s'y découvrir un peu, au lieu qu'il ne ſe découvroit nullement dans les Incommenſurables. Auſſi l'angle de contingence étoit une merveille incomprehenſible, & l'on n'eût pas pu expliquer comment aucune ligne droite n'y pouvant paſſer, il y paſſoit tant de circonférences circulaires qu'on vouloit, toujours plus grandes que la premiere. Archimede n'a trouvé le rapport approché du Diametre du Cercle à la Circonférence, qu'en prenant l'idée du Cercle confondu avec un Polygone d'une infinité de côtés; & ce rare génie perçoit déja dans l'abîme de l'Infini.

En dernier lieu les Anciens ſont venus à connoître l'Hyperbole, & ſes Aſymptotes, & quelques autres Courbes Aſymptotiques, c'eſt-à-dire, des Lignes qui prolongées à l'Infini, & s'approchant toujours l'une de l'autre, ne peuvent jamais ſe rencontrer, &

de plus des Eſpaces actuellement Infinis. Voilà l'Infini plus déclaré, à meſure que la Géométrie avançoit davantage, & le voilà accompagné de nouvelles merveilles.

On en demeura là, ou plutôt on vint à oublier, & à ignorer tout pendant la longue barbarie qui régna en Europe. Au renouvellement des Sciences, ceux qui eurent le courage de vouloir être Géometres, étudierent les Géometres Grecs qui reſtoient, les traductions qu'on en fit, les Commentaires. C'étoit être aſſez habile que de les entendre & de les ſuivre, embarraſſés & épineux, comme ils ſont, & l'on ne crut pas d'abord qu'il fût poſſible d'aller par d'autres routes, & moins encore d'aller plus loin. Un peu de préjugé ne pouvoit manquer de ſe mêler au reſpect légitime qu'on leur devoit. Ce qu'ils avoient admis de l'Infini, on n'eut pas de peine à l'admettre, préſenté par les Maîtres: mais on l'admettoit en quelque maniere par force, parce qu'on y étoit conduit par des guides révérés, auſſi-bien que par la ſuite néceſſaire des démonſtrations, & quand on y étoit arrivé, on s'arrêtoit avec une eſpece d'effroi, & de ſainte horreur. On n'eût pas eu l'audace de faire un pas de plus. On regardoit l'Infini comme un Myſtere qu'il falloit reſpecter, & qu'il n'étoit pas permis d'approfondir. Il eſt vrai que cette timidité étoit fort excuſable par l'extreme diſproportion que l'Eſprit humain ſent toujours entre lui, & un ſi grand objet.

Bonaventure Cavalerius, Religieux Italien de l'Ordre des Jésuates, est le premier qui dans sa *Géométrie des Indivisibles*, imprimée à Bologne en 1635, Ouvrage original, & très-ingénieux, ait fondé volontairement, & par choix tout un Systeme Géométrique sur les idées de l'Infini. Il considere les Plans comme formés par des sommes infinies de Lignes, qu'il appelle des quantités Indivisibles, les Solides par des sommes infinies de Plans pareillement Indivisibles, & les rapports de ces sommes infinies ou de Lignes, ou de Plans sont nécessairement les mêmes que ceux des Plans ou des Solides, fondement de toute sa nouvelle Théorie. Ce n'est pas qu'effrayé lui-même de l'Infini, ou craignant d'effrayer ses Lecteurs, il ne le dissimule autant qu'il peut, il le masque le plus souvent sous le nom d'*Indéfini*, terme plus doux en apparence, mais qui bien entendu ou ne signifie que la même chose, ou ne signifie rien. Il voit que son systeme le jette indispensablement dans des Infinis plus grands les uns que les autres, difficulté à laquelle on ne croit pas, dit-il, *que les armes mêmes d'Achille puissent résister*. Aussi se repose-t-il sur le fait évidemment constant, & il traite l'objection de *Nœud Gordien, qu'il laisse à quelque Alexandre*.

Du reste, il ne propose ses vues qu'avec la modestie & les ménagemens nécessaires à la Vérité, qui a le malheur d'être nouvelle, il semble demander pardon aux Géometres d'avoir mis leur Science

dans un plus grand jour, & d'en avoir augmenté l'étendue. Il fait valoir l'accord parfait de ses conclusions avec celles qui étoient déja reçues de tout le monde, & par conséquent tout ce que les mêmes principes lui ont produit de nouveau, doit être également vrai. On s'en persuade encore par un certain ordre naturel, par une liaison facile qui se trouve entre les Propositions anciennes & les nouvelles : car telle est la nature des Vérités qu'elles sont toujours prêtes à recevoir parmi elles d'autres Vérités, & leur laissent, pour ainsi dire, des places qu'elles n'ont qu'à venir prendre.

La Géométrie de Cavalerius subit le sort des nouveautés les plus dignes de l'approbation du Public, & même les plus destinées à l'emporter avec le temps : de grands Géometres l'attaquerent, de grands Géometres l'adopterent, ou la défendirent ; mais enfin, c'est là la premiere fois que l'Infini ait paru dans la Géométrie en forme systématique, & dominant sur toute une grande & vaste Théorie, quoiqu'encore extremement enveloppé.

M. de Roberval, dans une lettre écrite à Torricelli, assûre que cinq ans avant que le Livre de Cavalerius parût, il avoit trouvé la même Méthode des Indivisibles, qu'il appelle la *Science de l'Infini*, promettant cependant de n'employer guere une expression si hardie. *C'étoit*, dit-il, *en observant de près la marche d'Archimede, qu'il étoit arrivé à cette sublime, & merveilleuse Science ; il la cachoit par une vanité de*

jeune homme, qui vouloit ſe reſerver un Secret de reſoudre avec facilité les Queſtions les plus difficiles, & s'attirer par-là de l'admiration, ce qui lui avoit réuſſi; mais il lui étoit arrivé le malheur, que tandis qu'il s'amuſoit à ſe parer de quelques grains d'or tirés d'une Mine inconnue, un autre étoit venu, qui avoit découvert la Mine à tout le monde. Il ne vouloit pourtant pas *tomber dans le ridicule de revendiquer les Indiviſibles, il reconnoiſſoit nettement que l'acte public de la priſe de poſſeſſion décidoit abſolument pour Cavalerius*, tant la fortune a de pouvoir ſur tout ce qui s'appelle Gloire, & tant il eſt néceſſaire de ſe ſoumettre à ce pouvoir, tout illégitime qu'il pourroit paroître. Le Traité des Indiviſibles qu'avoit fait M. de Roberval, a été imprimé après ſa mort avec différens Ouvrages d'autres Académiciens en 1693.

Je ne prends que les principaux points de cette petite Hiſtoire de l'Infini. Le plus grand effet, & en même-temps la plus forte preuve du mérite de la *Géométrie des Indiviſibles*, fut de tourner de ce côté-là les vues de M. Wallis, grand Géometre Anglois, & de lui donner lieu de faire ſon *Arithmétique des Infinis*, qui parut en 1655. L'Anglois plus hardi que l'Italien, ſoit par le génie de ſa Nation, ſoit parce qu'il venoit après l'Italien, dont la Méthode commençoit à s'établir, produit dans tout ſon Ouvrage, ſans marquer aucune crainte, ſans uſer de précautions, des Séries ou Suites infinies de Nombres, & détermine les rapports de leurs ſommes, d'où dé-

pendent non-ſeulement des rapports de Plans, & de Solides que Cavalerius avoit donnés, mais encore des Quadratures & des Rectifications de Courbes, qui n'entroient pas dans la Théorie de Cavalerius. Wallis dit *qu'il commence où Cavalerius avoit fini*; & il eſt certain qu'il va beaucoup plus loin, & qu'il pouvoit même, ainſi qu'il en avertit, aller encore au-delà. A meſure que l'audace de manier l'Infini croiſſoit, la Géométrie reculoit de plus en plus ſes anciennes limites.

Dans l'eſpace de quelque quarante années, à compter, ſi l'on veut, depuis Cavalerius, toutes les ſpéculations de Géométrie devenant toujours plus élevées, aboutiſſoient à quelque choſe de commun, dont peut-être on ne s'appercevoit pas encore. Deſcartes par ſa fameuſe Regle des Tangentes, Fermat par celle des *Maxima & Minima*, Paſcal par la conſidération des Elémens des Courbes, Barrou par ſon petit Triangle différentiel, dont l'uſage ne finira jamais, Mercator par ſon Art de former des Suites infinies d'une autre eſpece que celles de Wallis, tous ces grands hommes, chacun en ſuivant ſa route particuliere, ſe trouvoient conduits ou à l'Infini, ou ſur le bord de l'Infini. Il perçoit de toutes parts, il pourſuivoit par-tout les Géometres, & ne leur laiſſoit pas la liberté d'échapper.

Il y a un ordre qui regle nos progrès. Chaque connoiſſance ne ſe développe, qu'après qu'un certain nombre de connoiſſances précédentes ſe ſont dé-

veloppées, & quand ſon tour pour éclorre eſt venu. Cet Infini, qu'on ne pouvoit plus ſe diſpenſer de recevoir, ſur-tout l'Infiniment petit, plus néceſſaire encore que ſon oppoſé, on ne ſavoit point l'employer dans un Calcul Algébrique, ſans quoi il avoit très-peu d'uſage, & quelle apparence qu'on l'y pût jamais employer? Auroit-on traité l'Infini comme les grandeurs finies? Sa nature n'y apportoit-elle pas un obſtacle invincible? Cependant le terme étoit arrivé, où la Géométrie devoit enfanter le Calcul de l'Infini. M. Neuton trouva le premier ce merveilleux Calcul, M. Leibnits le publia le premier. Que M. Leibnits ſoit inventeur auſſi-bien que M. Neuton, c'eſt une queſtion dont nous avons rapporté l'Hiſtoire en 1716 *, & nous ne la répeterons pas ici. Dès que le Calcul diffentiel eut paru, Mrs Bernoulli, M. le Marquis de l'Hôpital, M. Varignon, tous les grands Géometres entrerent avec ardeur dans les routes qui venoient d'être ouvertes, & y marcherent à pas de Géant, l'Infini éleva tout à une ſublimité, & en même-temps amena tout à une facilité, dont on n'eût pas oſé auparavant concevoir l'eſpérance, & c'eſt là l'Epoque d'une révolution preſque totale arrivée dans la Géométrie.

* P. 109. & ſuiv.

Cette révolution, quelque heureuſe qu'elle fût, a pourtant été accompagnée de quelques troubles. Il y a eu un Géometre, qui voulant bien recevoir les Infiniment petits du premier ordre, rejettoit abſolument ceux du ſecond, & de tous les ordres

inférieurs,

inférieurs, toujours infiniment plus petits les uns que les autres.

Dans l'Académie même des Sciences il s'est élevé quelques contestations sur ce Systeme, & nous n'en avons pas caché l'Histoire au Public *.

Il y a plus. M. Leibnits, comme nous l'avons avoué dans son Eloge, paroît avoir un peu chancelé. Il semble qu'il se fût relâché jusqu'au point de réduire les Infinis de différens ordres à n'être que des *Incomparables*, dans le sens qu'un grain de Sable seroit incomparable au Globe de la Terre, ou ce Globe à un Globe dont la distance du Soleil à Sirius seroit le rayon, ce qui ruineroit l'exactitude géométrique des Calculs, & de quel poids ne doit pas être l'autorité de l'Inventeur contre l'invention?

Malgré tout cela l'Infini a triomphé, & s'est emparé de toutes les hautes spéculations des Géometres. Les Infinis ou Infiniment petits de tous les ordres sont aujourd'hui également établis, il n'y a plus deux partis dans l'Académie, & si M. Leibnits a chancelé, on se fie plus aux lumieres qu'on tient de lui, qu'à son autorité même.

Il faut convenir cependant que toute cette matiere est environnée de ténebres assez épaisses, & delà vient que quelques-uns de ceux qui embrassent les idées de l'Infini, ne les prennent pourtant que pour des idées de pure supposition sans réalité, dont on ne se sert que pour arriver à des solutions difficiles, qu'on abandonne dès qu'on y est arrivé, & qui

* *V. l'Hist. de l'Acad. des Sc. an.* 1701 *p.* 87 *& suiv.* 2de *Edit.*

ressemblent à des Echaffaudages qu'on abat, aussi-tôt que l'Edifice est construit. C'est là une façon de penser mitigée, qui rassure un peu contre la frayeur que l'Infini cause toujours.

Pour dissiper cette frayeur, du moins en partie, je puis faire souvenir les Géometres d'un Infini, qu'ils reçoivent tous sans exception, d'où s'ensuivent nécessairement toutes les idées du Systeme moderne, & cela sans aucune des restrictions, sans aucun des adoucissemens qu'on peut imaginer.

Tous les Géometres, anciens & modernes, conviennent que l'espace Asymptotique de l'Hyperbole est infini, & ils employent tous ce même terme. Que veulent-ils qu'il signifie? Certainement ils n'entendent pas que cet espace est étendu à l'infini, car ils démontrent que d'autres espaces Asymptotiques pareillement étendus à l'infini, ne sont que finis; & il est à remarquer que lorsqu'ils démontrent que ces derniers espaces ne sont que finis, ils n'en peuvent le plus souvent déterminer la grandeur finie, & que pour cela ils ne les traitent pas même d'indéfinis. Il faut donc que l'espace Hyperbolique soit infini, parce qu'il est plus grand que tout espace fini, quel qu'il soit, plus grand, par exemple, que l'aire d'un Cercle dont le Soleil seroit le centre, & le demi-diametre la distance du Soleil à Saturne ou à l'Etoile de Sirius, &c. Assurément cette vérité démontrée en cent façons, & reconnue de tout le monde, est bien contraire à ce qu'on jugeroit par les sens en

voyant une Hyperbole tracée ſur le papier, où il ſemble qu'au bout d'un très-petit eſpace elle ſe confond déja avec ſon Aſymptote.

L'eſpace Hyperbolique eſt auſſi réellement infini, ou plus grand que tout eſpace fini, qu'un eſpace Parabolique déterminé eſt les deux tiers de ſon parallélogramme circonſcrit, où ſeroit la différence de ces deux manieres d'être? Il ſeroit trop puérile de dire que l'un de ces eſpaces peut être actuellement tracé, & que l'autre ne le peut. La Géométrie eſt toute intellectuelle, indépendante de la deſcription actuelle & de l'exiſtence des Figures dont elle découvre les propriétés. Tout ce qu'elle conçoit néceſſaire eſt réel de la réalité qu'elle ſuppoſe dans ſon objet. L'Infini qu'elle démontre eſt donc auſſi réel que le Fini, & l'idée qu'elle en a n'eſt point plus que toutes les autres, une idée de ſuppoſition, qui ne ſoit que commode, & qui doive diſparoître dès qu'on en a fait uſage.

Si l'on conçoit l'eſpace Hyperbolique diviſé en parties finies égales, chacune pourra être priſe pour l'Unité, il y en aura un nombre infini, & leur ſomme ſera égale à cet Infini, qui eſt l'eſpace. Or une ſomme quelconque de nombres quelconques, ne peut être qu'un nombre. L'Infini eſt donc un nombre, & doit être traité comme tel, ce qui prouve encore ſa réalité, puiſqu'il a toute celle des nombres.

Le parallélogramme circonſcrit à l'eſpace Aſymp-

totique Hyperbolique, c'eſt-à-dire, le parallélogramme dont un des côtés ſera la premiere & plus grande Ordonnée de l'Hyperbole, & l'autre l'Aſymptote, ou Axe infini, ſera viſiblement plus grand & beaucoup plus grand que l'eſpace Aſymptotique. Voilà donc un Infini plus grand qu'un autre, & cet Infini je le puis doubler, tripler, &c. en concevant la premiere Ordonnée de l'Hyperbole deux fois, trois fois, &c. plus grande; les Infinis peuvent donc avoir entre eux tous les rapports des nombres.

Si enfin je conçois que la premiere Ordonnée de l'Hyperbole ſoit devenue égale à l'Aſymptote, le parallélogramme circonſcrit eſt un quarré infiniment plus grand que l'eſpace Aſymptotique infini, ce qui fait voir & la néceſſité & la réalité des différens ordres d'Infini, car dès qu'on en tient deux, on voit aſſez qu'il n'y a plus de bornes.

Ces différens Ordres, dont l'ordre du Fini eſt le premier & le plus bas, ſont véritablement *incomparables*, c'eſt-à-dire, qu'une grandeur de l'un n'eſt rien par rapport à une grandeur de l'ordre ſupérieur, non dans le ſens qu'un grain de ſable ne ſeroit rien par rapport à un Globe dont la diſtance du Soleil à Sirius ſeroit le rayon, mais dans un ſens infiniment plus rigoureux; car ce grain de ſable & ce Globe ſont du même ordre, puiſque ce Globe n'eſt certainement pas infini, ou plus grand que toute grandeur finie.

Je ne vois pas qu'on puiſſe rompre en aucun endroit cette chaîne de conſéquences qui naiſſent ſi ſimplement & ſi naturellement de la propriété inconteſtable de l'eſpace Hyperbolique, elles naîtroient de même de pluſieurs autres vérités démontrées en Géométrie ; & par conſéquent ne pas recevoir l'Infini, tel qu'on vient de le repréſenter, & avec toutes ſes ſuites néceſſaires, c'eſt rejetter des démonſtrations géométriques, & qui en rejette une les doit rejetter toutes.

Mais ſi la certitude eſt entiere, il ſemble que l'évidence ne le ſoit pas ; par exemple, un Infini moindre qu'un autre a beau être démontré, il paroît toujours enfermer une contradiction. Cet Infini moindre eſt néceſſairement limité par rapport au plus grand, & dès qu'il eſt limité, il n'eſt plus infini : mais il faut prendre garde que cette contradiction apparente vient de l'idée d'un autre Infini que celui qu'on a poſé.

Nous avons naturellement une certaine idée de l'Infini, comme d'une grandeur ſans bornes en tous ſens, qui comprend tout, hors de laquelle il n'y a rien. On peut appeller cet Infini *Métaphyſique* : mais l'Infini *Géométrique*, c'eſt-à-dire, celui que la Géométrie conſidere, & dont elle a beſoin dans ſes recherches, eſt fort différent, c'eſt ſeulement une grandeur plus grande que toute grandeur finie, mais non pas plus grande que toute grandeur. Il eſt viſible que cette définition permet qu'il y ait des

Infinis plus petits ou plus grands que d'autres Infinis, & que celle de l'Infini Métaphysique ne le permettroit pas. On n'eſt donc pas en droit de tirer de l'Infini Métaphyſique des objections contre le Géométrique, qui n'eſt comptable que de ce qu'il renferme dans ſon idée, & nullement de ce qui n'appartient qu'à l'autre.

Je puis dire encore plus : l'Infini Métaphyſique ne peut s'appliquer ni aux nombres, ni à l'étendue, il y devient un pur Etre de raiſon, dont la fauſſe idée ne ſert qu'à nous troubler & à nous égarer.

L'Infini géométrique étant bien entendu, ſes principes bien inébranlables, les conſéquences bien liées, la plupart des recherches un peu élevées ne laiſſent pas de nous jetter encore dans des abîmes d'une obſcurité profonde, ou tout au moins dans des Pays où le jour eſt extremement foible. L'Aſymptotiſme des Courbes toujours fort étonnant, quoique fort ordinaire, les eſpaces Aſymptotiques que d'aſſez légeres différences rendent finis ou infinis, leurs Solides que des eſpaces infinis donnent finis, & que des eſpaces finis donnent infinis, des ſommes de Suites infinies, qui d'infinies qu'elles étoient deviennent finies par la ſeule élévation des Suites au quarré, une infinité d'autres merveilles incompréhenſibles par elles-mêmes, naiſſent à chaque moment ſous les pas des Géometres, & il ſemble que la Géométrie, qui ſe pique d'avoir la clarté en

partage, devroit être exempte de merveilles. Quelquefois même des Méthodes, quoique fines & ingénieuses, ne donnent aucune idée nette. Je n'ai point vu, par exemple, de Géometre qui entendît précisément ce que c'est dans la Regle des Infléxions & des Rebroussemens, qu'une différence seconde devenue égale à l'Infini. J'en puis dire autant de la Courbure infinie, que l'on démontre telle sans savoir aucunement en quoi elle consiste. Ajouterai-je qu'il semble quelquefois que les Géometres se fassent honneur de leurs conclusions surprenantes, & qu'ils seroient fâchés qu'elles fussent plus vrai-semblables? Quoiqu'il en soit, il est arrivé dans la haute Géométrie une chose bisarre, la certitude a nui à la clarté. On tient toujours le fil du Calcul, guide infaillible, il n'importe où l'on arrive, il y falloit arriver, quelques ténebres qu'on y trouve. De plus, la gloire a toujours été attachée aux grandes recherches, aux solutions des Problemes difficiles, & non à l'éclaircissement des idées.

J'ai cru que cet éclaircissement, négligé par les habiles Géometres, pourroit être utile à la Géométrie; on n'en marchera pas plus sûrement, mais on verra plus clair autour de soi, avec le fil qu'on avoit dans des Labyrinthes sombres, on aura un flambeau, dont la lueur ne sauroit être si petite, qu'elle ne soit toujours de quelque usage, & même si cette petite lueur que je présente n'est pas fausse, rien

n'empêchera qu'on ne l'augmente beaucoup.

J'avoue qu'on peut me reprocher qu'au lieu d'éclaircir l'Infini, j'y porte une obſcurité nouvelle, un Paradoxe inoui, qui eſt expoſé dans la Sect. III, & qui enſuite ſe retrouve ſouvent dans tout l'Ouvrage: mais ſi ce Paradoxe eſt vrai, s'il ſuit néceſſairement de la nature de l'Infini, je la fais mieux connoître, j'en fais mieux connoître les propriétés, qui, quoiqu'obſcures, ſont la ſource de tout ce que le Calcul nous donne de plus étonnant; on arrivera aux plus grandes merveilles bien préparé, & ſans cette eſpece de ſurpriſe, qui dans le fonds n'eſt point honorable à une vraie Science. C'eſt toujours un degré de lumiere, que de voir ſûrement à quel principe, fût-il peu connu, tiennent certains effets. Ainſi quand les Phyſiciens ont demandé comment ſe fait la génération perpetuelle des Plantes & des Animaux, qui ſont des Corps d'une organiſation ſi admirable & ſi conſtante, ceux qui ont dit que ces Corps ſont déja tout formés de la main du ſouverain Etre dans les Graines ou dans les Œufs, & qu'ils ne font que ſe développer; ont apporté dans la Phyſique une connoiſſance nouvelle & utile, toute accompagnée qu'elle eſt de difficultés embarraſſantes; elles ne font pas abandonner le principe, & on ſe contente d'admirer. Je remarquerai en paſſant que dans cet exemple même la principale difficulté vient de l'Infini.

Ceux qui ont le plus traité l'Infini géométrique, ne

ne l'ont fait jusqu'à présent qu'avec un reste de timidité, qui les a empêchés de l'approfondir autant qu'ils le pouvoient. Il m'a semblé qu'au point où l'on en étoit venu, cette timidité n'étoit plus guere de saison, & que ma témérité seroit excusable, si je tâchois d'avancer encore de quelque pas, pourvu que je suivisse exactement les routes déja ouvertes. Il s'est offert à moi une infinité de nouveaux Infinis ignorés, & cependant importans, & en général l'Infini s'étend beaucoup plus qu'il ne faisoit sur toute la Géométrie, ne fût-ce que par cette seule raison, que c'est lui qui fait les Incommensurables, dont le nombre est infiniment plus grand que celui des Commensurables. On rapporte qu'il y a dans les Pays-Bas de grandes étendues de terre qui ont été couvertes par la Mer, & dont il ne reste que quelques pointes de Clochers éparses çà & là, qui sortent de l'eau. C'est ainsi à peu-près que l'Océan de l'Infini a abîmé tous les nombres, & toutes les grandeurs, dont il ne reste que les Commensurables que nous puissions connoître parfaitement. M. Huguens, qui étoit du moins autant homme d'esprit que grand Géometre, a dit en quelque endroit de son *Cosmotheoros*, qu'*il soupçonnoit que tout notre Calcul ne rouloit que sur les petits commencemens des Suites des Nombres*. M. Wallis a cru aussi que tous nos Signes radicaux ne suffiroient pas pour exprimer certains nombres qu'il entrevoyoit, plus singuliers & plus Incommensurables que les Incom-

menſurables ordinaires. Il y a bien de l'apparence qu'il entreroit de l'Infini dans ces nombres de M. Wallis.

Quand une Science, telle que la Géométrie, ne fait que de naître, on ne peut guere attraper que des Vérités diſperſées qui ne ſe tiennent point, & on les prouve chacune à part comme l'on peut, & preſque toujours avec beaucoup d'embarras. Mais quand un certain nombre de ces Vérités déſunies ont été trouvées, on voit en quoi elles s'accordent, & les principes généraux commencent à ſe montrer, non pas encore les plus généraux ou les premiers, il faut un plus grand nombre de Vérités pour les forcer à paroître. Pluſieurs petites Branches que l'on tient d'abord ſéparément, menent à la groſſe Branche qui les produit, & pluſieurs groſſes Branches menent enfin au Tronc. Une des grandes difficultés que j'aie éprouvées dans la compoſition de cet Ouvrage a été de ſaiſir le Tronc, & pluſieurs groſſes Branches m'ont paru l'être qui ne l'étoient pas. Je ne ſuis pas ſûr de ne m'y être pas encore trompé, mais enfin quand j'ai eu pris l'Infini pour le Tronc, il ne m'a plus été poſſible d'en trouver d'autre, & je l'ai vu diſtribuer de toutes parts, & répandre ſes rameaux avec une régularité & une ſymmétrie, qui n'a pas peu ſervi à ma perſuaſion particuliere.

Un avantage d'avoir ſaiſi les premiers Principes, ſeroit que l'ordre ſe mettroit par-tout preſque de

lui-même, cet ordre qui embellit tout, qui fortifie les Vérités par leur liaiſon, que ceux à qui on parle ont droit d'exiger, & qu'on ne peut leur refuſer ſans une eſpece d'injuſtice, ſur-tout ſi on ſacrifie leur commodité à la gloire de paroître plus profond. De plus les démonſtrations qui ne ſont pas tirées des premiers principes, ne vont guere au but que par de longs & fatiguans circuits. On ne ſait preſque plus d'où l'on eſt parti, on ne ſait par où l'on a paſſé. Mais ſi on a pu remonter à la vraie nature des choſes, les démonſtrations en naiſſent preſque immédiatement, & en foule : il arrive rarement qu'il y ait bien loin des concluſions aux principes, & que l'on ne puiſſe pas embraſſer d'un coup d'œil tout le chemin qu'on a fait. Enfin ce qui n'eſt pas pris dans ces premieres ſources, manque aſſez ſouvent d'une certaine clarté. On ſe ſert des Rayons des Développées pour meſurer la courbure des Courbes ; mais parce que ces Rayons ne ſont qu'un indice de la courbure, & non pas ce qui la fait, quand on trouve une courbure infinie, on ne peut en prendre ſelon cette Théorie aucune idée nette. Le Vrai eſt ſimple & clair, & quand notre maniere d'y arriver eſt embarraſſée & obſcure, on peut dire qu'elle mene au Vrai, & n'eſt pas vraie.

Le Calcul n'eſt guere en Géométrie que ce qu'eſt l'expérience en Phyſique, & toutes les Vérités produites ſeulement par le Calcul, on les pourroit traiter de Vérités d'expérience. Les Sciences doivent

aller jusqu'aux premieres causes, sur-tout la Géométrie, où l'on ne peut soupçonner comme dans la Physique des principes qui nous soient inconnus. Car il n'y a dans la Géométrie, pour ainsi dire, que ce que nous y avons mis, ce ne sont que les idées les plus claires que l'Esprit humain puisse former sur la Grandeur comparées ensemble, & combinées d'une infinité de façons différentes, au lieu que la Nature pourroit bien avoir employé dans la structure de l'Univers quelque Méchanique qui nous échape absolument. Que si cependant la Géométrie a toujours quelque obscurité essentielle, qu'on ne puisse dissiper, & ce sera uniquement, à ce que je crois, du côté de l'Infini, c'est que de ce côté-là la Géométrie tient à la Physique, à la nature intime des Corps que nous connoissons peu, & peut-être aussi à une Métaphysique trop élevée, dont il ne nous est permis que d'appercevoir quelques rayons.

Si l'on fait l'honneur à ce Livre de l'attaquer; & que ce soit par des endroits qui me sont communs avec les Géometres partisans de l'Infini, je me reposerai de ma défense sur leur autorité, & ne me mêlerai point de soutenir leur sentiment, qu'ils soutiendroient mieux que moi. Si on m'attaque par des endroits qui me soient particuliers, je demande en grace qu'on ne les ait point jugés du premier coup d'œil, qu'on ne les prenne qu'accompagnés de tout ce qui les appuie ou les favorise; en un

mot qu'on rompe abſolument la liaiſon qu'ils m'ont paru avoir avec les principes reçus, & je reconnoîtrai mon erreur ſans chercher de vains ſubterfuges. J'en dis autant de toute autre eſpece de fautes où je ſerai tombé ſans m'en appercevoir, ce qui n'eſt que trop poſſible dans un aſſez grand Ouvrage, que j'ai toujours craint qui ne fût au-deſſus de mes forces, & que j'ai ſupprimé long-temps par cette raiſon.



EXTRAIT DES REGISTRES
de l'Académie Royale des Sciences.

Du 22. Fevrier 1725.

MEſſieurs de MAIRAN & NICOLE, qui avoient été nommés pour examiner les *Elemens de la Géométrie de l'Infini*, par M. DE FONTENELLE Sécretaire perpétuel de l'Académie, en ayant fait leur rapport; la Compagnie a jugé que la plupart des idées contenues dans cet Ouvrage étoient nouvelles, ſoit par le fond, ſoit par la forme que l'Auteur leur donnoit, que l'application qu'il en faiſoit à la recherche des propriétés des Suites infinies de grandeurs quelconques, à la nature des Courbes, à leurs Aſymptotes, à leurs Eſpaces, & aux Solides qui reſultent de leurs révolutions autour d'un axe, aux forces Centrales, & à quelques autres queſtions Phyſico-mathématiques, étoit ſolide & ingénieuſe, que les Incommenſurables, & les quantités Imaginaires, étoient expliquées d'une maniere toute nouvelle, & comme faiſant partie d'un plan général, qui préſentoit à l'Eſprit un ſpectacle magnifique, & qu'enfin un Ouvrage ſi capable d'intéreſſer les plus grands Géometres par les ſpéculations ſublimes qu'il contient, & en même-temps ſi propre à éclairer ceux qui aſpirent à le devenir, ne pouvoit qu'être utile au Public, & faire honneur à l'Académie. En foi de quoi j'ai ſigné le preſent Certificat au lieu du Sécretaire. A Paris ce 26e Fevrier 1727. DE REAUMUR, *Directeur de l'Académie Royale des Sciences.*

TABLE.

PREMIERE PARTIE.

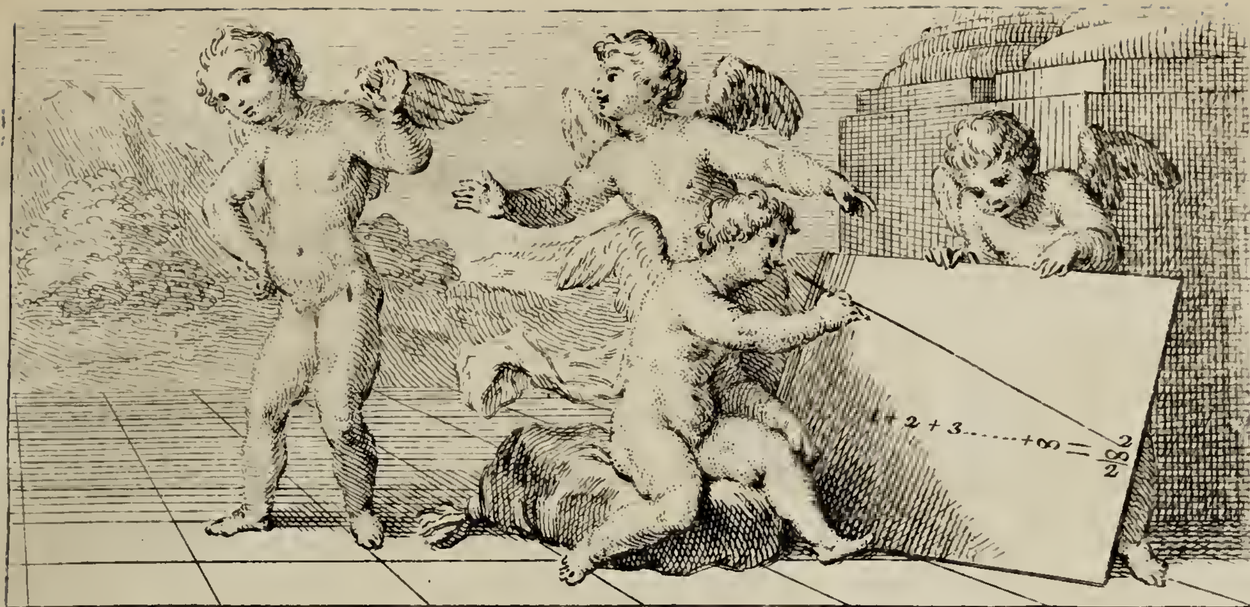
SYSTEME GENERAL DE L'INFINI.

SECONDE PARTIE.

DIFFERENTES APPLICATIONS OU REMARQUES.



ELEMENS



Quod numerare nefas, numerat

ÉLÉMENS DE LA GÉOMÉTRIE DE L'INFINI.



PREMIERE PARTIE.

SISTEME GENERAL DE L'INFINI.

SECTION PREMIERE.

De la Grandeur, & de ses Rapports; des Proportions, & des Progressions.

1. A GRANDEUR est ce qui est susceptible d'augmentation & de diminution, ou, ce qui est le même, de plus & de moins. Tels sont les Nombres, les Lignes, les Surfaces, les Solides, les Temps, &c. Il est clair qu'un Nombre peut, sans cesser d'être nombre, être plus grand ou plus petit. De même une ligne, &c. *Ce que c'est que la Grandeur.*

2. Donc o n'eſt point grandeur, car il n'eſt ſuſceptible ni d'augmentation ni de diminution. Un rien ne peut être un plus grand ou un moindre rien.

Deux manieres dont se forme la Grandeur.

3. Il eſt naturel de concevoir les Grandeurs comme formées par une augmentation ſucceſſive : & pour cela ce qu'il y a de principal à conſidérer, c'eſt leur origine. Je puis les prendre à un point, dans un état, où elles n'exiſtent pas encore, & d'où elles partent pour devenir grandeurs, ou bien je puis les prendre comme formées de quelque grandeur de même eſpéce, ſi petite que je voudrai, & qui croîtra toujours : il n'y a que ces deux manieres poſſibles. Ainſi s'il s'agit, par exemple, des élévations du Soleil ſur l'Horiſon, je puis commencer par les prendre au point où le Soleil eſt préciſément à l'Horiſon, & où ſon élévation eſt nulle, & compter de là 1. degré, 2. degrés, ou ſeulement 1. Minute, 2. Minutes, &c. ou des Secondes, &c. mais je puis auſſi commencer par prendre 1. degré ou une Minute, &c. d'élévation, & de-là compter le reſte.

Selon la 1re maniere, la numération commence par o, & ſelon la 2de par 1. Selon la 1re, o eſt un *Terme* d'où partent les grandeurs croiſſantes, & ſelon la 2de, 1 eſt un *Elément* dont elles ſont formées. Elles ſont d'autant plus grandes qu'elles ſont plus éloignées de o ſelon la 1re, & qu'elles ſont formées de 1 plus répeté ſelon la 2de. En un mot, on a ſuivi ou l'idée de *diſtance* plus ou moins grande à un Terme commun, ou l'idée de *répétition* plus ou moins grande d'un Elément commun.

4. Zero ne peut être que Terme, & jamais Elément, car il faut qu'un Elément ſoit grandeur, & il ne l'eſt pas (2).

5. Donc ſi Zero commence une formation de grandeurs, cette formation eſt faite ſelon l'idée de diſtance, & non ſelon celle d'Elément.

6. Un Elément doit être moindre que les grandeurs qui en ſont formées, & le même pour elles toutes S'il y avoit dans la Nature une grandeur qui fût réellement la moindre grandeur poſſible de toutes celles d'une eſpece, par exemple,

une élévation du Soleil sur l'Horison, moindre que toutes les autres, ce seroit celle-là qu'il faudroit prendre pour Elément des élévations; mais comme une telle grandeur n'existe point, on ne peut avoir un Elément que par une détermination arbitraire, par exemple, 1. degré d'élévation, ou 1. Minute, &c. cet élément une fois fixé ne doit plus changer.

7. Soit que l'on prenne pour élément des élévations du Soleil ou 1. degré, ou 1. Minute, ou 1. Seconde, &c. C'est toujours 1. appliqué à différentes grandeurs réelles, & qui les désigne. Ainsi 1. est une grandeur purement intelligible & abstraite, au lieu que 1. degré, ou 1. Minute &c. est une grandeur existante & réelle. 1. dans le 1er sens s'appelle l'*unité numérique*, & dans le 2^d^ sens, où il est appliqué à quelque grandeur réelle, c'est l'*unité géométrique*. *Unité numérique & géométrique.*

8. L'unité géométrique est divisible, 1. degré contient 60. Minutes, 1. Minute 60. Secondes, &c. Mais l'unité numérique est indivisible, car quelque grandeur réelle que je veuille désigner, je ne la puis désigner par un nombre moindre que 1. Et si je dis $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. j'entends $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ de quelque grandeur réelle ou unité géométrique, comme d'un degré, d'une minute, d'une toise, &c. alors c'est le demi-degré, ou la demi-minute, &c. qui devient l'unité numérique.

9. L'unité numérique est l'Elément commun de tous les nombres, 2. 3. 4. &c. ils ne sont tous que 1. répété un certain nombre de fois.

10. Les nombres naturels étant pris selon l'idée de distance précisément, ils sont 0, 1, 2, 3, &c. & selon l'idée d'élément, ils ne sont que 1, 2, 3, &c. De la 1re maniere ils se forment par addition, $0.\ 0+1=1.\ 0+2=2$, &c. & de la 2e ils se forment par multiplication, $1.\ 1\times 2=2.\ 1\times 3=3$, &c. Donc tout nombre est égal à la distance où il est de 0, & tout nombre est égal au nombre de fois que 1. à dû être repeté pour le former.

11. Zero ne peut absolument être élément (4.) mais 1. peut être terme aussi-bien qu'élément, car rien n'empêche que l'on ne prenne les nombres croissans comme distans de 1,

& que l'on ne dise $1 + 1 = 2$. $1 + 2 = 3$, &c. Mais ce qui marque bien que 1. n'est pas si naturellement terme que o, c'est que les nombres ne sont pas égaux à leurs distances à 1, comme ils le sont à leurs distances à o (10.)

12. Tout o est le même o, & tout 1 est le même 1 numérique, mais non pas géométrique (7.)

13. Puisque l'unité numérique est indivisible (8) & le moindre nombre possible, elle n'a point d'élément; car il seroit moindre qu'elle, ou ce qui revient à la même chose, elle n'a d'élément qu'elle-même. Et en effet $1 \times 1 = 1$. Cela doit être encore, parce que tout nombre a étant $= 1 \times a$ (10) il faut aussi que a étant 1, 1×1 soit $= 1$.

14. Donc 1 est toujours 1, à quelque puissance qu'on l'éleve, & par conséquent aussi, quelque racine qu'on en tire.

15. Puisque 1. multiplié par lui-même tant qu'on voudra ne change point, c'est la même chose que s'il n'étoit point multiplié, & une multiplication qui ne produit aucun effet peut n'être point comptée. Donc il est également vrai, & que 1. n'est formé d'aucune multiplication, & qu'il est formé d'autant de multiplications par lui-même qu'on voudra, ce qui lui est particulier.

16. Il n'y a point de nombre qui, aussi-bien que o, & même que 1. (11.) ne puisse être un Terme d'où l'on comptera d'autres nombres plus grands : mais il ne sera qu'un Terme *particulier*, & il n'y en a point qui, aussi-bien que 1, ne puisse être élément, mais élément *particulier* de nombres plus grands. Ainsi tout nombre a est tel que l'on en peut toujours faire un plus grand qui sera $a + m$, ou $a \times m$, m étant un nombre quelconque entier.

17. Tout nombre a pouvant être Terme à l'égard d'un plus grand qui sera $a + m$, il n'est pas vrai de même qu'il puisse être élément à l'égard de tout nombre plus grand. Ainsi 2. & 3. sont tels que $2 + m = 3$, m étant $= 1$: mais jamais $2 \times m$ ne peut être $= 3$, m étant un nombre entier. Il en est de même de tous les nombres dont le grand n'est pas un multiple exact du petit. Cela enferme deux cas. 1°. S'ils

ſont premiers entr'eux comme 2 & 3, ils ne peuvent, n'étant pas exprimés ſelon l'idée de diſtance, ou par a & $a + m$, s'exprimer que par a & b. 2°. S'ils ne ſont pas premiers entr'eux, & que l'un ſoit ſimplement un multiple non exact de l'autre, il eſt aiſé de voir qu'ils s'exprimeront par am & bm, a & b étant deux membres premiers entr'eux, & m le même de part & d'autre. Tels ſont $10 = 2 \times 5$ & $15 = 3 \times 5$.

18. Donc en général deux nombres ne peuvent s'exprimer que par a & $a + m$, ou a & $a \times m$, ou a & b, ou am, & bm.

19. Un Rapport eſt la comparaiſon de deux choſes, ou plutôt le fondement de la comparaiſon qu'on en fait; donc il faut qu'elles ſoient deux, car ſi elles n'étoient préciſément & de tous points que la même, il n'y auroit nulle comparaiſon à en faire. Donc tout leur rapport ne vient préciſément que de ce qui fait qu'elles ſont deux. Or deux grandeurs préciſément priſes comme telles, & ſans nulle autre circonſtance étrangere, ne peuvent être deux, que parce que l'une eſt plus petite, & l'autre plus grande; donc c'eſt de-là uniquement que vient leur rapport, & il ne conſiſte qu'en ce qui rend l'une plus petite, & l'autre plus grande, ou, la plus petite étant poſée, en ce qui rend l'autre plus grande. *Rapports. Rapport arithmétique & géométrique.*

20. Donc, ſi deux nombres ou grandeurs ſont exprimés par a & $a + m$, ou par a & am, tout leur rapport conſiſte dans m, qui ſeule les rend deux. Or m eſt la diſtance de $a + m$ à a, a étant pris pour Terme à l'égard de $a + m$, & m eſt le nombre de fois que a, Elément de am, eſt repété dans am. Donc le rapport de a & de $a + m$ eſt pris ſelon l'idée de diſtance, & le rapport de a & de am ſelon l'idée d'élément. Le 1er s'appelle rapport *arithmétique* ou *différence*, & le 2^d rapport *géométrique*.

21. Dans l'expreſſion générale du rapport arithmétique de a & de $a + m$, a peut être $= 0$, parce que a eſt conſidéré comme un Terme à l'égard de $a + m$, & que 0 eſt le Terme commun des grandeurs. Les deux grandeurs a & $a + m$ deviendront donc alors 0 & $0 + m = m$, & même tout le

rapport arithmétique de a & de $a+m$ ſe réduit néceſſairement à celui de o & de m; car en retranchant de a & de $a+m$, a qui leur eſt commun, & qui par conſéquent ne les rend point deux, & ne fait rien à leur rapport, on a $a-a = o$, & m.

22. Donc a & m étant deux nombres indéterminés, dont chacun peut avoir une infinité de valeurs différentes, le rapport arithmétique de deux nombres quelconques ſe réduit toujours à celui de o, & de leur différence m.

23. Donc quand on prendra m pour un nombre déterminé, il y a un rapport primitif & original de o & de m, qui a, pour ainſi dire, une infinité de copies dans les rapports de a & de $a+m$.

24. Dans l'expreſſion du rapport géométrique de a & de am, a ne peut être $= o$ (4), mais il peut être $= 1$, & même quelque grandeur que ſoit a, le rapport de a & de am ſe réduit à celui de 1 & de m, car a & am ayant a qui leur eſt commun & inutile à leur rapport, ſi on le leur ôte à tous deux par la diviſion, ce qu'il faut faire, puiſque leur rapport eſt formé par multiplication (10), on a $\frac{a}{a} = 1$, & $\frac{am}{a} = m$.

25. Donc les rapports géométriques du nombre infini de grandeurs repréſentées par a & am, ne ſont que les copies du rapport primitif & original de 1 & de m.

26 Quand deux grandeurs ne peuvent être exprimées que par a & b, à cauſe que a & b ſont premiers entr'eux (17), cela n'empêche pas qu'elles n'aient une différence m, $= b - a$, en quoi conſiſte leur rapport arithmétique, & elles peuvent toujours être exprimées par a & $a+m$. Mais elles n'ont point de m pour exprimer leur rapport géométrique, & elles n'ont rien de commun que 1, élément de toutes les grandeurs, car elles ſont $1 \times a = a$, & $1 \times b = b$. Donc leur rapport géométrique conſiſte dans a & dans b pris en leur entier, & c'eſt un rapport irréductible & original. Ces grandeurs ſont deux par toute leur nature & par toute leur expreſſion, & leur rapport géométrique ne peut être que $\frac{a}{b}$ ou $\frac{b}{a}$.

27. Si deux grandeurs sont exprimées par am, & bm selon l'art. 17. il est visible qu'elles ne sont, selon le rapport géométrique que a & b, & qu'il suffit de les considérer sous cette derniere expression.

28. En supposant toujours $a < b$, on peut concevoir que comme am est formé de a, multiplié par m, ainsi b est formé de a, multiplié par $\frac{b}{a}$, car $a \times \frac{b}{a} = b$. Ainsi en prenant m pour un nombre quelconque, soit entier, soit fractionnaire, & $= \frac{b}{a}$ expression d'un rapport géométrique irréductible, m sera un multiplicateur, qui d'un nombre quelconque en fera toujours un plus grand quelconque.

29. Donc deux grandeurs ayant un rapport arithmétique se peuvent toujours exprimer par a & $a + m$, & si elles ont un rapport géométrique par a & am, & en réunissant les deux signes $+$ & $\times$, les deux grandeurs quelconques s'exprimeront par a & $a \underset{\times}{+} m$, m étant dans l'arithmétique une différence, & dans le géométrique un multiplicateur, en quoi consiste de part & d'autre tout le rapport.

30. Deux grandeurs différentes de a & de $a \underset{\times}{+} m$ ne peuvent avoir entr'elles le même rapport quelconque que a & $a \underset{\times}{+} m$, ou faire avec a & $a \underset{\times}{+} m$ une proportion, soit *arithmétique*, soit *géométrique*, à moins qu'elles ne soient deux entr'elles précisément de la même maniere dont a & $a \underset{\times}{+} m$ sont deux (20). Donc il faut qu'elles conservent l'm de $a \underset{\times}{+} m$, donc ces deux nouvelles grandeurs sont b, & $b \underset{\times}{+} m$.

31. Si deux grandeurs ne peuvent être exprimées selon le rapport géométrique que par a & b, comme elles sont deux, ou différentes par toute leur expression, deux autres grandeurs ne sauroient avoir le même rapport géométrique, qu'elles ne soient encore a & b, & en même temps pour être

différentes de a & de b, il faut qu'elles le ſoient par quelque choſe qui leur ſoit commun à toutes deux, & par conſéquent ne change rien au rapport de a & de b. Donc les deux nouvelles grandeurs ſont $a \times m$, & $b \times m$, ce qui n'empêche pas que, ſelon le rapport arithmétique, elles ne puiſſent être exprimées par a & $a + m$ (17).

Expreſſion générale de la proportion arithmétique, & de la géométrique.

32. Donc toute proportion s'exprime ainſi :

$a.\ a \underset{\times}{+} m.\ b.\ b \underset{\times}{+} m.$ ou $a.\ b.\ a \underset{\times}{+} m.\ b \underset{\times}{+} m.$

Chacune de ces expreſſions contient deux proportions, l'une arithmétique, l'autre géométrique.

33. Quoique dans les deux proportions de chaque eſpéce, les grandeurs puiſſent être les mêmes, par exemple, $a = 2$, $b = 3$, $m = 4$, de part & d'autre, les deux proportions ne ſeront pas la même, car le rapport égal qui doit être entre les 2. premieres grandeurs d'une proportion, & les 2. dernieres, ne ſera pas le même de part & d'autre. Ainſi dans $a.\ a + m.\ b.\ b + m$, ce rapport égal ſera 4, & dans $a.\ b.\ a + m.\ b + m$, il ſera 1. De même dans $a.\ am.\ b.\ bm$ le rapport ou multiplicateur égal ſera 4, & dans $a.\ b.\ am.\ bm$, il ſera $\frac{3}{2}$ (28). Alors cette derniere proportion ſera $a.\ a \times \frac{b}{a}.\ m.\ m \times \frac{b}{a}$, c'eſt-à-dire, $2.\ 2 \times \frac{3}{2}.\ 4.\ 4 \times \frac{3}{2}$, ou 2. 3. 4. 6. & elle ſera réduite à la même forme que $a.\ am.\ b.\ bm$, ſelon l'art. 28.

34. La premiere proportion quelconque de l'art. 32. deviendra la 2de, ſi on met ſeulement les deux termes moyens à la place l'un de l'autre. Donc ce déplacement de termes n'empêche pas qu'il n'y ait encore proportion, quoique le rapport égal qui conſtitue la proportion, ne ſoit plus le même (33).

35. Au lieu de commencer par les plus petits termes dans les deux comparaiſons que l'on fait, ou dans les deux rapports, on peut commencer par les plus grands, & dire : $a \underset{\times}{+} m.\ a.\ b \underset{\times}{+} m.\ b.$ ou $b.\ a.\ b \underset{\times}{+} m.\ a \underset{\times}{+} m$, & il eſt clair

que

que ce déplacement de termes, & celui de l'art. précédent sont tous les déplacemens possibles, qui laisseront subsister une proportion.

36. En toute proportion il n'y a que 3 grandeurs différentes, *a*, *b*, & *m*, répétées chacune une fois.

37. De quelque maniere que les 4 termes d'une proportion quelconque soient rangés, pourvû qu'ils le soient de maniere qu'il y ait proportion; *a*, *b*, & *m* se trouvent toujours dans les deux termes extremes & dans les deux moyens, & ne s'y trouvent qu'une fois chacun. Donc la somme des extremes, & celle des moyens dans la proportion arithmétique, & le produit des extremes & celui des moyens dans la géométrique, sont toujours des quantités égales.

Des principes qui viennent d'être établis, on tireroit aisément toute la Théorie des Proportions à priori, *au lieu que souvent les démonstrations qu'on donne en cette matiere sont fondées sur l'égalité des extremes & des moyens, qui n'est qu'une propriété, & non l'essence de la proportion. Il suffit d'avoir fait appercevoir le chemin qu'on pourroit prendre, nous ne le suivrons pas plus loin.*

Expression générale de la Progression arithmétique & de la géométrique.

38. Dans la proportion soit arithmétique, soit géométrique, les deux rapports égaux sont celui du 1er terme au 2d, & du 3me au 4me, mais non celui du 2d au 3me. Que s'il étoit égal aux deux autres, la proportion seroit *continue*, & s'appelleroit *progression*, & pourroit comprendre ensuite tant de termes qu'on voudroit.

Donc deux grandeurs étant exprimées par *a* & par $a \overset{+}{\times} m$, une 3me qui auroit même rapport à la 2de, que la 2de à la 1re seroit $a \overset{+}{\times} m \overset{+}{\times} m$, & on aura de même une 4me grandeur, & toujours ainsi de suite. Donc la progression arithmétique sera

$$\div\, a.\ a+m.\ a+2m.\ a+3m, \ \&c.$$

Et la géométrique

$$∺\, a.\ am.\ am^2.\ am^3, \ \&c.$$

Si les deux 1res grandeurs étoient exprimées par *a* & par *b*,

il feroit aifé de réduire b à l'expreffion $a \overset{+}{\times} m$, puifqu'on peut prendre $m = b - a$ (26) ou $m \frac{b}{a}$ (28).

29. Donc en toute progreffion il n'y a que deux grandeurs différentes, a & m, répétées.

40. De ce qu'il n'y a que ces deux grandeurs, & de ce que la progreffion arithmétique fe forme par l'addition continuelle de m au terme précédent, & la géométrique par la multiplication continuelle de m par le terme précédent, il fuit que les Coëfficiens de m dans l'arithmétique, & les Expofans de m dans la géométrique font les mêmes, & de plus font les termes de la Suite naturelle 1, 2, 3, &c.

Comparaifon des deux Progreffions.

41. Donc a & m étant donnés, fi l'on en veut faire une progreffion arithmétique, il n'y a qu'à multiplier m par tous les nombres naturels de fuite, & ajouter toujours a, & fi l'on veut faire une progreffion géométrique, il n'y a qu'à élever m de fuite aux puiffances défignées par ces nombres, & multiplier toujours par a.

42. Dans la progreffion arithmétique a peut être $= 0$, & alors elle eft $\div$ 0. $1m$. $2m$. $3m$, &c. & même afin que m foit dans le 1er terme auffi-bien que dans tous les autres, & qu'en même-temps il foit $= 0$, on peut concevoir que la progreffion eft $\div$ $0m$. $1m$. $2m$, &c.

43. Si a a une autre valeur que 0, 0 peut encore être le 1er terme de la progreffion, pourvû que a foit $= m$. Car alors elle eft $\div$ $1m$. $2m$. $3m$, &c. & par conféquent 0 en peut être le 1er terme (42).

44. Et même il le doit être, fi l'on veut que la progreffion commence d'auffi loin qu'elle le peut.

45. Donc toute progreffion arithmétique, dont le 1er terme différent de 0 eft égal à la différence, peut commencer par 0, & le doit pour commencer d'auffi loin qu'elle le peut. Telle eft la Suite naturelle des nombres.

46. Dans la progreffion géométrique a peut être $= 1$, & alors elle eft $\dot{\dot{\div}}$ 1. m^1. m^2. m^3, &c. c'eft-à-dire, que tous

ſes termes ne ſont que *m* élevé de ſuite à toutes ſes puiſſances excepté le 1er terme 1.

47. Donc toutes les puiſſances conſécutives de quelque grandeur que ce ſoit, ſont en progreſſion géométrique.

48. Donc 1 peut toujours être le 1er terme de ces différentes progreſſions, & doit l'être, afin qu'elles commencent d'auſſi loin qu'elles le peuvent.

49. Et même pour faire que ce 1er terme ſoit auſſi exprimé par *m*, il n'y a qu'à conſidérer que les expoſans de *m* ſont en progreſſion arithmétique naturelle (40), dont par conſéquent le 1er terme eſt 0 (45), & que par conſéquent dans la progreſſion $\div\!\!\div$ 1. m^1. m^2, &c. m^0 doit être immédiatement avant m^1, & par conſéquent $= 1$. Donc le 1er terme 1 ſera exprimé par m^0, comme dans la progreſſion arithmétique $\div$ 0. 1*m*. 2*m*, &c. le 1er terme 0 pour être exprimé par 0*m* (42).

En effet m^3 eſt *m* multipliée deux fois par elle-même, m^2 eſt *m* multipliée une fois par elle-même, m^1 eſt *m* qui n'eſt plus multipliée par elle-même, mais qu'on laiſſe telle qu'elle étoit, & qui par conſéquent n'eſt que *m* multipliée par 1 qui ne multiplie point. Donc m^0 eſt encore d'un degré au-deſſous, par conſéquent eſt une grandeur qui n'eſt abſolument formée par aucune multiplication. Or la ſeule grandeur à laquelle cette idée convienne eſt 1 (15).

50. Donc toute grandeur élevée à la puiſſance 0 eſt 1.

51. Donc 1^0 eſt auſſi $= 1$, & en effet les puiſſances de 1 ne le changent point (14).

52. Si *a* eſt une autre grandeur que 1, 1 peut encore être le 1er terme de la progreſſion géométrique, pourvû que *a* ſoit $= m$. Car alors la progreſſion eſt $\div\!\!\div$ m^1, m^2, &c. & par conſéquent le 1er terme peut être $m^0 = 1$ (49).

53. Si $m = 1$, la progreſſion géométrique eſt toute compoſée de grandeurs égales, & n'eſt plus progreſſion, ou bien ç'en eſt une qui l'eſt le moins qu'il ſe puiſſe. C'eſt la même choſe que ſi dans une progreſſion arithmétique *m* étoit $= 0$.

Maniere de trouver les termes quelconques d'une Progression arithmétique ou géométrique.

54 On voit par la formation des deux progressions $a \begin{smallmatrix}+\\ \times\end{smallmatrix} m$ (38) que leur 3me terme est $a + 2m = a + \overline{m \times 3 - 1}$, ou $am^2 = a \times m^{3-1}$, que le 10me est $a + \overline{m \times 10 - 1}$, ou $a \times m^{10-1}$, & en général le n^{me} $a + \overline{m \times n - 1}$, ou am^{n-1}. Ce qui donne tout d'un coup un terme quelconque de la progression, quand on sait le quantieme il est.

Par exemple, si on demande le 10me terme de la progression géométrique, dont 2 & 3 sont les deux 1ers termes, & où par conséquent $m = \frac{3}{2}$, ce 10me terme est $\frac{3}{2}$ élevé à la puissance $n - 1$, c'est-à-dire, à la 9me, & multiplié par $2 = a$. Donc c'est $\frac{2 \times 3^9}{2^9} = \frac{3^9}{2^8} = \frac{19683}{256} = 76\,\frac{237}{256}$.

On voit par cet exemple que si, outre que la progression sera géométrique, ses deux 1ers termes sont des nombres premiers entre eux, le n^{me} sera $\frac{b^{n-1}}{a^{n-2}}$.

55. Si on a le 1er terme d'une progression quelconque, & un autre b qui ne soit pas le 2^d, on aura toute la progression, pourvû qu'on sache le quantieme est b, ou, ce qui est le même, que l'on connoisse le nombre total des termes n. Car ce n^{me} terme est $a + \overline{m \times n - 1}$, ou am^{n-1} (54), & m est alors un nombre inconnu. Donc dans la progression arithmétique $b = a + \overline{m \times n - 1}$, & par conséquent $\frac{b-a}{n-1} = m$, & dans la géométrique $b = am^{n-1}$, & par conséquent $\sqrt[n-1]{\frac{b}{a}}$ ou $\frac{b^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}} = m$. Or quand on a a & m, on a toute la progression quelconque (39), & il ne faut plus que donner à $\frac{b-a}{n-1} = m$ des Coëfficiens, ou à $\frac{b^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}} = m$ des Exposans

qui soient la suite naturelle des nombres (41). Donc la progression arithmétique sera

$$\div\ a.\ a+\frac{b-a}{n-1}.\ a+\frac{2b-2a}{n-1}.\ a+\frac{3b-3a}{n-1},\ \&c.$$

ou $\div\ a.\ \frac{na+1b-2a}{n-1}.\ \frac{na+2b-3a}{n-1}.\ \frac{na+3b-4a}{n-n}$, &c.

Où l'on voit que si, par exemple, $n=4$, c'est-à-dire, si b doit être le 4[me] terme, $\frac{na+3b-4a}{n-1}$ est $=b$. Car $na-4a=0$. Donc il ne reste que $\frac{3b}{n-1}$. Or ici $3=n-1$. Donc $\frac{3b}{n-1}=b$.

Pareillement la progression géométrique sera

$$\div\!\!\div\ a.\ a\times\frac{b^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}}.\ a\times\frac{b^{\frac{2}{n-1}}}{a^{\frac{2}{n-3}}}.\ a\times\frac{b^{\frac{3}{n-1}}}{a^{\frac{3}{n-1}}}.\ a\times\frac{b^{\frac{4}{n-1}}}{a^{\frac{4}{n-1}}},\ \&c.$$

ou $\div\!\!\div\ a.\ a^{\frac{n-2}{n-1}}\times b^{\frac{1}{n-1}}.\ a^{\frac{n-3}{n-1}}\times b^{\frac{2}{n-1}}.\ a^{\frac{n-4}{n-1}}\times b^{\frac{3}{n-1}}$, &c.

Où l'on voit que si $n=4$, le 4[me] terme $a^{\frac{n-4}{n-1}}\times b^{\frac{3}{n-1}}$ est $=b$. Car $n-4=0$. Donc $a^{\frac{n-4}{n-1}}=a^{\frac{0}{n-1}}$. Or l'exposant $\frac{0}{n-1}$ est $=0$. Donc $a^{\frac{0}{n-1}}=a^0=1$ (50). Donc il ne reste dans ce terme que $b^{\frac{3}{n-1}}$. Or ici $3=n-1$. Donc $b^{\frac{3}{n-1}}=b$.

On voit assez qu'il en ira de même de toute autre valeur qu'on donnera à n dans l'une & dans l'autre progression.

56. Si on veut que b entre dans le premier terme de ces progressions comme dans tous les autres, il est clair par l'analogie perpétuelle de leurs termes que dans l'arithmétique ce premier terme sera $\frac{na+0b-1a}{n-1}=\frac{na-1a}{n-1}=a$, & dans la géométrique $a^{\frac{n-1}{n-1}}\times b^{\frac{0}{n-1}}=a\times 1=a$.

57. On a donné dans l'article 55. à $\frac{b-a}{n-1}$ ou à $\frac{b^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}}$ des Coëfficiens ou des Exposans qui sont la Suite naturelle des nombres, & c'est ainsi qu'on a formé toutes les autres fractions des deux progressions. De-là il suit que dans la progression arithmétique tous les termes ajoutés à a, & dans la géométrique tous les exposans de a, & tous ceux de b sont en progression arithmétique : car ces grandeurs, fractionnaires les unes & les autres, ayant toujours le même dénominateur, ont leurs numérateurs en cette progression. Seulement il est bon de remarquer que dans la progression géométrique les exposans de a sont en progression arithmétique décroissante, & ceux de b en progression arithmétique croissante, & que ces deux progressions arithmétiques ne sont que la même renversée.

Moyens proportionnels en nombre quelconque, appartenans à l'une ou à l'autre Progression.

58. Remplir, comme on a fait dans l'article 55. une progression quelconque dont on a le 1[er] terme, & un autre quelconque b en connoissant n, nombre total des termes, ou introduire entre a & b un nombre n de moyens proportionnels quelconques, c'est la même chose, à cela près que dans la 1[re] opération le nombre total des termes est n, & dans la 2[de] $n+2$; car outre le nombre n de moyens proportionnels, il y a encore les deux extremes a & b. Donc il ne faudra que mettre par-tout au lieu de $n-1$, $n-1+2 = n+1$, & tout se réduira aux articles 55, 56 & 57.

Par exemple, si on cherche 7 moyens arithmétiques entre 3 & 5, l'm ou différence de 3 & de 5 étant 2, celle de la progression sera $\frac{2}{8} = \frac{b-a}{n+1}$, & la progression sera

$\div$ 3. ou (56) $3+\frac{0}{8}$. $3+\frac{2}{8}$. $3+\frac{4}{8}$. $3+\frac{6}{8}$. $3+\frac{8}{8}$. $3+\frac{10}{8}$. $3+\frac{12}{8}$. $3+\frac{14}{8}$. $3+\frac{16}{8}=5$.

Si entre les mêmes extremes on cherche 8 moyens arithmétiques, la progression sera

$\div$ $3+\frac{0}{9}$. $3+\frac{2}{9}$. $3+\frac{4}{9}$. $3+\frac{6}{9}$. $3+\frac{8}{9}$. $3+\frac{10}{9}$.

$3 + \frac{12}{9}.\ 3 + \frac{14}{9}.\ 3 + \frac{16}{9}.\ 3 + \frac{18}{9} = 5.$

Pareillement si on cherche 7 moyens géométriques entre 3 & 5, leur *m* étant $\frac{5}{3}$, celle de la progression sera

$\frac{5^{\frac{1}{8}}}{3^{\frac{1}{8}}} = \frac{b^{\frac{1}{n+1}}}{a^{\frac{1}{n+1}}}$, & la progression sera

$\div 3$ ou (56) $3^{\frac{8}{8}} \times 5^{\frac{0}{8}}.\ 3^{\frac{7}{8}} \times 5^{\frac{1}{8}}.\ 3^{\frac{6}{8}} \times 5^{\frac{2}{8}}.\ 3^{\frac{5}{8}} \times 5^{\frac{3}{8}}.$
$3^{\frac{4}{8}} \times 5^{\frac{4}{8}}.\ 3^{\frac{3}{8}} \times 5^{\frac{5}{8}}.\ 3^{\frac{2}{8}} \times 5^{\frac{6}{8}}.\ 3^{\frac{1}{8}} \times 5^{\frac{7}{8}}.\ 3^{\frac{0}{8}} \times 5^{\frac{8}{8}} = 5.$

Si on cherche entre les mêmes extremes 8 moyens géométriques, la progression sera

$\div 3^{\frac{9}{9}} \times 5^{\frac{0}{9}}.\ 3^{\frac{8}{9}} \times 5^{\frac{1}{9}}.\ 3^{\frac{7}{9}} \times 5^{\frac{2}{9}}.\ 3^{\frac{6}{9}} \times 5^{\frac{3}{9}}.\ 3^{\frac{5}{9}} \times 5^{\frac{4}{9}}.$
$3^{\frac{4}{9}} \times 5^{\frac{5}{9}}.\ 3^{\frac{3}{9}} \times 5^{\frac{6}{9}}.\ 3^{\frac{2}{9}} \times 5^{\frac{7}{9}}.\ 3^{\frac{1}{9}} \times 5^{\frac{8}{9}}.\ 3^{\frac{0}{9}} \times 5^{\frac{9}{9}} = 5.$

59. Il entre dans les progressions de ces exemples des fractions qui se peuvent réduire à de moindres termes. Elles sont toutes réductibles dans la 1re progression arithmétique, & elle devient.

Moyens proportionnels réductibles ou irréductibles.

$\div 3 + \frac{0}{4}.\ 3 + \frac{1}{4}.\ 3 + \frac{2}{4}.\ 3 + \frac{3}{4}.\ 3 + \frac{4}{4}.\ 3 + \frac{5}{4}.\ 3 + \frac{6}{4}.$
$3 + \frac{7}{4}.\ 3 + \frac{8}{4}.$

Celle-ci a encore des fractions réductibles qui sont $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{4}{4} = 1$, $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, $\frac{8}{4} = 2$. Si ces fractions peuvent être en progression arithmétique, les termes dans lesquels elle entroient, étant toujours ajoutés au 1er terme seront encore en cette progression (41), & par conséquent il y aura entre les mêmes extremes une nouvelle progression arithmétique composée d'un moindre nombre de termes, puisquelle n'aura que quelques-uns de ceux qu'avoit la premiere. Or telles sont ces fractions, car sans changer leur valeur, elles deviendront $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{4}{4} = 1 = \frac{2}{2}$, $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, $\frac{8}{4} = \frac{4}{2}$, où l'on voit que leur dénominateur 2 étant le même, leurs numérateurs 1, 2, 3, 4, sont en progression arithmétique. Et comme le 1er terme $3 + \frac{0}{4}$ est $= 3 + \frac{0}{2}$, & qu'en général le numérateur de sa fraction étant toujours o, le dénominateur est tel nombre

que l'on veut, la nouvelle progreſſion ſera $\div\, 3 + \frac{0}{2}.\ 3 + \frac{1}{2}.\ 3 + \frac{2}{2}.\ 3 + \frac{3}{2}.\ 3 + \frac{4}{2} = 5$. Et il n'y a plus que 3 moyens proportionnels au lieu de 7 qu'il y avoit, & 5 termes en tout au lieu de 9.

Et comme dans cette nouvelle progreſſion $\frac{0}{2}$, $\frac{2}{2}$ & $\frac{4}{2}$ ſont encore réductibles, de maniere que leur dénominateur ſera le même, & leurs numérateurs en progreſſion arithmétique, car $\frac{0}{2} = \frac{0}{1}$, $\frac{2}{2} = \frac{1}{1}$, $\frac{4}{2} = \frac{2}{1}$, il ſe fera la nouvelle progreſſion $\div\, 3 + \frac{0}{1}$, $3 + \frac{1}{1}\ 3 + \frac{2}{1}$ ou 3. 4. 5.

Quant aux fractions irréductibles de la premiere progreſſion, qui ſont $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$, il eſt bien vrai qu'elles ſont en progreſſion arithmétique entr'elles : mais elles n'y peuvent être ni avec $\frac{0}{4}$, ni avec $\frac{8}{4}$, fractions extremes, & par conſéquent les termes affectés des fractions $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$ ne peuvent être moyens arithmétiques entre $3 + \frac{0}{4} = 3$, & $3 + \frac{8}{4} = 5$ ſelon une progreſſion compoſée de moins de 9 termes.

On voit donc, non par cet exemple particulier ſeulement, mais par la nature générale de la choſe, que ſi les termes d'une progreſſion arithmétique compriſe entre deux extremes déterminés *a* & *b*, ſont tous affectés de fractions réductibles qui ſoient encore après la réduction en progreſſion arithmétique, la progreſſion demeure la même, & conſerve le même nombre de termes; que s'il n'y a que quelques termes dont les fractions ſoient réductibles, il faut afin qu'il y ait encore une progreſſion compriſe entre *a* & *b*, 1° que *a* & *b*, ou, pour parler plus exactement, *b* ſoit du nombre des termes dont les fractions ſont réductibles, car *a* en eſt toujours, 2° que toutes les fractions étant réduites, ſoient en progreſſion arithmétique. Moyennant ces deux conditions il y aura une nouvelle progreſſion compriſe entre les mêmes extremes *a* & *b*, & compoſée d'un moindre nombre de termes.

Ce doit être le même raiſonnement à l'égard des fractions qui ſont les expoſans des termes de la progreſſion géométrique, car les expoſans de *a* pris de ſuite, & de même ceux de *b* ſont en progreſſion arithmétique (57). Donc les termes moyens de la progreſſion géométrique affectés de fractions

ou

ou expoſans réductibles pourront encore être moyens entre les mêmes extrêmes ſelon une progreſſion compoſée d'un moindre nombre de termes, pourvû que les expoſans de ceux qui compoſent la nouvelle progreſſion, ſoient une progreſſion arithmétique.

Ainſi dans la 1re progreſſion géométrique de l'art. 58. $3^{\frac{6}{8}} \times 5^{\frac{2}{8}} = 3^{\frac{3}{4}} \times 5^{\frac{1}{4}}$. $3^{\frac{4}{8}} \times 5^{\frac{4}{8}} = 3^{\frac{2}{4}} \times 5^{\frac{2}{4}}$. $3^{\frac{2}{8}} \times 5^{\frac{6}{8}} = 3^{\frac{1}{4}} \times 5^{\frac{3}{4}}$ ſont des termes moyens dont les expoſans étoient réductibles, mais de plus ceux de 3 & ceux de 5 ſont entr'eux une progreſſion arithmétique, & enfin les deux extrêmes $3^{\frac{8}{8}} \times 5^{\frac{0}{8}}$ & $3^{\frac{0}{8}} \times 5^{\frac{8}{8}}$ étant réduits à $3^{\frac{4}{4}} \times 5^{\frac{0}{4}}$, & à $3^{\frac{0}{4}} \times 5^{\frac{4}{4}}$, la progreſſion arithmétique des expoſans ſubſiſte toujours; d'où il ſuit que $3^{\frac{3}{4}} \times 5^{\frac{1}{4}}$, $3^{\frac{2}{4}} \times 5^{\frac{2}{4}}$, $3^{\frac{1}{4}} \times 5^{\frac{3}{4}}$ ſont trois termes qui peuvent être moyens geométriques entre $3 = 3^{\frac{4}{4}} \times 5^{\frac{0}{4}}$ & $5 = 3^{\frac{0}{4}} \times 5^{\frac{4}{4}}$ dans une progreſſion compoſée ſeulement de 5 termes, au lieu que la premiére ou ils entroient l'étoit de 9.

Il eſt clair que dans cette nouvelle progreſſion $3^{\frac{2}{4}} \times 5^{\frac{2}{4}}$ a encore un expoſant réductible; que de plus les deux extrêmes ont auſſi les leurs réductibles; que les expoſans de ces 3 termes feront une progreſſion arithmétique, & que les 3 termes feront $3^{\frac{2}{2}} \times 5^{\frac{0}{2}}$. $3^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}}$. $3^{\frac{0}{2}} \times 5^{\frac{2}{2}}$, ou 3. $3^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}}$. 5.

60. Tout moyen proportionnel unique entre a & b a $\frac{1}{2}$ pour Coëfficient s'il eſt arithmétique, & pour Expoſant s'il eſt géométrique. Car alors $n = 1$, & $n + 1 = 2$. Donc le moyen proportionnel arithmétique entre a & b eſt $a + \frac{b - a}{2} = a + \frac{1}{2} b - \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b$, & le geométrique eſt

$a \times \frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}}$, ou $\sqrt{ab}$. Donc dans un nombre quelconque de moyens proportionnels quelconque entre a & b, il ne se pourra trouver de terme qui soit le même que ce moyen proportionnel unique, à moins qu'il n'y en ait un affecté d'une fraction réductible à $\frac{1}{2}$. Or si n est un nombre pair, $n + 1$ sera impair, & par conséquent nulle fraction ne pourra se réduire à $\frac{1}{2}$. Donc si le nombre de moyens proportionnels quelconques entre a & b est pair, il n'y en aura aucun qui soit le même que le moyen proportionnel unique entre a & b, & au contraire il y en aura un qui sera le terme du milieu, si n est impair. On en voit des exemples dans les deux progressions tant arithmétiques que géométriques de l'art. 58.

61. Un nombre quelconque de moyens proportionnels quelconques étant introduits entre a & b, il n'y en a aucuns qui puissent être moyens entre les mêmes extrêmes selon une progression composée d'un moindre nombre de termes, que ceux dont les fractions sont reductibles avec certaines conditions (59). Donc si toutes les fractions sont absolument irréductibles, il n'y aura aucuns termes moyens qui puissent l'être entre les mêmes extrêmes selon une progression composée d'un moindre nombre de termes. Or si $n + 1$ dénominateur perpetuel de toutes les fractions, est un nombre premier, toutes les fractions seront irréductibles. Donc en ce cas-là aucun des termes moyens entre a & b ne pourra l'être entre les mêmes extrêmes selon une progression composée d'un moindre nombre de termes. Par exemple, si on prend 12 moyens proportionnels quelconques entre a & b, on sera sûr, parce que $n + 1 = 13$ est un nombre premier, qu'aucun de ces 12 termes moyens ne sera moyen entre a & b selon une progression, qui n'auroit que 11 termes moyens, ou 13 en tout, ou 12 en tout, ou 11, ou, 10, &c.

62. Donc à chaque fois qu'on introduit entre a & b un nombre n de moyens proportionnels quelconques, tel que

$n+1$ soit nombre premier, on a des termes moyens différens de tous ceux qui, étant en moindre nombre, seroient moyens aussi entre a & b. C'est-à-dire, que la Suite des nombres premiers étant 1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, &c. si on introduit successivement entre a & b, 2 moyens proportionnels quelconques, ou 4, ou 6, ou 10, ou 12, ou 16, &c. on aura toujours des termes moyens différens, & non seulement tous différens dans les différentes opérations, mais encore différens de ceux qu'on auroit eus, en introduisant entre a & b ou 1, ou 3, ou 5, ou 7, ou 8, ou 9, ou 11, ou 13, ou 14, ou 15, &c. termes moyens.

63. Quand on a introduit entre a & b un nombre n de moyens proportionnels quelconques, on a vû par les raisonnemens & par les opérations des art. 55, 57 & 58, que tout se réduisoit à diviser le rapport arithmétique $b - a$ ou le geométrique $\frac{b}{a}$ de a & de b en un nombre $n+1$ de partie, dont la 1[re] étoit $\frac{b-a}{n+1}$, ou $\frac{b^{\frac{1}{n+1}}}{a^{\frac{1}{n+1}}}$, la 2[de] $\frac{2b-2a}{n+1}$ ou $\frac{b^{\frac{2}{n+1}}}{a^{\frac{2}{n+1}}}$ &c. & que toutes ces parties ajoûtées à a, ou multipliées par a, formoient la progression cherchée. Or, toutes ces parties $\frac{b-a}{n+1}$, $\frac{2b-2a}{n+1}$, &c. ont le même rapport arithmétique, & toutes les $\frac{b^{\frac{1}{n+1}}}{a^{\frac{1}{n+1}}}$, $\frac{b^{\frac{2}{n+1}}}{a^{\frac{2}{n+1}}}$, &c. ont le même rapport géométrique. Donc le rapport arithmétique $b-a$, & geométrique $\frac{b}{a}$ ont été divisés l'un & l'autre en parties égales, dont le nombre est $=n+1$, l'un en parties arithmétiquement égales, & l'autre en parties géométriquement égales.

Comparaison des divisions du même intervalle par une Progression arithmétique, & une géométrique correspondante.

64. Des grandeurs croissantes, comme on les suppose ici, ne peuvent avoir le même rapport arithmétique, ou la même

différence qu'elles n'aient toujours un moindre rapport géométrique : car cette différence constante qu'on leur ajoûte toujours, est toujours moindre par rapport à elles à mesure qu'elles croissent, & par conséquent elles approchent toujours davantage de l'égalité selon le rapport géométrique, ou, ce qui revient au même, ont un moindre rapport géométrique. Cela se voit dans la Suite naturelle des nombres. Au contraire des grandeurs croissantes ne peuvent avoir le même rapport géométrique qu'elles n'aient toujours un plus grand rapport arithmétique ou une plus grande différence, ce qui est clair. Donc le rapport arithmétique de *a* & de *b* divisé en parties arithmétiquement égales (63) l'est en même temps en parties géométriquement inégales & décroissantes, & le rapport géométrique de *a* & de *b* divisé en parties géométriquement égales (63) l'est en même temps en parties arithmétiquement inégales & croissantes.

65. Si on introduit entre *a* & *b* le moyen arithmétique $\frac{a+b}{2}$ & le géométrique $\sqrt{ab}$ on a toujours $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$, car le rapport arithmétique de *a* & de *b* étant divisé en deux parties arithmétiquement égales par $\frac{a+b}{2}$, & en deux parties arithmétiquement inégales & croissantes par $\sqrt{ab}$ (64), $\sqrt{ab}$ a une moindre différence à *a* que $\frac{a+b}{2}$, & une plus grande différence à *b*, & par conséquent est moindre que $\frac{a+b}{2}$.

66. Et comme une progression soit arithmétique, soit géométrique de 3 termes, represente toutes celles qui auroient un plus grand nombre de termes, & que visiblement le même raisonnement y aura lieu, il suit qu'une progression arithmétique & une géométrique composées d'un même nombre quelconque de termes, étant comprises entre les mêmes extrêmes, chaque terme moyen de la géométrique sera plus petit que son correspondant dans l'arithmétique.

Somme de la progression

67. Donc la somme de la progression géométrique est moindre que celle de l'aritmétique.

géométrique, moindre que celle de l'arithmétique.

68. Toute progression géométrique étant $\div\!\div a.\ am.\ am^2.\ am^3$, &c. (38), les différences de ses termes sont $\overline{am - a}$. $\overline{am^2 - am} = \overline{am - a} \times m$. $\overline{am^3 - am^2} = \overline{am - a} \times m^2$, &c. où l'on voit que c'est toujours la même grandeur $am - a$, différence des deux 1ers termes, qui est multipliée de suite par toutes les puissances de m, comme a l'étoit dans la progression $\div\!\div a.\ am$, &c. Donc les différences des termes d'une progression géométrique sont aussi en progression géométrique, & en même progression que les termes dont elles sont différences, puisque les deux progressions ont le même multiplicateur perpetuel m.

69. Puisque les différences des termes d'une progression géométrique font une seconde progression géométrique qui a le même multiplicateur m que la premiére (68), les différences de ces différences feront une troisiéme progression qui aura encore le même multiplicateur m, & toujours ainsi de suite tant qu'il y aura des différences de différences; car la progression des premiéres différences ayant nécessairement un terme de moins que la progression des termes dont elles sont différences, la progression des secondes différences encore un terme de moins, & toujours ainsi de suite, il viendra à la fin une progression de trois termes seulement, après laquelle il n'y en pourra plus avoir.

70. Comme on ne peut introduire entre a & b un terme moyen qui soit arithmétiquement plus éloigné de a & de b en même temps que celui qui est précisément au milieu, ou le moyen arithmétique: de même on ne peut introduire entre a & b aucun terme moyen qui soit plus grand par rapport à a, & en même temps plus petit par rapport à b, que le moyen géométrique; car il est plus grand que l'un dans la même raison qu'il est plus petit que l'autre, & par conséquent tout autre terme x, s'il est plus grand par rapport à a, ne sera pas si petit par rapport à b, & s'il est plus petit par rapport à b, ne sera pas si grand par rapport à a. Et comme une progression de 3 termes les represente toutes, il s'ensuit que dans

une progreſſion géométrique quelconque chaque terme moyen eſt plus grand par rapport à celui qui le précede, & en même temps plus petit par rapport à celui qui le ſuit, que chaque terme moyen ne le ſeroit dans toute autre Suite compriſe entre les mêmes extremes, compoſée du même nombre de termes, & qui ne ſeroit point une progreſſion géométrique.

71. Les différences des termes d'une progreſſion géométrique ſont auſſi en progreſſion, & en même progreſſion (68). Donc chacune de ces différences eſt plus grande par rapport à celle qui la precéde, & plus petite par rapport à celle qui la ſuit, que ne ſeroient les différences des termes de toute autre Suite. Donc la progreſſion géométrique eſt celle de toutes les Suites dont les termes ont les différences les plus inégales, au lieu que l'arithmétique eſt la ſeule de toutes les Suites qui les a toutes égales.

On voit aſſez que la plus grande inégalité poſſible des différences des termes d'une progreſſion géométrique doit s'entendre du *tout pris enſemble*; c'eſt-à-dire, que ſi quelqu'autre Suite a quelques termes qui aient des différences plus inégales, elle en aura d'autres qui auront des différences moins inégales.

72. Donc la différence $b - a$, ou l'intervalle arithmétique qui eſt entre a & b, étant diviſé également par la progreſſion arithmétique, l'eſt le plus inégalement qu'il ſe puiſſe dans ſon tout par la géométrique : & il eſt bon de remarquer que comme pour une progreſſion on ne ſauroit prendre moins de 3 grandeurs, ici on ne ſauroit prendre moins de 3 parties de l'intervalle ſuppoſé, & que par conſéquent on doit concevoir entre a & b, 2 termes moyens pour le moins. Si pour ſe faire une image ſenſible, on ſe repréſente cet intervalle comme une ligne où ſoient marqués les points de diviſion réſultans des deux propreſſions, & les nombres correſpondans à ces points, la ligne diviſée également par la progreſſion arithmétique, le ſera le plus inégalement qu'il ſe puiſſe par la géométrique, ou, ce qui revient au même, les points de diviſion également diſtans dans l'arithmétique, le ſeront

le plus inégalement qu'il se puisse dans la géométrique, les points de division de l'une & de l'autre progression ne se rencontreront jamais, ils seront dans la géométrique plus serrés vers l'origine, & plus écartés vers l'extrémité ; de sorte que si l'on conçoit la ligne divisée par le milieu, la progression arithmétique aura de part & d'autre un nombre égal de points de division, ou de termes; & la géométrique un plus grand nombre du côté de *a* que de *b*, & par conséquent un plus grand nombre de *petits* termes, les petits étant ceux qui sont moindres que le moyen arithmétique, ce qui revient à ce que la somme de la progression géométrique est moindre (67).

73. Donc la progression arithmétique & la géométrique sont entre toutes les Suites possibles celles qui sont les plus opposées par rapport à la division de l'intervalle commun. *Division de l'intervalle commun, la plus inégale qu'il se puisse par la progression géométrique.*

74. Toute progression géométrique en enferme une arithmétique, qui est celle des exposans de *m*, & si la progression géométrique n'est formée, comme elle peut l'être, que des puissances de m, m^0, m^1, m^2, &c. Cette progression sera en même temps l'arithmétique des exposans de *m*, & la géométrique des puissances de *m* ; de sorte que le rapport arithmétique égal des exposans, representera perpetuellement le géométrique égal des puissances. De là il suit qu'à tous les changemens qui pourront arriver aux exposans, il répondra des changemens analogues dans les puissances ; c'est-à-dire, que si, par exemple, on double, on triple, &c. les exposans, on quarrera, on cubera, &c. les puissances ; que si on divise les exposans par 2, par 3, &c. on tirera la $\sqrt[2]{}$, ou $\sqrt[3]{}$ &c. des puissances.

75. Si l'on conçoit une progression géométrique qui ne soit formée que de m^1 toujours répeté, & qui par conséquent ne sera progression que le moins qu'il se puisse, l'exposant 1 constant representera le rapport géométrique constant des grandeurs : mais si on divise de suite tous les exposans 1 par 1, 2, 3, &c. on aura la Suite $m^{\frac{1}{1}}$, $m^{\frac{1}{2}}$, $m^{\frac{1}{3}}$, où le rapport arithmétique des exposans $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. représentera encore

le rapport géométrique des grandeurs m^1, $m^{\frac{1}{2}}$, $m^{\frac{1}{3}}$, &c. Et puiſque 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. ont un rapport arithmétique inégal & décroiſſant, m^1, $m^{\frac{1}{2}}$, $m^{\frac{1}{3}}$, &c. en auront un géométrique pareil, & par conſéquent approcheront toujours de plus en plus de l'égalité.

76. Si on éleve $m^{\frac{1}{2}}$, ou $m^{\frac{1}{3}}$, ou en général $m^{\frac{1}{n}}$, à toutes ſes puiſſances de ſuite, ce qui donnera $m^{\frac{1}{n}}$, $m^{\frac{2}{n}}$, $m^{\frac{3}{n}}$, &c. il eſt viſible que les expoſans redeviennent en progreſſion arithmétique : auſſi la progreſſion $m^{\frac{1}{n}}$, $m^{\frac{2}{n}}$, $m^{\frac{3}{n}}$, &c. eſt-elle géométrique.

Somme de la progreſſion arithmétique quelconque.

77. Pour avoir la ſomme de tous les termes d'une progreſſion arithmétique qui en a 10, par exemple, il n'y a qu'à conſidérer que les ſommes du 1er & du 10me, du 2d & du 9me, &c. ſont égales; que toutes ces ſommes enſemble ſont la ſomme de la progreſſion; que le nombre de ces ſommes eſt égal à la moitié du nombre des termes de la progreſſion; & que par conſéquent une de ces ſommes quelconque, comme celle du 1er & du 10me terme, multipliée par la moitié du nombre des termes eſt égale à la ſomme de la progreſſion. Le nombre des termes étant n, le dernier terme eſt $a + m \times \overline{n - 1}$ (54). Donc la ſomme du 1er & du dernier eſt $2a + m \times \overline{n - 1}$, & celle de toute la progreſſion eſt $\overline{2a + m \times \overline{n - 1}} \times \frac{n}{2}$.

Dans la progreſſion naturelle où $a = 1 = m$, la ſomme eſt $\overline{2 + n - 1} \times \frac{n}{2} = \overline{n + 1} \times \frac{n}{2} = \frac{nn + n}{2}$. Par exemple, celle des 10 premiers nombres eſt $\frac{100 + 10}{2} = 55$.

Somme de la géométrique.

78. On ſait, & il ſeroit aiſé de le prouver par tout ce qui a été dit, que dans une progreſſion géométrique, la ſomme de tous les *antécédens* eſt à celle de tous les *conſéquens* comme un

un antécédent quelconque à ſon conſéquent. Or dans une progreſſion, tous les termes étant alternativement antécédens & conſéquens, horſmis le premier qui n'eſt qu'antécédent, & le dernier qui n'eſt que conſéquent, la ſomme de tous les antécédens dans ∺ $a.\ am.\ am^2.\ am^3$, &c. am^{n-1} ſera la ſomme totale inconnue de tous les termes, que j'appelle $ſ$, moins le dernier terme, c'eſt-à-dire, $ſ - am^{n-1}$. De même la ſomme des conſéquens ſera $ſ - a$. Donc $ſ - am^{n-1}.\ ſ - a :: a.\ am :: 1.\ m$. Donc $ſm - am^n = ſ - a$. Donc $ſm - ſ = am^n - a$. Donc $ſ = \frac{am^n - a}{m - 1}$.

Par exemple, ſi $a = 2$, $m = 3$, $n = 4$, ce qui donne la progreſſion ∺ 2. 6. 18. 54. La ſomme $\frac{am^n - a}{m - 1}$ eſt

$$\frac{\overline{2 \times 3^4} - 2}{2} = \frac{\overline{2 \times 81} - 2}{2} = \frac{160}{2} = 80.$$

Si a & n demeurant les mêmes, $m = \frac{1}{3}$, ce qui donne la progreſſion décroiſſante ∺ 2. $\frac{2}{3}$. $\frac{2}{9}$. $\frac{2}{27}$, la ſomme eſt

$$\frac{2 \times \frac{1}{3^4} - 2}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{\frac{2}{81} - 2}{\frac{1}{3}} = \frac{2 - 162}{81} \text{ diviſé par } -\frac{2}{3} =$$

$$\frac{-160 \times 3}{-81 \times 2} = \frac{480}{162} = 2\frac{26}{27}.$$

Si m eſt une fraction dont on tire quelque racine comme dans les deux progreſſions géométriques de l'art. 58. dont je prends la 1re, où $m = \frac{5^{\frac{1}{8}}}{3^{\frac{1}{8}}}$, & $n = 9$, la ſomme ſera

$\frac{3 \times 5^{\frac{9}{8}}}{3^{\frac{9}{8}}} - 3$ diviſé par $\frac{5^{\frac{1}{8}}}{3^{\frac{1}{8}}} - 1$. Or $\frac{3 \times 5^{\frac{9}{8}}}{3^{\frac{9}{8}}} = 3^{-\frac{1}{8}}$

$\times 5^{\frac{9}{8}} = \frac{5^{\frac{9}{8}}}{3^{\frac{1}{8}}}$. Donc $\frac{3 \times 5^{\frac{9}{8}}}{3^{\frac{9}{8}}} - 3 = \frac{5^{\frac{9}{8}} - 3^{\frac{9}{8}}}{3^{\frac{1}{8}}}$. D'un

autre côté le diviseur $\frac{5^{\frac{1}{8}}}{3^{\frac{1}{8}}} - 1 = \frac{5^{\frac{1}{8}} - 3^{\frac{1}{8}}}{3^{\frac{1}{8}}}$. Donc la somme est $\frac{5^{\frac{9}{8}} - 3^{\frac{9}{8}}}{3^{\frac{1}{8}}} \times \frac{3^{\frac{1}{8}}}{5^{\frac{1}{8}} - 3^{\frac{1}{8}}} = \frac{5^{\frac{9}{8}} - 3^{\frac{9}{8}}}{5^{\frac{1}{8}} - 3^{\frac{1}{8}}}$.

5^9 étant $= 1953125$ dont la $\sqrt[8]{}$ est un peu plus de 6, & 3^9 étant $= 19683$ dont la $\sqrt[8]{}$ est un peu plus de 3, il suit que $5^{\frac{9}{8}} - 3^{\frac{9}{8}}$ est à peu près 3, & cette grandeur ayant un diviseur, il semble qu'elle doive encore devenir moindre. Cependant dans cette progression la somme des deux extrêmes 3 & 5 est 8, & elle est encore beaucoup augmentée par celle des 7. moyens proportionnels. Mais aussi $5^{\frac{1}{8}} - 3^{\frac{1}{8}}$ est une fraction, quoiqu'elle n'en ait pas la forme, & par conséquent elle augmente la grandeur qu'elle divise. Car $5^{\frac{1}{8}}$ est plus grand que $1 = 1^{\frac{1}{8}}$, & moindre que 2 dont la puissance 8me est 256. $3^{\frac{1}{8}}$ est aussi plus grand que 1, & à plus forte raison moindre que 2. Donc quand de $5^{\frac{1}{8}}$ on retranche $3^{\frac{1}{8}}$, on en retranche plus que 1, & puisque $5^{\frac{1}{8}}$ & $3^{\frac{1}{8}}$ sont l'un & l'autre moindres que 2, le reste que donne la soustraction ou $5^{\frac{1}{8}} - 3^{\frac{1}{8}}$ est moindre que 1, & par conséquent une fraction, mais cette fraction est inconnuë, du moins exactement.

On la peut appeller $\frac{1}{x}$ & la somme de cette progression sera $\overline{5^{\frac{9}{8}} - 3^{\frac{9}{8}}} \times x$.

Rapport de ces sommes. 79. Pour avoir par le calcul le rapport de la somme A d'une progression arithmétique à la somme G d'une géométrique, ou plutôt les deux sommes ensemble, les deux progressions ayant les mêmes extremes a & b, & le même nombre n de termes, il faut considérer que dans $2a + \overline{m} \times \overline{n - 1}$

$\times \frac{n}{2}$ Formule de A (77) & dans $\frac{am^n - a}{m - 1}$ Formule de G (78) m étant différent de part & d'autre, il doit être réduit à la même expression, ce qui se fera en prenant dans A, $m = \frac{b - a}{n - 1}$, & dans G, $m = \frac{b^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}}$ (55).

On a donc d'une part $\overline{2a + m \times \overline{n - 1}} \times \frac{n}{2} = \overline{2a + \frac{b - a}{n - 1} \times \overline{n - 1}} \times \frac{n}{2} = \overline{a + b} \times \frac{n}{2} = \frac{an + bn}{2}$. Et de l'autre $\frac{am^n - a}{m - 1} = \frac{b^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{b^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$.

Donc $A . G :: \frac{an + bn}{2} . \frac{b^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{b^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$.

$:: \frac{\overline{an + bn} \times \overline{b^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}}{2} . b^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}$.

Par exemple, si $a = 1$, $b = 8$, & $n = 4$, on a $\frac{\overline{an + bn} \times \overline{b^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}}{2} = \frac{36 \times \overline{8^{\frac{1}{3}} - 1}}{2} = 18$, & $b^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}} = 8^{\frac{4}{3}} - 1$. Or 8 étant $= 2^3$, on a $8^{\frac{4}{3}} = 2^{\frac{12}{3}} = 2^4 = 16$, dont ensuite il faut retrancher 1. Donc $A . G :: 18 . 15$, qui sont en effet les sommes des 2. progressions.

80. Si n demeurant le même, b devient plus grand par rapport à a, A devient plus grande par rapport à G. Car $A = \frac{an + bn}{2}$ augmente par l'augmentation de b, sans qu'il lui arrive d'ailleurs aucune diminution, & $G = \frac{b^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{b^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$

eſt telle que ſon numérateur augmente par l'augmentation de b, & ſon dénominateur auſſi, & par conſéquent G ne fait que ſe maintenir à peu-près comme elle étoit, & n'augmente pas à proportion de A. Donc plus b ſera grand, n demeurant le même, plus A l'emportera ſur G.

81. Si a & b demeurant les mêmes, n augmente, A augmente abſolument, & dans G la grandeur $b^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}$ en approche toujours plus d'être $b - a$, & $b^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}$ d'être $b^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}}$, & alors la différence de $b^{\frac{1}{n}}$ à $a^{\frac{1}{n}}$ eſt très-petite, d'où il ſuit que G eſt fort grande. Donc l'augmentation de b par rapport à a, augmente plus le rapport de A à G, que l'augmentation de n.



SECTION II.

De la Grandeur infiniment grande.

82. CE qui par ſon eſſence eſt ſuſceptible de plus & de moins, ne perd rien de ſon eſſence en recevant ce plus ou ce moins dont il étoit ſuſceptible. Or la grandeur eſt par ſon eſſence ſuſceptible de plus & de moins (1.) Donc elle ne perd rien de ſon eſſence en recevant ce plus ou ce moins, donc elle eſt encore grandeur, donc encore également ſuſceptible de plus & de moins, donc elle en eſt toujours ſuſceptible; donc elle l'eſt ſans fin, ou à l'infini. *Ce que c'eſt que l'Infini.*

Examinons la grandeur entant que ſuſceptible d'augmentation.

83. Puiſque la grandeur eſt ſuſceptible d'augmentation ſans fin, on la peut concevoir ou ſuppoſer augmentée une infinité de fois, c'eſt-à-dire qu'elle ſera devenue infinie. Et en effet, il eſt impoſſible que la grandeur ſuſceptible d'augmentation ſans fin ſoit dans le même cas que ſi elle n'en étoit pas ſuſceptible ſans fin. Or ſi elle ne l'étoit pas, elle demeureroit toujours finie; donc étant ſuſceptible d'augmentation ſans fin, elle peut ne demeurer pas toujours finie, ou, ce qui eſt le même, devenir infinie.

84. Pour mieux concevoir l'Infini, je conſidere la Suite naturelle des nombres, dont l'origine eſt 0 ou 1.

Chaque terme croît toujours d'une unité, & je vois que cette augmentation eſt ſans fin, & que quelque grand que ſoit le nombre où je ſerai arrivé, je n'en ſuis pas plus proche de la fin de la Suite, ce qui eſt un caractere qui ne peut convenir à une Suite dont le nombre des termes ſeroit fini. Donc la Suite naturelle a un nombre de termes infini.

En vain diroit-on que le nombre des termes qui la compoſent eſt toujours actuellement fini; mais que je le puis toujours augmenter. Il eſt bien vrai que le nombre des termes

que je puis actuellement parcourir ou arranger ſelon leur ordre, eſt toujours fini; mais le nombre des termes dont la Suite eſt compoſée en elle-même, eſt autre choſe. Les termes dont elle eſt compoſée en elle-même, exiſtent tous également, & ſi je la conçois pouſſée ſeulement juſqu'à 100, je ne donne pas à ces 100. termes une exiſtence dont ſoient privés tous ceux qui ſont par de-là. Donc tous les termes de la Suite, quoiqu'ils ne puiſſent pas être tous embraſſés ou conſiderés enſemble par mon eſprit, ſont également réels. Or le nombre en eſt infini, comme on vient de le prouver, donc un nombre infini exiſte auſſi réellement que les nombres finis.

85. Dans la ſuite naturelle chaque terme eſt égal au nombre des termes qui ſont depuis 1. juſqu'à lui incluſivement. Donc puiſque le nombre de tous ſes termes eſt infini (84), elle a un dernier terme qui eſt ce même infini.

On l'exprime par ce caractere ∞.

Il ne faut point que le mot de *dernier terme* effraie en cette matiere. C'eſt un dernier terme fini que la Suite naturelle n'a point: mais n'en avoir point de dernier fini, ou en avoir un dernier infini, c'eſt la même choſe; car ce qui fait qu'elle n'a pas un dernier terme fini, c'eſt que quand elle a un terme fini quelconque, ſon cours n'eſt, ni ne peut être terminé, puiſqu'elle n'a encore qu'un nombre fini de termes; mais quand elle a un terme infini, elle a un nombre infini de termes, & l'on peut concevoir ſon cours comme terminé.

86. ∞ eſt un nombre inexprimable, car il s'en faut bien que ce caractere ∞ nous en donne une idée claire. Mais en même temps ∞ eſt en quelque ſorte un nombre déterminé, ou diſtingué de tout autre, puiſqu'il l'eſt non ſeulement de tout nombre fini; mais en cas qu'il y ait d'autres Infinis poſſibles, de tout Infini qui ne ſeroit pas le dernier terme de la Suite naturelle, ou ſeroit le dernier d'une autre Suite infinie. Ainſi ∞ ſera toujours pris ici pour un Infini fixe & conſtant, dernier terme de la Suite naturel.

Il eſt inconcevable comment la Suite naturelle paſſe du Fini à l'Infini, c'eſt-à-dire, comment après avoir eu des

termes finis, elle vient à en avoir un infini. Cependant cela doit être, ou bien il faut abſolument abandonner toute idée de l'Infini, & n'en prononcer jamais le nom, ce qui feroit périr la plus grande & la plus noble partie des Mathématiques. Je ſuppoſe donc que c'eſt là un fait certain, quoiqu'incompréhenſible, & je prends la grandeur qui doit être infinie, non comme étant dans ce paſſage obſcur du Fini à l'infini; mais comme l'ayant franchi entierement, & ayant paſſé par les degrés néceſſaires, quels qu'ils ſoient, ſi ce n'eſt que je puiſſe quelquefois entrevoir quelque lumiere ſur la nature de ces degrés.

Comment l'Infini peut être augmenté ou diminué.

87. L'idée naturelle de la grandeur infinie eſt, qu'elle ne puiſſe être plus grande ou augmentée, & en effet ∞ dernier terme de la Suite naturelle étant 1. qui a reçu des augmentations ſans fin, il n'en peut recevoir d'avantage. D'un autre côté la grandeur infinie étant toujours grandeur, en doit conſerver l'eſſence, & être ſuſceptible d'augmentation (1) & même ſans fin (82). Ces deux idées ſi contraires en apparence, ſe concilient parfaitement, & on le va voir en les examinant toutes deux l'une après l'autre.

∞ ne peut plus être augmenté par les grandeurs qui l'avoient augmenté juſques-là, car il a reçu d'elles tout ce qu'il pouvoit recevoir d'augmentation. Donc $\infty + 1$ n'eſt que ∞, ou $\infty + 1 = \infty$.

88. Et ſi 1 n'augmente pas ∞, $1 + 1$ ou 2, ou 3, &c. ne l'augmente pas non plus. Donc en général a étant un nombre fini, $\infty + a = \infty$.

89. Et ſi a n'augmente pas ∞, il ne le diminue pas non plus quand il en eſt retranché. Donc $\infty \pm a = \infty$.

90. Mais par la raiſon des contraires, & encore plus par la nature même de la choſe, je puis dire $\infty + \infty$ ou $2\,\infty$, ou $3\,\infty$, &c. Car il faut que l'infini, puiſqu'il eſt grandeur, ſoit capable d'augmentation, & je vois qu'il le ſera ſans fin, puiſqu'il pourra être multiplié par tous les nombres naturels de ſuite, dont le nombre eſt infini. Voilà donc les deux idées de l'art. 87. conciliées.

91. On voit par-là que ∞ qui est 1, devenu infini par une augmentation sans fin, ou une grandeur finie qui est sortie de l'*ordre* du fini, & a passé dans celui de l'infini, ne peut plus être augmentée par tout ce qui est de l'ordre du fini dont elle n'est plus, mais seulement par ce qui est de l'ordre de l'infini dont elle a commencé d'être, & il est clair qu'il en ira de la diminution comme de l'augmentation.

92. $a \pm 0 = a$, comme $\infty \pm a = \infty$, & par conséquent a, quoique grandeur, est aussi peu grandeur par rapport à ∞, que 0 par rapport à a. Donc aucune grandeur finie n'est grandeur par rapport à ∞, & toute grandeur qui l'est par rapport à ∞, ne peut être qu'infinie.

Que toutes es parties dé-erminables de l'Infini sont des Infinis.

93. La moitié d'une grandeur, son tiers, enfin toute aliquote, & plus généralement toute partie déterminable, est grandeur par rapport à son Tout; donc toute partie déterminable de l'Infini est infinie (92). Donc $\frac{\infty}{n}$, n étant un nombre fini quelconque, est une grandeur infinie. A plus forte raison $n\,\infty$, ou l'Infini multiplié par une grandeur finie, est une grandeur infinie, comme on l'a déja vû dans l'art. 90.

94. Puisque ∞ n'a aucune aliquote dans toute la suite naturelle des nombres finis (93), il est nombre premier.

95. $\frac{\infty}{n}.\infty :: 1.n$. ou $n\infty.\infty :: n.1$. Donc deux grandeurs infinies peuvent avoir les mêmes rapports que des grandeurs finies.

En effet les rapports de deux grandeurs finies ne sont pas finis, parce qu'elles sont finies, mais parce qu'elles sont grandeurs l'une à l'égard de l'autre.

96. La somme de deux Infinis ne peut être qu'infinie,

$$n\infty + \infty = \overline{n+1} \times \infty.\quad \infty + \frac{\infty}{n} = \frac{\overline{n+1} \times \infty}{n}.$$

97. Leur différence peut être $= 0$, car ils peuvent être égaux.

98. Si on leur suppose une différence finie, elle sera encore nulle par rapport à eux (89), & ils seront égaux.

99.

99. Réciproquement si deux Infinis sont égaux, leur différence est nulle, ou finie.

100. Donc si deux Infinis sont inégaux, leur différence n'est ni nulle, ni finie, donc infinie. $n\infty - \infty = \overline{n-1} \times \infty$. $-\frac{n}{\infty} = \frac{\overline{n-1}\times\infty}{n}$.

101. Le produit de deux Infinis est infiniment plus grand qu'aucun des deux, car il contient celui des deux qu'on voudra prendre pour le premier, autant de fois qu'il y a d'unités dans le second: or il y en a une infinité, dont le produit contient le premier Infini une infinité de fois; donc il est infiniment plus grand, & c'est la même chose à l'égard du second Infini.

102. La division d'un Infini par un Infini doit donner un quotient infiniment moindre qu'aucun des deux: car si la multiplication d'un Infini par un Infini donne un produit infiniment plus grand, la division qui fait un effet contraire doit donner un quotient infiniment plus petit. Ainsi $\frac{\infty}{\infty} = 1$, ou $\frac{\infty}{n\infty} = \frac{1}{n}$, ou ∞ divisé par $\frac{\infty}{n}$ est $= n$.

103. Il suit & de tout ce qui a été dit, & de la nature de la chose, que ∞ étant grandeur, est susceptible d'augmentation, pourvû que les grandeurs que l'on concevra l'augmenter, soient grandeurs par rapport à lui, c'est-à-dire infinies. Ainsi l'on peut concevoir cette nouvelle Suite ∞. 2∞. 3∞, &c. qui sera une progression arithmétique dont la différence sera $= \infty$, & comme la différence de 1 à ∞ : ou $\infty - 1$ est $= \infty$, cette progression pourra commencer par 1, & on aura $\div$ 1. ∞. 2∞. 3∞, &c.

104. Puisque dans cette nouvelle progression les coëfficiens de ∞ croissent toujours selon la Suite des nombres naturels, elle se terminera enfin par $\infty \times \infty = \infty^2$. *L'Infini devenu infiniment plus grand, & toujours de suite à l'infini.*

105. $\infty^2 = \infty \times \infty$ est infiniment plus grand que ∞ (101). Donc comme la Suite naturelle 1. 2, &c. se terminoit à ∞ infiniment plus grand que les termes de son origine,

de même la progreſſion $\infty . 2\infty$, &c. ſe termine à ∞^2 infiniment plus grand que les termes qui ſont à ſon origine.

106. On peut concevoir une 3me progreſſion arithmétique qui ſera $\infty^2 . 2\infty^2 . 3\infty^2$, &c. $\infty \times \infty^2 = \infty^3$, ſur laquelle on fera les mêmes raiſonnemens, & toujours ainſi de ſuite, de ſorte que le dernier terme de chacune de ces progreſſions ſera toujours infiniment grand par rapport à ceux qui étoient vers l'origine; & en raſſemblant tous ces derniers termes, on aura la progreſſion géométrique $\div \infty . \infty^2 . \infty^3 . \infty^4$, &c. toute formée des puiſſances conſécutives de ∞, & telle que chaque terme ſera toujours infiniment grand par rapport à celui qui le précede.

107. Il faut toujours raiſonner de chaque terme de la progreſſion géométrique par rapport à celui qui le précede comme on a fait de l'Infini ou de ∞ par rapport au Fini. Donc $\infty^2 \pm \infty = \infty^2$. Et en général $\infty^{n+1} \pm \infty^n = \infty^{n+1}$.

108. Donc autant qu'il y a de puiſſances poſſibles de ∞, autant il y a d'*ordres* ou *genres* d'Infinis qui s'élevent toujours les uns au-deſſus des autres. ∞ eſt du 1er ordre ou genre, ∞^2 du 2d, &c.

109. 1 peut être le 1er terme de la progreſſion géométrique (47 & 48), & elle ſera $\div 1 . \infty . \infty^2 . \infty^3$, &c. ou (49) $\infty^0 . \infty^1 . \infty^2$, &c.

110. Donc $\infty^0 = 1$. Et en effet le raiſonnement par lequel on a prouvé dans l'art. 49 que $m^0 = 1$, prouve auſſi que $\infty^0 = 1$, car il eſt abſolument indépendant de la grandeur de m.

111. La progreſſion $\div \infty^0 . \infty^1 . \infty^2$, &c. peut & doit aller juſqu'à ∞^{∞}, puiſque les expoſans de ſes termes ſont la Suite naturelle des nombres. Donc il y a un nombre d'ordres d'Infinis $= \infty$.

112. Si la progreſſion eſt $\div 1 . \infty . \infty^2$, &c. (109) le Fini eſt un des ordres qui y entrent, & il eſt clair qu'il y

doit entrer. 1 représente toutes les grandeurs finies, quelles qu'elles soient, qui ne sont point grandeurs par rapport aux infinies. ∞ représente toutes les grandeurs simplement infinies, telles que $n\infty$, ou $\frac{\infty}{n}$, ∞^2 celles qui sont des produits des grandeurs simplement infinies par de pareilles grandeurs, & toujours ainsi de suite; par exemple, $\infty \times n\infty$, plus grand que ∞^2, & $\infty \times \frac{\infty}{n}$ moindre que ∞^2 sont également de l'ordre de ∞^2, quoiqu'inégaux en grandeur dans cet ordre. De même $\infty^2 \times n\infty$, ou $\infty \times \frac{\infty}{n}$ sont de l'ordre de ∞^3, &c.

113. Ces ordres ainsi établis, une grandeur quelconque a des rapports finis à tout ce qui est de son ordre, & elle ne peut recevoir des augmentations ou des diminutions que par ce qui est de son ordre. Si on la conçoit élevée à un ordre supérieur, il faut la prendre comme ayant franchi ce passage immense, & alors tout ce qui est d'un ordre inférieur n'est plus grandeur par rapport à elle, & disparoît devant elle, comme elle-même n'est point grandeur par rapport à toutes celles des ordres supérieurs, & disparoîtroit devant elles. Tout cela n'est que ce qui a été dit du Fini & du simple Infini, appliqué à tous les ordres en général, dont le Fini & le simple Infini n'étoient que les deux premiers.

114. Ce que font dans le Fini les puissances ou plus généralement les multiplications, en élevant la grandeur à différentes *dimensions*, elles le font dans l'Infini, en l'élevant à différens ordres; desorte que les dimensions du Fini répondent aux ordres de l'Infini. Ainsi comme a^4 ou $abcd$ est une grandeur de 4 dimensions, ∞^4 ou $\infty^3 \times n\infty$, ou $\times \frac{\infty}{n}$, ou $\infty^2 \times n^2\infty^2$ ou $\times \frac{\infty^2}{n^2}$, &c. est un Infini du 4me ordre.

115. Si deux Infinis ou du même ordre ou de différens ordres sont multipliés l'un par l'autre, le produit est d'un ordre dont l'exposant est la somme des exposans des ordres des

deux Infinis : par exemple, $\infty \times \infty = \infty^{1+1} = \infty^2 . \infty^2 \times \infty^3 = \infty^{2+3} = \infty^5$.

116. Si deux Infinis du même ou de différens ordres ſont diviſés l'un par l'autre, le quotient eſt de l'ordre dont l'expoſant eſt la différence des expoſans des ordres des deux Infinis. $\frac{\infty}{\infty} = \infty^{1-1} = \infty^0 = 1$ (110). $\frac{\infty^3}{\infty^2} = \infty^{3-2} = \infty^1$.

Propriétés qui paſſent du Fini dans l'Infini, ou s'apperçoivent dans le Fini par le moyen de l'Infini.

117. Dans le Fini plus un nombre eſt grand, plus il eſt petit par rapport à ſon quarré, plus ſon quarré eſt petit par rapport à ſon cube, & toujours ainſi de ſuite des autres puiſſances. Et l'on voit ici qu'un nombre infini n'eſt pas grandeur par rapport à ſon quarré, que le quarré ne l'eſt pas par rapport au cube, &c. Donc le rapport des puiſſances ſupérieures aux inférieures ayant toujours été croiſſant dans le Fini à meſure qne les nombres étoient plus grands, il devient enfin infini dans l'Infini, c'eſt-à-dire, lorſque les nombres ſont infinis. Cela conduit naturellement à cette réflexion, Que les propriétés qui vont toujours croiſſant dans le Fini, doivent dans l'Infini recevoir tout l'accroiſſement dont elles ſont capables, ou, ce qui eſt le même, arriver au Terme où elles ont tendu, & dont elles ſe ſont toujours approchées pendant un chemin infini.

Cette réflexion ſuppoſe trois choſes. 1° Que la propriété prenne naiſſance dans le Fini. 2° Qu'elle s'y ſoutienne auſſi long-temps que l'on peut, pour ainſi dire, la ſuivre de l'œil. 3° Qu'elle ſoit capable d'un certain accompliſſement dans l'Infini. Moyennant ces trois conditions, la réflexion devient un Principe.

118. Donc ſi une propiété a pris naiſſance dans le Fini, ſi elle s'y conſerve auſſi long-temps qu'on l'y peut ſuivre, & ſi elle eſt capable d'un certain accompliſſement dans l'Infini, il eſt certain qu'elle l'y reçoit.

119. Si on voit dans l'Infini une propriété, & qu'en même temps on en voie la naiſſance dans le Fini, il eſt certain

qu'elle se conserve dans tout le cours du Fini où l'on ne peut la suivre de vûe, & que dans tout ce cours elle approchoit de plus en plus de l'état où elle est dans l'Infini.

120. Par la raison des contraires, les propriétés qui vont décroissant dans le Fini aussi long temps qu'on les peut suivre, & peuvent s'anéantir dans l'Infini, s'y anéantissent sûrement. Ainsi parce que le rapport géométrique des termes de la Suite naturelle décroît toujours, & qu'il est possible qu'il soit nul dans l'Infini, puisque deux Infinis peuvent être égaux, la Suite naturelle infinie se termine par deux Infinis égaux.

121. Si on voit qu'une propriété est nulle dans l'Infini, & en même temps qu'elle a commencé à décroître dans le Fini, il est sûr qu'elle a décrû dans le cours du Fini où l'on n'a pû la suivre, & qu'elle a toujours approché de plus en plus de son anéantissement.

122. Comme ces conclusions supposent toujours une propriété dont on voit la naissance dans le Fini, & la fin ou possible ou actuelle dans l'Infini, il ne suit point de là qu'une propriété qui se maintient constante & sans altération dans le Fini, doive se maintenir dans l'Infini: car tout ce qu'on en voit dans le Fini, & qui est supposé constant, peut n'être que sa naissance, & en ce cas-là on ne voit qu'une de ses extrémités, ce qui ne suffit pas. Donc il est seulement possible, & non pas absolument nécessaire qu'une propriété qui se maintient toujours dans le Fini, se maintienne aussi dans l'Infini.

123. Mais par la même raison, si on voit une propriété dans le Fini, ne fût-ce qu'à sa premiére & plus petite naissance, qu'on la retrouve la même dans l'Infini, il est sûr qu'elle a été constante dans tout le cours intermédiaire, pourvû que ce cours ait été *uniforme*; c'est-à-dire, que les autres propriétés qui y étoient croissantes ou décroissantes l'aient toujours été. Moyennant cette condition, les deux extrémités seules assûreront de tout l'entre-deux.

Pour prévenir la pensée où l'on pourroit tomber, que toute cette Théorie abstraite de l'Infini est peu utile, je vais apporter

quelques exemples des uſages que peut avoir le peu que nous en avons vû juſqu'ici.

EXEMPLE. I.

124. Si l'on cherche la ſomme de la Suite naturelle pouſſée juſqu'à ∞, on voit par la Formule générale $\frac{nn + n}{2}$ (77) que cette ſomme eſt $\frac{\infty^2 + \infty}{2} = \frac{\infty^2}{2}$ (107); c'eſt-à-dire, que la ſomme de la Suite naturelle infinie eſt la moitie du quarré du nombre infini qui la termine. Et quoique ce nombre infini nous ſoit inconnu, il eſt certain qu'on prend par-là une idée de cette ſomme qu'on n'auroit pas eue autrement.

EXEMPLE II.

125. Si je ne prends la ſomme que de la moitié des termes de la Suite naturelle, le nombre *n* de ſes termes étant alors $= \frac{\infty}{2}$, la ſomme ſera $\frac{\infty^2 + 2\infty}{8} = \frac{\infty^2}{8}$. Et elle ſera à celle de la Suite entiere terminée par $\infty :: \frac{\infty^2}{8} . \frac{\infty^2}{2}$ (107) :: 2. 8 :: 1. 4. Donc dans la Suite naturelle infinie la ſomme du nombre infini des termes eſt quadruple de la ſomme de la moitié infinie de ce nombre total des termes. Cela me fait appercevoir que cette propriété pourroit avoir pris naiſſance dans la même Suite finie, & je vois en effet que 10, ſomme des 4 premiers termes, n'eſt pas quadruple de 3, ſomme des 2 premiers, mais que 21, ſomme des 6 premiers, approche plus d'être quadruple de 6, ſomme des 3 premiers, que 10 n'approchoit d'être quadruple de 3, & quelques autres *inductions* m'aſſûreront de reſte que cette propriété eſt croiſſante dans le Fini; & comme je la vois accomplie dans l'Infini, j'en conclus ſûrement (119) qu'elle eſt croiſſante dans tout le cour du Fini, & que plus on prend un grand nombre de termes de la Suite naturelle, plus leur ſomme approche d'être quadruple de la ſomme d'un nombre de termes une fois moindre.

Si je prends la ſomme d'un nombre de termes de la Suite naturelle $= \frac{\infty}{3}$, elle ſera $\frac{\infty^2 + 3\infty}{18} = \frac{\infty^2}{18}$, & elle ſera à $\frac{\infty^2}{2}$, ſomme du nombre total des termes : : 1. 9.

De même, ſi je prends la ſomme d'un nombre de termes de la Suite naturelle $= \frac{\infty}{4}$, elle ſera à $\frac{\infty^2}{2}$ :: 1. 16.

Et en général il eſt clair par la Formule $\frac{nn+n}{2}$ que ſi le nombre des termes que je prends, eſt $\frac{\infty}{m}$, m étant un nombre fini quelconque, la ſomme en ſera $\frac{\infty^2}{2m^2}$ qui ſera à $\frac{\infty}{2}$, ſomme du nombre total des termes : : 1. m^2.

D'où je conclus que dans le Fini, plus le nombre n des termes de la Suite naturelle ſera grand, plus la ſomme approchera d'être à celle d'un nombre de termes $= \frac{n}{2}$: : 4. 1. à celle d'un nombre de termes $= \frac{n}{3}$: : 9. 1. à celle d'un nombre de termes $= \frac{n}{4}$ :: 16. 1. &c. Et c'eſt par l'Infini qu'on eſt arrivé à cette connoiſſance du Fini.

EXEMPLE III.

126. Je ſuppoſe qu'on ſait ce que c'eſt que les nombres Figurés, qui ſont les Unités, les Nombres Naturels, les Triangulaires, les Pyramidaux, les Triangulo-pyramidaux, &c. à l'infini. Il eſt démontré qu'un nombre Naturel quelconque étant n, le n^{me} Triangulaire eſt . . . . $\frac{nn+n}{1 \times 2}$.

Pyramidal . . . . $\frac{n^3+3n^2+2n}{1 \times 2 \times 3}$.

Triang. pyr . . . . $\frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$.

&c.

De-là il ſuit que le dernier des Naturels étant ∞,

le dernier des Triangulaires eft..... $\frac{\infty^2}{2}$.

des Pyramidaux .... $\frac{\infty^3}{6}$.

des Triang. pyramidaux... $\frac{\infty^4}{24}$.

D'où l'on voit que ceux des ordres fuivans feront $\frac{\infty^5}{120}$, $\frac{\infty^6}{720}$, &c. le numérateur étant toujours ∞ élevé à la puiffance ou à l'ordre immédiatement fupérieur, & le dénominateur le produit continuel des nombres naturels jufqu'au nombre inclufivement qui eft l'expofant de ∞.

On peut s'affûrer par-là que les différens ordres d'Infini font très-réels, puifque des Suites de nombres y conduifent néceffairement. Et fi l'on fe contentoit d'appercevoir que les derniers termes de ces différentes Suites de Nombres Figurés doivent être infinis, la connoiffance feroit fans comparaifon plus imparfaite.

127. On peut élever au quarré tous les termes de la progreffion $\div$ 1. ∞. ∞^2. ∞^3, &c. ∞^{∞}, ce qui donnera la nouvelle progreffion $\div$ $2^2 = 1$. ∞^2. $\infty^{2\times 2}$. $\infty^{2\times 3}$ &c. $\infty^{2\infty}$. De même en élevant au cube la premiere progreffion, on aura $\div$ 1. ∞^3. ∞^6. ∞^9, &c. $\infty^{3\infty}$, & ainfi de fuite pour toutes les autres puiffances, & enfin pour la puiffance $= \infty$, ou aura $\div$ 1^{∞}. ∞^{∞}. $\infty^{2\infty}$. $\infty^{3\infty}$, &c. $\infty^{\infty\times\infty} = \infty^{\infty^2}$, c'eft-à-dire, ∞ multiplié par lui-même autant de fois qu'il y a d'unités dans ∞^2.

128. On peut encore élever au quarré, au cube, &c. & enfin à ∞ la progreffion $\div$ 1^{∞}. ∞^{∞}. $\infty^{2\infty}$, &c. ∞^{∞^2}, ce qui donnera pour dernier terme dans la derniere élévation, $\infty^{\infty^2\times\infty} = \infty^{\infty^3}$. Il eft vifible que ces élevations n'ont

n'ont point de fin, qu'on iroit jusqu'à une progression dont le dernier terme seroit $\infty^{\infty^{\infty}}$, & que là même on recommenceroit encore à faire des élévations sans fin.

129. $1^{\infty} = 1$. Car (127) $\div 1^{\infty} . \infty^{\infty} . \infty^{2\infty}$. Donc $\infty^{2\infty} = 1^{\infty} \times \infty^{2\infty}$. Donc $1^{\infty} = 1$. Donc 1 conserve jusque dans l'Infini sa propriété de ne point augmenter par aucune élévation à une puissance.

130. Donc $\infty^{0} = 1$ (110) $= 1^{\infty}$.

131. Donc aussi $1^{0} = 1^{\infty}$. Et il est remarquable que 0 & ∞ appliqués de la même maniere fassent le même effet, mais la raison en est claire. C'est qu'une grandeur qui n'est absolument multipliée par rien, ou la même grandeur multipliée de façon qu'elle ne puisse augmenter, c'est la même chose, & elle ne peut changer d'état. Or 1 est la seule grandeur, qui multipliée par elle-même ne change point.

132. Il est clair par tout ce qui a été dit, que si on éleve tous les termes de la Suite naturelle infinie au quarré, au cube, &c. le dernier terme de la Suite quarrée sera ∞^{2}, de la Suite cubée ∞^{3}, &c. toujours d'un ordre supérieur.

Formation de nouveaux Infinis, qui ne sont que radicaux.

133. Que ∞ soit divisé en un nombre fini n de parties qui seront infinies (93), ou que le rapport arithmétique de 1 & de ∞, ou leur différence $= \infty$ soit divisée en ce nombre n de parties, c'est la même chose, & ces parties seront infinies; & parce qu'elles sont infinies, leurs parties en nombre fini, le seront aussi, quoique toujours moindres, ou, ce qui revient au même, leurs rapports arithmétiques ou différences seront encore infinies. Ainsi $\frac{\infty}{3}$ & $\frac{\infty}{4}$ étant deux Infinis qui sont parties de ∞, leur différence $= \frac{\infty}{12}$ est infinie. Par la même raison le rapport géométrique de ∞ à 1 étant divisé en un nombre fini n de parties, elles seront infinies, & comme ce seront des rapports géométriques, ces rapports seront donc infinis, ou, ce qui est la même chose, les grandeurs

entre lesquelles seront ces rapports, seront infinies les unes par rapport aux autres. Donc si on introduit entre 1 & ∞ un nombre n fini de moyens géométriques, ce qui donnera (58) $\div 1 . \infty^{\frac{1}{n+1}} . \infty^{\frac{2}{n+1}} . \infty^{\frac{3}{n+1}}$, &c. jusqu'à $\infty^{\frac{n+1}{n+1}} = \infty$, on aura une progression dont chaque terme sera infini par rapport à celui qui le précédera.

Par exemple, si $n = 1$, on aura $\div 1 . \infty^{\frac{1}{2}}$ ou $\sqrt[2]{\infty} . \infty$. Si $n = 2$. $\div 1 . \infty^{\frac{1}{3}} . \infty^{\frac{2}{3}} . \infty$.

134. Donc voilà de nouvelles progressions, dont les termes toujours infiniment grands par rapport à ceux qui les précedent, sont toujours par conséquent d'ordres supérieurs, comme ceux de $\div 1 . \infty . \infty^2$, ou de $\div 1 . \infty . \infty^2 . \infty^3$, & de toutes les progressions pareilles. Mais il y a cette différence essentielle, qu'au lieu que dans ces dernieres progressions, c'est le rapport infini de ∞ à 1, doublé ou triplé, &c. qui a été divisé en un nombre fini n de parties, qui ont fait autant d'ordres *potentiels*, c'est dans les progressions $\div 1 . \infty^{\frac{1}{n+1}} . \infty^{\frac{2}{n+1}}$, &c. le rapport simplement infini de ∞ à 1 qui est divisé, & qui ne produit que des ordres *radicaux*.

135. Quoique ∞ soit infiniment grand par rapport à $\infty^{\frac{1}{2}}$ sa moitié géometrique, & qu'il ne le soit pas par rapport à $\frac{\infty}{2}$ sa moitié arithmétique, cela n'empêche pas que la correspondance du rapport arithmétique & du géométrique ne soit toujours parfaite; car comme ∞ a une différence infinie à $\frac{\infty}{2}$, ainsi ∞ a un rapport géometrique infini à $\infty^{\frac{1}{2}}$, & comme pour égaler $\frac{\infty}{2}$ à ∞, il ne faut que le doubler, ainsi pour égaler $\infty^{\frac{1}{2}}$ à ∞, il ne faut que le doubler ou le quarrer, ce qui est sa maniere particuliere d'être doublé. Donc comme les parties $\frac{\infty}{2}$, $\frac{\infty}{3}$, &c. du rapport

arithmétique de ∞ & de 1 ſont du même ordre que ∞, & plus généralement parce que toutes les parties déterminables d'un Tout quelconque, ou qui ſont en nombre fini, ſont du même ordre que ce Tout, il faut que les $\infty^{\frac{1}{2}}$, $\infty^{\frac{1}{3}}$, &c. ſoient du même ordre que ∞. Mais ces Infinis radicaux ne peuvent être du même ordre que ∞, qu'entant qu'ils ſont quelques parties déterminées du rapport géométrique $\frac{\infty}{1}$, ou de l'ordre potentiel qui eſt entre 1 & ∞, donc ils ſont du même ordre potentiel que ∞, ou du même ordre par rapport à 1, ou au fini, ce qui n'empêche pas qu'ils ne ſoient entr'eux de différens ordres radicaux infiniment élevés les uns au-deſſus des autres, comme les $\frac{\infty}{2}$, $\frac{\infty}{3}$, &c. ont entr'eux des différences infinies.

Rapports des Infinis radicaux aux potentiels, & entr'eux.

136. Puiſque dans la progreſſion radicale $\div\!\div$ 1. $\infty^{\frac{1}{n+1}}$ $\infty^{\frac{2}{n+1}}$, &c. ∞. chaque terme eſt infiniment grand par rapport à celui qui le précede (133) on a $\infty^{\frac{1}{n+1}} \pm 1 = \infty^{\frac{1}{n+1}}$, ou $\infty^{\frac{1}{n+1}} \pm a = \infty^{\frac{1}{n+1}}$. $\infty^{\frac{2}{n+1}} \pm \infty^{\frac{1}{n+1}} = \infty^{\frac{2}{n+1}}$. $\infty \pm \infty^{\frac{n}{n+1}} = \infty$. A plus forte raiſon ſi l'on prend dans cette progreſſion des termes qui ne ſoient pas conſécutifs, car le plus grand en ſera encore infiniment plus grand par rapport à l'autre.

137. Le nombre n de moyens géométriques étant déterminé, deux termes qui appartiennent à la même progreſſion, different d'autant d'ordres radicaux que les numérateurs de leurs expoſans different d'unités. Ainſi ſi $n = 3$, ce qui donne $\div\!\div$ 1. $\infty^{\frac{1}{4}}$, $\infty^{\frac{2}{4}}$, $\infty^{\frac{3}{4}}$, ∞, on voit que $\infty^{\frac{1}{4}}$ & $\infty^{\frac{3}{4}}$ different de deux ordres radicaux.

138. Plus n eſt grand, plus le rapport $\frac{\infty}{1}$ a été diviſé en un grand nombre de parties, & par conſéquent plus elles ſont petites, quoique toutes infinies. Donc ſi deux Infinis

radicaux ſont conſécutifs dans une progreſſion qui a un certain nombre de termes, le rapport infini du plus grand au plus petit n'eſt pas ſi grand que celui de deux autres infinis radicaux conſécutifs dans une autre progreſſion qui a un moindre nombre de termes. Ainſi le rapport de $\infty^{\frac{2}{4}}$ à $\infty^{\frac{1}{4}}$ n'eſt pas ſi grand que celui de $\infty^{\frac{2}{3}}$ à $\infty^{\frac{1}{3}}$.

139. Après tout ce qui vient d'être établi, il eſt aiſé de comparer enſemble deux Infinis radicaux dont les expoſans ont le même dénominateur, comme $\infty^{\frac{3}{7}}$ & $\infty^{\frac{5}{7}}$: car on voit tout d'un coup qu'ils appartiennent à une progreſſion qui a introduit entre 1 & ∞ ſix moyens géométriques, & que dans cette progreſſion ils different de deux ordres radicaux.

140. Et comme pour la comparaiſon de deux Infinis radicaux il faut qu'ils appartiennent à la même progreſſion, & que quand ils y appartiennent, leurs expoſans ont le même dénominateur; il s'enſuit que ſi leurs expoſans ont différens dénominateurs, il faut leur en donner un qui ſoit le même ſans changer leur valeur. Auſſi pour comparer $\infty^{\frac{1}{3}}$ & $\infty^{\frac{1}{4}}$, il faut les changer en $\infty^{\frac{4}{12}}$ & $\infty^{\frac{3}{12}}$, moyennant quoi on voit qu'ils appartiennent à une progreſſion qui a introduit 11 moyens géométriques entre 1 & ∞, & que dans cette progreſſion ils different d'un ordre radical.

141. Quand les numérateurs des expoſans feroient différens auſſi-bien que les dénominateurs, comme dans $\infty^{\frac{1}{4}}$ & $\infty^{\frac{2}{3}}$, cela ne changeroit rien à cette maniere de comparer les Infinis radicaux. On auroit dans cet exemple $\infty^{\frac{3}{12}}$ & $\infty^{\frac{8}{12}}$, après quoi la comparaiſon eſt aiſée.

142. Comme on a introduit entre 1 & ∞ un nombre quelconque n fini de moyens géométriques (133) on en peut introduire ce même nombre entre 1 & ∞^2, ce qui

donnera (58) $\div\!\div\, 1 . \infty^{\frac{2 \times 1}{n+1}} . \infty^{\frac{2 \times 2}{n+1}} . \infty^{\frac{2 \times 3}{n+1}} . \infty^{\frac{2 \times 4}{n+1}}$ &c. $\infty^{\frac{2 \times \overline{n+1}}{n+1}} = \infty^2$. Où l'on voit que le numérateur des exposans est toujours un produit de deux nombres, dont 2 exposant du dernier terme ∞^2 est toujours l'un, & les autres sont la Suite naturelle des nombres.

Si, par exemple, $n = 6$, on aura

$$\div\!\div\, 1 . \infty^{\frac{2 \times 1}{7}} . \infty^{\frac{2 \times 2}{7}} . \infty^{\frac{2 \times 3}{7}} . \infty^{\frac{2 \times 4}{7}} . \infty^{\frac{2 \times 5}{7}} . \infty^{\frac{2 \times 6}{7}} . \infty^{\frac{2 \times 7}{7}},$$

ou $\div\!\div\, 1 . \infty^{\frac{2}{7}} . \infty^{\frac{4}{7}} . \infty^{\frac{6}{7}} . \infty^{\frac{8}{7}} . \infty^{\frac{10}{7}} . \infty^{\frac{12}{7}} . \infty^{\frac{14}{7}} = \infty^2$.

Puisque dans cette progression c'est le rapport géométrique de ∞^2 à 1 qui a été divisé en un nombre $n+1$ de parties égales, au lieu que dans celle de l'art. 135, c'étoit le rapport de ∞ à 1; & puisque le rapport de ∞^2 à 1 est infiniment plus grand que celui de ∞ à 1, les divisions infinies produites par cette 2de progression sont infiniment plus grandes que les infinies produites par la 1re; & comme la 1re n'en pouvoit produire que d'infinies tant que n étoit fini, la 2de dans cette même supposition n'en peut produire que d'infinies, & infiniment plus grandes.

Et en effet, puisque 2 est un coëfficient constant dans les numérateurs des exposans, tous les termes de la 2de progression sont les quarrés de ceux de la 1re, qui étoient $\div\!\div\, 1 . \infty^{\frac{1}{n+1}} . \infty^{\frac{2}{n+1}}$, &c. Or n étant fini $\infty^{\frac{1}{n+1}}$; $\infty^{\frac{2}{n+1}}$, &c. étoient des grandeurs infinies. Donc leurs quarrés sont infiniment plus grands.

143. Donc le rapport de deux termes infinis consécutifs est infiniment plus grand dans la 2de progression que dans la 1re, & en général deux termes infinis qui dans la 2^de^

progreſſion different d'un certain nombre d'ordres radicaux, different infiniment plus que deux autres termes infinis qui différeroient de ce même nombre d'ordres radicaux dans la 1re.

144. La 2de progreſſion a des termes qui lui ſont communs avec la 1re; ce ſont tous ceux dont l'expoſant a un numérateur moindre que le dénominateur. Ainſi $\infty^{\frac{2}{7}}$, $\infty^{\frac{4}{7}}$, $\infty^{\frac{6}{7}}$ auroient auſſi appartenu à une progreſſion qui auroit introduit 6 moyens géométriques entre 1 & ∞, mais ils n'y auroient pas été conſécutifs, comme ils le ſont dans la 2de progreſſion. Il eſt aiſé de le voir, & comme il y auroit eu un autre terme dans chacun de leurs intervalles, le rapport de deux termes conſécutifs de la 2de progreſſion eſt doublé de celui de deux termes conſécutifs de la 1re, ce qui revient aux quarrés de l'art. 142.

145. Les termes de la 2de progreſſion qui ont le numérateur de leur expoſant plus grand que le dénominateur, par exemple, $\infty^{\frac{8}{7}}$, $\infty^{\frac{10}{7}}$, &c. ſont particuliers à cette progreſſion, c'eſt-à-dire, n'ont pû entrer dans la 1re. J'appelle *purs* Infinis radicaux les termes qui ſont communs aux deux progreſſions, parce que leur expoſant eſt une pure fraction, & j'appelle Infinis radicaux *mixtes*, ceux qui ſont particuliers à la 2de progreſſion, parce que leur expoſant eſt une fraction qui contient un entier plus une pure fraction.

146. Tous les termes de la 2de progreſſion ont un expoſant dont le numérateur eſt un multiple exact de 2, ou pair; & enfin le dernier a un expoſant dont le numérateur eſt double du dénominateur. Il eſt clair qu'il en ira de même de toute progreſſion pareille compriſe entre 1 & ∞^2.

147. Les purs Infinis radicaux de la 2de progreſſion lui étant communs avec la 1re (144), il ſuffit de les conſidérer dans cette 1re, ou plutôt en général, tous les purs Infinis radicaux doivent être conſidérés dans une progreſſion compriſe entre 1 & ∞, & on a déja vû tout ce qui leur appartient. Mais les Infinis radicaux mixtes étant particuliers à la

2de, y doivent être considérés, & ne le peuvent être dans l'autre ; ou en général, tous ceux dont l'exposant est une fraction qui contient 1 plus une pure fraction, appartiennent uniquement à une progression de cette espece. Ainsi $\infty^{\frac{16}{9}}$ est un des termes d'une progression qui auroit introduit 8 moyens géométriques entre 1 & ∞^2, & qui seroit

$$\div 1 . \infty^{\frac{2\times1}{9}} . \infty^{\frac{2\times2}{9}} . \infty^{\frac{2\times3}{9}}, \&c.\ \infty^{\frac{2\times9}{9}} = \infty^2.$$

148. Il est aisé de trouver cette progression dont $\infty^{\frac{16}{9}}$ est un des termes; parce que 16, numérateur de l'exposant, est multiple exact de 2, ou pair, & que dans les progressions que nous considérons présentement, tous les numérateurs des exposans sont pairs (142). Mais il semble que si on avoit eu $\infty^{\frac{15}{9}}$ qui se rapporte aussi-bien que $\infty^{\frac{16}{9}}$ à une progression comprise entre 1 & ∞^2 (145), il y auroit eu quelque difficulté à déterminer en particulier la progression dont il seroit un des termes. Cependant cela seroit fort aisé : car puisque ces progressions ont toujours des termes dont les exposans ont des numérateurs pairs, il n'y auroit eu qu'à donner à $\infty^{\frac{15}{9}}$ un numérateur pair sans changer la valeur de l'exposant, & on auroit eu $\infty^{\frac{2\times15}{2\times9}} = \infty^{\frac{30}{18}} = \infty^{\frac{15}{9}}$. De-là il suit que $\infty^{\frac{30}{18}} = \infty^{\frac{15}{9}}$ est un des termes d'une progression qui introduit 17 moyens proportionnels entre 1 & ∞^2, & qui a pour dernier terme $\infty^{\frac{36}{18}} = \infty^2$ (147).

149. Si l'on veut comparer $\infty^{\frac{15}{9}}$ & $\infty^{\frac{16}{9}}$, il faut après avoir changé $\infty^{\frac{15}{9}}$ en $\infty^{\frac{30}{18}}$, changer aussi $\infty^{\frac{16}{9}}$ en $\infty^{\frac{32}{18}}$: & l'on voit, parce que les numérateurs de leurs exposans sont $30 = 2 \times 15$, & $32 = 2 \times 16$, qu'ils sont consécutifs dans une progression, qui a introduit 17 moyens géométriques entre 1 & ∞^2, & qu'ils ne different que d'un ordre radical.

150. De tout cela s'ensuit clairement & sans autre preuve

la Méthode de comparer deux Infinis radicaux compris entre 1 & ∞^2, ſoit que l'un ſoit pur radical, & l'autre mixte, ſoit qu'ils ſoient tous deux mixtes.

Si leurs expoſans ont des dénominateurs différens, il faut les réduire à avoir le même, afin que les deux Infinis puiſſent appartenir à la même progreſſion.

Après cela, ſi les numérateurs des expoſans ſont tous deux pairs, il n'y a plus rien à faire, & l'on voit tout d'un coup de combien d'ordres radicaux different les deux Infinis dans la progreſſion qui a été déterminée par le dénominateur commun.

Si les deux numérateurs ne ſont pas pairs, il faut les réduire à l'être, & comme par-là le dénominateur commun change, les deux Infinis viennent à appartenir à une nouvelle progreſſion dans laquelle il eſt aiſé de les comparer.

Par exemple, pour comparer $\infty^{\frac{1}{2}}$ & $\infty^{\frac{5}{4}}$, il faut les changer en $\infty^{\frac{4}{8}}$ & $\infty^{\frac{10}{8}}$, & comme les deux numérateurs des expoſans ſont pairs, & que $4 = 2 \times 2$, & $10 = 2 \times 5$, on voit qu'ils appartiennent à une progreſſion qui introduit entre 1 & ∞^2, 7 moyens géométriques, & qu'ils y ont entr'eux $\infty^{\frac{2 \times 3}{8}}$, $\infty^{\frac{2 \times 4}{8}}$, & par conſéquent qu'ils y different de 3 ordres radicaux.

Pour comparer $\infty^{\frac{1}{3}}$ & $\infty^{\frac{5}{4}}$, on a d'abord $\infty^{\frac{4}{12}}$ & $\infty^{\frac{15}{12}}$: mais parce que 15 n'eſt pas pair, il faut changer $\infty^{\frac{15}{12}}$ en $\infty^{\frac{30}{24}}$, & par conſéquent $\infty^{\frac{4}{12}} = \infty^{\frac{1}{3}}$ en $\infty^{\frac{8}{24}}$, & alors ils appartiennent tous deux à une progreſſion qui introduit entre 1 & ∞^2, 23 moyens proportionnels : & parce que $8 = 2 \times 4$, & $30 = 2 \times 15$, ils different dans cette progreſſion d'autant d'ordres radicaux que 4 & 15 different d'unités, c'eſt-àdire, de 11 ordres.

151. Si on introduit entre 1 & ∞^3 un nombre n fini de moyens géométriques, on aura

$\div\!\div 1 . \infty^{\frac{3\times 1}{n+1}} . \infty^{\frac{3\times 2}{n+1}} . \infty^{\frac{3\times 3}{n+1}} . \infty^{\frac{3\times 4}{n+1}}$, &c. jusqu'à $\infty^{\frac{3\times\overline{n+1}}{n+1}} = \infty^3$ dernier terme.

Le rapport de ∞^3 à 1 étant infiniment plus grand que celui de ∞^2 à 1, cette 3me progression produira des divisions infiniment plus grandes que celles de la 2de, ou de l'art. 142, qui étoient infiniment plus grandes que celles de la 1re, ou de l'art. 133, & l'on voit que tous les termes de cette 3me progression sont les cubes de ceux de la 1re, ou ont un rapport triplé.

152. De plus, il peut y avoir dans cette 3me progression de purs Infinis radicaux, des mixtes qui peuvent aussi lui être communs avec la 2de, parce que leurs exposans seront une fraction qui contiendra 1 plus une pure fraction; & enfin il y a nécessairement des mixtes particuliers à cette 3me progression, parce que leurs exposans sont une fraction qui contient 2 plus une pure fraction. Ainsi si $n = 6$, quand on aura $\infty^{\frac{3\times 5}{7}} = \infty^{\frac{15}{7}}$, on aura un de ces Infinis radicaux particuliers à cette progression.

153. Il est visible qu'en introduisant de même un nombre n fini de moyens géométriques entre 1 & ∞^4, il y aura les mêmes raisonnemens à faire sur l'augmentation infinie des divisions, ou du rapport des termes, & que de plus on aura de nouveaux Infinis radicaux mixtes particuliers à cette 4me progression, dont les exposans seront une fraction qui contiendra 3, plus une pure fraction, & toujours ainsi de suite.

154. Donc en général un exposant étant $\frac{m}{n}$, où m & n sont des nombres finis, & $m > n$, tout $\infty^{\frac{m}{n}}$ est un Infini radical mixte qui appartient à une progression dont le dernier terme est ∞ élevé à une puissance qui a autant d'unités que n est contenu de fois dans m, plus une, ou, ce qui revient

au même, tout $\infty^{\frac{m}{n}}$ eſt au deſſus de ∞ élevé à la puiſſance qui a autant d'unités que n eſt contenu de fois dans m, & ce $\infty^{\frac{m}{n}}$ entre dans l'ordre potentiel ſuivant. Ainſi $\infty^{\frac{10}{3}}$ eſt au deſſus de ∞^3, & entre ∞^3 & ∞^4, ou, ce qui eſt le même, il entre dans l'ordre potentiel qui eſt entre ∞^2 & ∞^4.

155. La Méthode qui a été donnée dans l'art. 150, pour la comparaiſon des Infinis radicaux qui ne paſſent pas ∞^2, s'applique d'elle-même aux Infinis radicaux quelconques, ou qui ſeront au deſſus de tel ordre potentiel qu'on voudra, pourvû qu'on faſſe attention que comme dans les progreſſions compriſes entre 1 & ∞^2, 2 eſt un coëfficient perpétuel dans les numérateurs des expoſans, de même dans les progreſſions compriſes entre 1 & ∞^3, c'eſt 3, 4 pour les progreſſions compriſes entre 1 & ∞^4, & ainſi de ſuite. Du reſte les opérations ſont les mêmes.

Par exemple, on veut comparer $\infty^{\frac{1}{2}}$ & $\infty^{\frac{10}{3}}$ qui appartiennent à une progreſſion dont le dernier terme eſt ∞^4 (153), & par conſéquent le coëfficient perpétuel des numérateurs des expoſans eſt 4. En réduiſant les expoſans de $\infty^{\frac{1}{2}}$ & de $\infty^{\frac{10}{3}}$ au même dénominateur, on a $\infty^{\frac{3}{6}}$ & $\infty^{\frac{20}{6}}$. Mais comme 3 n'eſt pas un multiple de 4, comme 20 en eſt un, il faut changer ces deux Infinis en $\infty^{\frac{12}{24}}$ & en $\infty^{\frac{80}{24}}$, d'où l'on voit qu'ils appartiennent à une même progreſſion qui introduit 23 moyens proportionnels entre 1 & $\infty^4 = \infty^{\frac{96}{24}}$, & qu'ils different de 17 ordres radicaux, parce que $12 = 4 \times 3$, & $80 = 4 \times 20$.

Il ſeroit inutile de répéter, que plus le nombre n de moyens proportionnels qu'on introduit entre les mêmes extrêmes eſt grand, plus les rapports égaux, quoi-qu'infinis, ſont petits.

Rapports des Infinis radicaux au Fini.

156. Mais il n'eſt pas ſi important de ſavoir comparer les Infinis radicaux entr'eux, que de les pouvoir comparer, ou rapporter au Fini, qui eſt toujours, ou le principal objet, ou du moins la baſe de nos recherches.

Il suit de tout ce qui a été dit, que tout Infini radical pur, tel que $\infty^{\frac{1}{n}}$ ou $\infty^{\frac{n}{m}}$, *n* & *m* étant finis, & $n < m$, appartient à quelque progression géométrique qui auroit divisé le rapport infini de ∞ à 1 en un nombre fini de parties égales, & par conséquent infinies, & du même ordre que leur Tout qui est de l'ordre de ∞. Donc $\infty^{\frac{1}{n}}$ fût-il le 1er terme moyen de cette progression ou celui qui suit immédiatement 1, il a un rapport infini à 1, & ce rapport est de l'ordre de ∞, ou du 1er ordre potentiel. Donc tout Infini radical pur est par rapport à 1, ou au Fini du 1er ordre potentiel.

157. Tout $\infty^{\frac{m}{n}}$, Infini radical mixte, est au dessus de quelque Infini potentiel, & entre dans l'ordre potentiel suivant (154). Or de cet ordre potentiel où il entre, il en détermine une certaine partie où il se place, & cette partie est nécessairement d'une dénomination finie, & par conséquent elle est infinie, & du même ordre que son Tout qui est ce dernier ordre potentiel. Donc $\infty^{\frac{m}{n}}$ est par rapport à 1 de ce dernier ordre potentiel. Ainsi $\infty^{\frac{10}{3}}$ qui est au dessus de ∞^3, & entre ∞^3 & ∞^4, est du 4me ordre potentiel par rapport à 1, ou au Fini.

158. Donc en général un Infini radical quelconque est par rapport au Fini du même ordre potentiel que l'Infini potentiel le plus élevé, au dessous duquel il est immédiatement. Il est clair que l'exposant de l'Infini radical détermine tout d'un coup quel est l'Infini potentiel le plus élevé, au dessous duquel il est immédiatement.

159. Donc quand on a deux Infinis radicaux qui different entr'eux d'un certain nombre d'ordres radicaux, mais tous compris dans le même potentiel, comme $\infty^{\frac{1}{2}}$, $\infty^{\frac{1}{3}}$, &c. si on compare ces deux Infinis radicaux au Fini,

ils sont du même ordre potentiel, les différences de leurs ordres radicaux disparoissent, & elles ne sont à compter que quand on compare les Infinis radicaux entr'eux.

160. Il suit aussi de-là, qu'une grandeur qui par une certaine supposition ou conséquence devroit être de l'ordre de ∞, & qui ne se trouveroit que $= \infty^{\frac{1}{2}}$, ou $\infty^{\frac{1}{3}}$, &c. devroit être considérée de deux manieres. Par rapport au Fini, elle seroit toujours de l'ordre dont on auroit supposé ou conclu qu'elle auroit dû être. Mais en elle-même, elle seroit infiniment moindre que si elle avoit été $= \infty$, & non pas un Infini radical. Il en seroit de même d'une grandeur qui auroit dû être ∞^2, & ne seroit que $\infty^{\frac{2}{3}}$, &c.

Quelles sont les parties infinitiemes d'un Tout infini.

161. Un Tout infini ne peut avoir une infinité de parties infinies de son ordre : car lorsqu'il n'est divisé qu'en un nombre fini de parties, elles sont infinies, & de son ordre; mais d'autant moindres qu'elles sont en plus grand nombre; d'où il suit, que quand elles sont en nombre infini, elles doivent être infiniment moindres qu'elles n'étoient, & n'être plus de l'ordre du Tout. Mais pour le démontrer plus à la rigueur, soit supposé ∞ formé de parties infinies en nombre infini, égales, ou inégales. Si elles sont égales, une partie quelconque, & si elles sont inégales, une certaine partie moyenne, multipliée par un nombre infini sera $= \infty$. Or cette partie est infinie par la supposition, donc le produit où elle entrera sera un Infini d'un ordre supérieur à ∞, ce qui est contradictoire. Donc un Tout infini ne peut avoir une infinité de parties infinies de son ordre.

162. Donc toute partie *infinitieme* est d'un ordre inférieur à son Tout. Par exemple, toute partie infinitieme de ∞ est finie, toute partie infinitieme de ∞^2 est de l'ordre de ∞, &c.

163. Un Infini d'un ordre quelconque divisé d'abord en 10 parties, par exemple, qui seront infinies de son ordre, peut ensuite être divisé en une infinité de parties finies. Donc il aura des parties infinies, & des parties finies: mais il n'aura

des parties infinies qu'en nombre fini, & il en aura de finies en nombre infini, ou, ce qui revient au même, s'il est divisé en une infinité de parties, parmi lesquelles il y en ait de son ordre, elles ne seront qu'en nombre fini, & celles de l'ordre inférieur seront en nombre infini.

164. Si un Infini est divisé en une infinité de parties égales, elles ne peuvent être toutes que de l'ordre inférieur.

165. Si on divise en un nombre ∞ de parties égales le rapport arithmétique de 1 & de ∞, elles seront donc toutes finies ; & en effet chacune d'elles est 1, différence constante de la Suite naturelle, qui introduit entre 1 & ∞ un nombre ∞ de moyens arithmétiques. Cela se trouveroit de même par la Formule de l'art. 55.

De même si on divise en une infinité de parties égales le rapport géométrique $\frac{\infty}{1}$, ce qui introduira entre 1 & ∞ une infinité de moyens géométriques, toutes ces parties seront donc finies, & comme ces parties sont des rapports géométriques, ces rapports seront donc tous finis ; c'est-à-dire, que dans la progression géométrique qui se formera, aucun terme ne sera infiniment grand par rapport au précédent, & n'aura à ce précédent qu'un rapport fini, tel que ceux que les nombres finis ont les uns aux autres.

166. Dans cette progression géométrique a étant $= 1$, $b = \infty$, $n = \infty$, on aura (55) $m = \frac{b^{\frac{1}{n+1}}}{a^{\frac{1}{n+1}}} = \frac{\infty^{\frac{1}{\infty}}}{1} = \infty^{\frac{1}{\infty}}$, & par conséquent $\div$ 1. $\infty^{\frac{1}{\infty}}$. $\infty^{\frac{2}{\infty}}$. $\infty^{\frac{3}{\infty}}$ &c. $\infty^{\frac{\infty}{\infty}} = \infty$. Or tous les rapports de cette progression étant finis (165) $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ ne sera donc pas infiniment grand par rapport à 1, mais du même ordre que 1, ou fini, seulement il sera plus grand, puisqu'il le suit dans une

Quelle est la racine infinitieme de l'Infini.

progreſſion croiſſante. Cet $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ eſt la $\sqrt[\infty]{}$ de ∞, donc la racine infinitieme de ∞ eſt finie & plus grande que 1, au lieu que toutes les autres $\sqrt{}$ de ∞ qui ont un expoſant fini ſont infinies.

167. Mais ce $\infty^{\frac{1}{\infty}} > 1$ eſt < 2, car en comparant les termes de cette progreſſion géométrique qui eſt la correſpondante de la Suite naturelle, aux termes correſpondans de cette Suite, on a (*66*) $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ ſecond terme de la progreſſion géométrique, moindre que 2 ſecond de l'arithmétique.

168. De même $\infty^{\frac{2}{\infty}} < 3$. $\infty^{\frac{3}{\infty}} < 4$, &c.

169. $\infty^{\frac{2}{\infty}}$ étant le quarré de $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, dont le quarré eſt moindre que 3, eſt donc moindre que $\sqrt{3}$. Or $\sqrt{3}$ eſt < 2. Donc $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ qui eſt plus au-deſſous de 2 que $\sqrt{3}$, eſt beaucoup au-deſſous de 2.

170. Puiſque $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ eſt une grandeur finie, ∞ par l'extraction de la racine infinitieme ne deſcend que d'un ordre, au lieu que par l'élévation à la puiſſance infinie, il monte d'une infinité d'ordres, ou, ce qui eſt la même choſe, toutes ſes racines en nombre infini tant d'un expoſant fini que d'un expoſant infini ſont entre ∞ & 1, au lieu que toutes ſes puiſſances s'étendent depuis ∞ juſqu'à ∞^{∞}. On voit la naiſſance de cela dans le Fini, où les 10 premieres puiſſances de 2, par exemple, vont depuis 2 juſqu'à 1024, au lieu que ſes 10 premieres racines, & même toutes ſes racines ſont entre 1 & 2.

De quel ordre ſont les ſommes des Suites infinies, qui ont des termes de différens ordres.

171. Maintenant je conſidere les Suites qui ont des termes en nombre $= \infty$, les uns finis, les autres infinis du même ordre ∞, ou plus généralement, car ce ſera toujours la même choſe, des termes de deux ordres conſécutifs que j'appelle n & $n+1$.

Si une Suite infinie n'avoit des termes que de l'ordre n, il y auroit toujours quelque terme moyen x, qui multiplié par ∞, nombre des termes, donneroit le produit $x \times \infty$ égal à la ſomme totale de la Suite. Or ſi x eſt ſuppoſé fini, & par conſéquent tous les autres termes de la Suite, $x\infty$ ſera un Infini du 1er ordre, & par conſéquent auſſi la ſomme de la Suite, ou, ce qui eſt le même, la ſomme ſera de l'ordre immédiatement ſupérieur à celui des termes. De même ſi x eſt de l'ordre de ∞, la ſomme ſera de l'ordre de ∞^2, &c. Donc auſſi ſi la Suite a une infinité de termes de l'ordre n, & une infinité de l'ordre $n+1$, ce qui eſt fort poſſible, puiſqu'elle en peut avoir, par exemple, de l'ordre n un nombre $= \frac{\infty}{2}$, ou $= \frac{\infty}{3}$, &c. & de l'ordre $n+1$ un nombre $= \frac{\infty}{2}$, ou $= \frac{2\infty}{3}$, &c. les termes de l'ordre n feront une ſomme de l'ordre $n+1$, & ceux de l'ordre $n+1$ une ſomme de l'ordre $n+2$, donc la ſomme totale ſera de l'ordre $n+2$, c'eſt-à-dire, de l'ordre immédiatement ſupérieur à celui des termes les plus élevés.

172. Si la Suite a un nombre fini de termes de l'ordre n, & un infini de l'ordre $n+1$, ceux de l'ordre n ne peuvent faire qu'une ſomme de ce même ordre, & ceux de l'ordre $n+1$ en font une de l'ordre $n+2$. Donc la ſomme totale eſt de l'ordre immédiatement ſupérieur à celui des termes les plus élevés.

Il faut remarquer qu'en ce cas tous les termes de l'ordre n ne faiſant qu'une ſomme de l'ordre n, cette ſomme n'eſt donc qu'un terme de l'ordre n qui diſparoît devant les termes de l'ordre $n+1$, & que par conſéquent tous ces termes de l'ordre n ſont *inutiles* à la ſomme totale, qui n'eſt formée que de ceux de l'ordre $n+1$. Dans le cas de l'art. précédent, tous les termes étoient utiles à la ſomme, parce que ceux de l'ordre n en nombre infini faiſoient une ſomme de l'ordre $n+1$, ou un terme de cet ordre qui ſe joignoit à ſes *homogenes* de l'ordre $n+1$.

173. Si la Suite a un nombre infini de termes de l'ordre n, & un nombre ſeulement fini de l'ordre $n+1$, tous les termes de l'ordre n font une ſomme de l'ordre $n+1$, qui ſe joint à ſes homogenes de l'ordre $n+1$; mais comme ils ſont en nombre fini, & qu'elle n'augmente leur nombre que d'un terme, la ſomme totale n'eſt que de l'ordre $n+1$, quoi-que tous les termes lui ſoient utiles.

174. Soit maintenant une Suite compoſée de termes de trois différens ordres conſécutifs, n, $n+1$, & $n+2$.

Si le nombre des termes de chacun de ces trois ordres eſt infini, il eſt clair qu'ils ſeront tous utiles à la ſomme, & qu'elle ſera de l'ordre $n+3$.

175. Si le nombre des termes de l'ordre n eſt fini, & celui des termes des deux autres ordres infini, ou même ſi le nombre des termes tant de l'ordre n que de l'ordre $n+1$ eſt fini, & celui des termes du ſeul ordre $n+2$ infini, tous les termes qui ne ſont qu'en nombre fini dans leur ordre ſeront inutiles à la ſomme, & elle ſera de l'ordre $n+3$.

176. Si le nombre des termes de l'ordre n eſt infini, & celui des deux autres ordres fini, ou même ſi le nombre des termes des ordres n, & $n+1$ eſt infini, & celui ſeulement des termes de l'ordre $n+2$ fini, la ſomme n'eſt que de l'ordre $n+2$: mais dans le 1er cas les termes des deux 1ers ordres ſont inutiles à la ſomme, & dans le 2d cas ils y ſont utiles.

177. Il eſt aiſé de voir qu'il en ira toujours de même, quel que ſoit le nombre des ordres conſécutifs des différens termes, & qu'en général la ſomme ne ſera que de l'ordre des termes les plus élevés, s'il n'y en a qu'un nombre fini, ou de l'ordre immédiatement ſupérieur, s'il y en a un nombre infini.

178. Réciproquement, ſi la ſomme n'eſt que de l'ordre des termes les plus élevés, il n'y en a dans la ſuite qu'un nombre fini, & ſi la ſomme eſt de l'ordre immédiatement ſupérieur, il y a un nombre infini de ces termes.

179. Les termes de l'ordre le plus élevé ne pouvant

jamais être inutiles à la ſomme, il n'y a que ceux de quelque ordre inférieur qui le puiſſent être, & ils le ſont quand ils ne ſont qu'en nombre fini, ou lorſqu'étant en nombre infini, les termes de l'ordre ſuivant ne ſont qu'en nombre fini, & que cet ordre ſuivant n'eſt pas le dernier ou le plus élevé.

180. Plus dans une Suite infinie le nombre des différens ordres des termes ſera grand, plus il pourra y avoir d'ordres qui n'aient des termes qu'en nombre fini, & par conſéquent inutiles à la ſomme (179). Et enfin ſi le nombre des différens ordres étoit infini, ce qui réduiroit, ſinon tous les ordres, du moins une infinité d'ordres à n'avoir qu'un nombre de termes fini, les termes de cette infinité d'ordres ſeroient tous inutiles à la ſomme, & ſi le nombre des ordres étoit égal au nombre des termes, ou, ce qui eſt le même, ſi chaque terme étoit d'un ordre différent, tous les termes horſmis le dernier ou plus élevé ſeroient inutiles à la Somme. Telle eſt la $\div$ $1.\ \infty.\ \infty^2.\ \infty^3$, &c. ∞^{∞}, dont la ſomme n'eſt que ∞^{∞}. Et on le voit encore en y appliquant la Formule $\frac{am^n - a}{m-1}$ (78) car elle donne $\frac{1 \times \infty^{\infty} - 1}{\infty - 1} = \infty^{\infty - 1} = \infty^{\infty}$.



SECTION III.

De la Suite naturelle infinie élevée à ses Puissances, & comparée à la Progression géométrique correspondante.

LA Suite naturelle des Nombres n'est appellée de ce nom, que parce que c'est la premiere, & quelquefois la seule qui s'offre à l'esprit des hommes, & qu'elle est toujours enveloppée dans toutes les autres, quelque recherchées & quelque compliquées qu'elles soient. Ainsi il importe de la connoître & de l'approfondir le plus qu'il se puisse, car peut-être ne l'a-t'elle pas encore été tout-à-fait, quoi-que bien exposée à la vûe de tout le monde.

Considération de la Suite naturelle des nombres, appellée A. *Qu'elle a une infinité de termes infinis, & une autre infinité beaucoup moindre de termes finis.*

181. J'appelle A la Suite naturelle infinie des Nombres. Il semble que ∞, dernier terme de A, en devroit être le seul terme infini précédé immédiatement d'un terme fini. Car (84 & 85) on n'a conçû que A avoit un dernier terme infini ou ∞, que parce que le nombre de ses termes finis étant ∞, ce même ∞ devoit aussi exprimer son dernier terme. Donc ∞ qui n'est l'expression d'un nombre infini que de termes finis, & qui est en même temps le dernier terme de A, en doit être le seul Infini. Et en effet, dès qu'on est arrivé à l'Infini, A n'est-elle pas terminée, du moins dans son ordre? N'a-t'on pas parcouru une infinité de termes finis, quand on est arrivé au premier Infini?

Mais il s'en faut beaucoup que tout cela ne soit vrai, & il arrive souvent en ces matieres, qu'une idée légitime qu'on a prise, enferme plus qu'on ne pensoit, & mene plus loin.

La somme de A est $\frac{\infty^2}{2}$ (124) donc A a une infinité de termes de l'ordre de ∞ (178). Donc il est déja démontré *à posteriori* qu'elle a une infinité de termes infinis.

182. Mais on peut démontrer *à priori*, & plus clairement

cette même vérité, qui ſe trouvera avoir encore plus d'étendue.

Puiſque *A* eſt une progreſſion arithmétique, dont le dernier terme eſt ∞, ſon terme du milieu eſt $\frac{\infty}{2}$, Infini, après lequel il ne peut y avoir que des Infinis plus grands. De même le terme de ſon 1[er] quart eſt $\frac{\infty}{4}$, encore infini, celui de ſa premiere 100[me] partie eſt $\frac{\infty}{100}$ encore infini ; de ſorte que de l'intervalle infini, qui eſt entre 1 & ∞, diviſé en 100 parties, il y en a déja 99 qui ne peuvent avoir que des termes infinis, & il ne reſte que la 1[re] qui puiſſe en avoir de finis. Il eſt viſible que cette premiere 100[me] partie ſera infinie, puiſqu'elle ſera une partie finie d'un intervalle infini, & par conſéquent elle contiendra encore une infinité de termes. Enfin n étant un nombre fini quelconque, & ſi grand qu'on voudra, & l'intervalle entre 1 & ∞ étant diviſé en ce nombre n de parties, on trouvera toujours qu'il n'y aura que la 1[re] n^{me} partie qui puiſſe avoir des termes finis, & la difficulté ne ſera plus que de ſavoir comment *A* peut encore avoir une infinité de termes finis, car cette infinité doit toujours ſubſiſter, puiſqu'elle eſt née de la premiere ſuppoſition qui a donné ∞.

183. Avant que d'éclaircir cette difficulté, & même afin de l'éclaircir, il faut connoître, autant qu'on le peut, la nature de ce nombre prodigieux d'Infinis contenus dans *A*. Ils ſont tous moindres que ∞, & je les diſtingue tous par ce caractere $\propto$, qui repréſente un Infini indéterminé & variable du même ordre que ∞, qui eſt un Infini fixe.

Comme ils naiſſent de la diviſion qu'on a faite de l'intervalle qui eſt entre 1 & ∞ en un nombre fini n de parties, les $\propto$ qui ſont à la tête de chaque diviſion ſont des $\frac{\infty}{n}$, $\frac{2\infty}{n}$, $\frac{3\infty}{n}$, &c. juſqu'au dernier qui eſt $\frac{\overline{n-1}\times\infty}{n}$, & enfin vient $\frac{n\infty}{n}$ $= \infty$ dernier terme de *A*. Tous ces $\propto$ ont un rapport

exprimable à ∞, en vertu de la diviſion qu'on a faite. Mais dans les intervalles infinis qui ſont entre $\frac{\infty}{n}$ & $\frac{2\infty}{n}$, ou entre $\frac{2\infty}{n}$ & $\frac{3\infty}{n}$, &c. & dont chacun contient un nombre d'Infinis $= \frac{\infty}{n}$, ces Infinis intermédiaires n'ont point en vertu de cette diviſion un rapport exprimable ou déterminable à ∞. Et comme n n'eſt qu'une expreſſion générale & indéterminée d'un nombre fini, il faut regarder les $\propto$ en général comme n'ayant à ∞ qu'un rapport indéterminable, à moins que par quelque ſuppoſition particuliere on ne vienne à le déterminer.

184. La nature générale de ce rapport, tant arithmétique que géométrique, ſe détermine cependant très-aiſément. Dans le nombre infini des $\propto$ il n'y en peut avoir qu'un nombre fini à l'extrémité de A, qui ſoient à une diſtance finie de ∞, & dont par conſéquent la différence à ∞ ſoit finie. En ce cas elle eſt nulle (98) & A finit par un nombre fini d'Infinis égaux, ou, ſi l'on veut, preſque égaux. Tous les autres $\propto$ ſont à une diſtance infinie de ∞, ou ont une différence infinie à ∞. Cette différence eſt donc un $\propto$. Cela revient à l'art. 100.

185. Mais en même temps le rapport géométrique de ∞ aux $\propto$ n'eſt pas infini, ou ∞ n'eſt pas infiniment plus grand que les $\propto$, même que ceux auxquels il a une différence infinie. Car ſoit le moindre $\propto$ poſſible $= \frac{\infty}{n}$, n étant fini & ſi grand qu'on voudra, ∞ eſt à $\frac{\infty}{n}$ :: n. 1.

186. Les $\propto$ ſont donc d'une nature toute différente des Infinis radicaux purs, tels que $\infty^{\frac{1}{n}}$ ou $\infty^{\frac{n}{m}}$, quoique compris dans le même intervalle. ∞ n'eſt point du tout diminué par la ſouſtraction de $\infty^{\frac{1}{n}}$ ou de $\infty^{\frac{n}{m}}$ (136). Et au contraire par la ſouſtraction de $\propto$ il perd une infinité des unités qui le formoient, pourvû que ce $\propto$ ne ſoit pas

tout-à-fait à l'extrémité de *A*. Hors de-là $\infty - \propto = \propto$, ces deux $\propto$ étant presque toujours différens, au lieu que $\infty - \infty^{\frac{1}{n}}$ ou $- \infty^{\frac{n}{m}} = \infty \cdot \infty^{\frac{1}{n}}$ ou $\infty^{\frac{n}{m}}$ n'est point grandeur par rapport à ∞, au lieu que $\propto$ en est une.

187. On peut par-là se confirmer en passant, combien, ainsi qu'on l'a déja vû, la progression arithmétique & la géométrique correspondante sont opposées : car les $\infty^{\frac{1}{n}}$ ou $\infty^{\frac{n}{m}}$ & les $\propto$ sont des Infinis nés de deux divisions d'un même intervalle infini en un nombre fini de parties, mais l'une de ces divisions étoit géométrique, l'autre arithmétique.

188. Puisque ∞ n'a qu'un rapport fini aux $\propto$ (185) $\frac{\infty}{\propto}$ est un entier fini, plus une fraction le plus souvent, & $\frac{\propto}{\infty}$ est une fraction finie moindre que 1.

189. Les $\propto$ ont entr'eux des différences finies ou infinies selon les lieux où ils sont pris.

190. Ils n'ont entr'eux que des rapports finis, puisqu'ils n'en ont que de tels à ∞, le plus grand de tous les termes de *A*. Donc $\frac{\propto}{\propto}$ est un Fini.

191. Pour revenir à la difficulté de l'article 182, il faut concevoir *A* divisée en un nombre $\propto$ de parties, au lieu qu'elle l'étoit en un nombre fini *n*. Chaque division contiendra un nombre $\frac{\infty}{\propto}$ de termes, nombre fini (188), & cela doit être, puisqu'il y a une infinité de divisions. Les termes qui seront à la tête de chaque division, seront selon l'art. 183 $\frac{\infty}{\propto} \cdot \frac{2\infty}{\propto} \cdot \frac{3\infty}{\propto}$, &c. le dénominateur $\propto$ étant toujours le même, & ces termes seront toujours finis. Mais comme dans ces expressions les Coëfficiens 1, 2, 3, &c. du numérateur ∞ sont toujours croissans, il en viendra enfin un qui

ſera $\propto$, & on aura $\frac{\propto\infty}{\propto}$, terme infini, puiſque $\frac{\propto}{\propto}$ eſt fini (190).

Cet $\frac{\propto\infty}{\propto}$ ſera une partie déterminée de ∞, ſelon le rapport fini qu'auront entr'eux les deux $\propto$, l'un du numérateur, l'autre du dénominateur, le 1er étant ſuppoſé toujours moindre que le 2^{d}.

Juſqu'à cet $\frac{\propto\infty}{\propto}$ tous les termes de *A* auront été finis, & pour en trouver un nombre infini, je n'ai qu'à concevoir que le $\propto$ du numérateur, qui doit alors être le 1er de tous les $\propto$, étoit à une diſtance infinie de 1, premier terme de *A*, ce qui eſt fort naturel & fort poſſible, puiſqu'un $\propto$ eſt un terme infini. Je dis ſeulement que cela eſt *naturel* & *poſſible*, & non pas *néceſſaire*, parce qu'on verra dans la ſuite qu'il ne l'eſt pas abſolument. Si $\propto$ du numérateur de $\frac{\propto\infty}{\propto}$, premier terme infini de *A*, a été à une diſtance infinie de 1, il y a eu donc avant lui une infinité de termes finis qui étoient les $\frac{1\infty}{\propto}$, $\frac{2\infty}{\propto}$, $\frac{3\infty}{\propto}$, ou ∞ avoit toujours un Coëfficient fini.

Donc le prodigieux nombre d'Infinis qu'on a trouvés dans *A* par l'art. 182, n'empêche pas qu'il ne puiſſe y avoir une infinité de termes finis, ce qui eſt la difficulté qu'on avoit à lever.

192. Si à la ſuppoſition de l'art. précédent, par laquelle dans $\frac{\propto\infty}{\propto}$ le $\propto$ du numérateur eſt le 1er des $\propto$, on ajoute que le $\propto$ du dénominateur en ſoit le dernier, il faudra concevoir celui du numérateur toujours croiſſant, & celui du dénominateur conſtant, moyennant quoi on verra que $\frac{\propto\infty}{\propto}$ eſt toujours infini, & moindre que ∞, juſqu'à ce qu'enfin le $\propto$ du numérateur étant parvenu à être égal à celui du dénominateur, on ait $\frac{\propto\infty}{\propto} = \infty$.

193. Donc A a une infinité de termes finis, & une infinité d'Infinis; mais la 1[re] infinité prodigieusement moindre que la 2[de], quoi-que du même ordre. Le rapport de 1 à 1000, &c. où l'on mettra tel nombre fini de zero qu'on voudra, n'exprimeroit pas le rapport de ces deux infinités, car selon l'art. 182 $\frac{\infty}{1000 \&c.}$ seroit encore un nombre infini. Ce rapport, quoique fini, est indéterminable.

194. Tous les termes de A sont utiles à sa somme, puisqu'ayant des termes de deux ordres, elle en a une infinité dans chacun (171 & 172).

195. Une Suite composée d'un nombre ∞ de termes, tous $= \infty$, auroit sa somme $= \infty^2$, qui ne seroit que double de la somme de A, ce qui fait encore voir très-facilement combien les Infinis de A qui précedent ∞, tous moindres que lui, & très-lentement croissans, doivent être en une prodigieuse quantité.

196. Concevons maintenant que tous les termes de A sont élevés au quarré, ce qui donne A^2, 1, 4, 9, 16, &c. ∞^2. Il est visible que A^2 a autant de termes que A.

Considération de la Suite naturelle quarrée, ou de A^2.

Je représente les deux Suites aux yeux, pour mieux faire voir leur correspondance.

	Termes finis.			B		
A.	1. 2. 3. 4, &c.	n	nn	|	Infinis.	∞.
A^2.	1. 4. 9. 16, &c.	nn		|	Infinis.	∞^2.
				C		

La ligne BC marque dans A la séparation des termes finis d'avec les Infinis, desorte qu'à la gauche de BC ils sont tous Finis, & à sa droite Infinis, & en même temps elle marque dans A^2, qu'au moins à sa droite ils seront tous Infinis, car les Infinis de A ne peuvent qu'augmenter dans A^2 par l'élévation au quarré.

Soit nn le plus grand quarré fini, qui soit dans A, & posé par conséquent à la gauche de BC, & tout auprès: il sera aussi dans A^2, puisqu'il est le quarré de n, un des termes de A.

Mais il sera dans A^2 sous n sa racine, & n est dans A, fort éloigné de nn, & d'autant plus que n est plus grand. Mais nn est le plus grand quarré fini possible, & dans A^2 il y a encore loin de nn à la ligne BC. Donc dans A^2 il n'y a plus de termes finis après nn, ou bien il y a dans cette Suite un vuide depuis nn jusqu'à la ligne BC; de sorte que tous les termes Finis qui sont dans A depuis n jusqu'à la ligne BC, n'ont point de correspondans ou de quarrés dans A^2, ce qui est manifestement impossible. Donc après nn, il vient dans A^2 des Infinis, & A^2 en a plutôt que A.

197. Cette conclusion n'est point étonnante: car puisque A^2 s'éleve jusqu'à ∞^2, infiniment plus grand que ∞ où A se termine, & qu'elle n'a qu'un cours de la même étendue, il est très-naturel, & même absolument nécessaire que A^2 arrive à un simple Infini plutôt que A. Mais si cela est, les Infinis qui seront dans A^2 depuis nn jusqu'à la ligne BC seront donc des quarrés de termes finis correspondans qui étoient dans A depuis n jusqu'à la ligne BC: or comment des quarrés de termes finis peuvent-ils être infinis? Le fini multiplié par le fini, & quelque nombre fini de fois qu'il le soit, ne peut être que fini. C'est une vérité reçûe de tous les Géometres, c'est la Regle invariable d'une infinité de calculs.

J'avoue que du premier coup d'œil cette difficulté est accablante, & elle m'auroit fait abandonner tout ce Sisteme de l'Infini, si je n'avois vû un grand nombre de fortes raisons qui la diminuoient, car je n'ose presque dire qu'elles la levoient entierement, & qui m'engageoient à admettre l'étrange Paradoxe de termes finis devenus infinis par l'élévation au quarré.

1°. Ce Paradoxe n'est pas plus terrible que celui d'un Infini plus grand, & même infiniment plus grand, qu'un autre Infini, contre lequel on peut faire des objections apparemment invincibles. Mais il est vrai qu'il est établi, & que l'on reçoit avec moins de peine, & même sans peine, ce que l'on voit que tous les autres reçoivent. L'autorité a son effet, même en Géométrie, sans que l'on s'en apperçoive.

2°.

2°. Les Finis que je suppose qui deviennent Infinis, ne le deviennent que dans le passage obscur & incompréhensible, & cependant constant, du Fini à l'Infini. C'est là que se font des changemens que nous ne connoissons, à la vérité, que par les effets, c'est-à-dire, par les résultats des Calculs : mais quoiqu'on ne sache pas comment ils se font, il est pourtant bon de savoir que c'est là où ils se font, & de pouvoir juger, du moins *à posteriori*, quels ils ont dû être. Cela pourra fournir des principes, qui ensuite feront connoître les changemens *à priori*.

3°. Il y a bien de la différence entre le Fini *fixe*, pour ainsi dire, & le Fini *en mouvement*, ou, comme disent nos habiles Voisins, *en fluxion*, pour devenir Infini. Tous les Finis ne sont, dès que nous les pouvons déterminer, qu'au commencement de la Suite *A*, quelque grands qu'ils soient; & à cause qu'elle est d'une étendue infinie, ils ne sont pas plus avancés vers son extrémité que 1, premier terme de *A*. Ils sont fixes, parce qu'ils ne sont encore en aucun mouvement pour devenir Infinis, ou du moins dans un si petit mouvement, qu'il n'est à compter pour rien par rapport à celui qu'ils ont encore à faire. Mais quand ils ont déja fait une partie infinie de ce mouvement, là commencent les degrés inconnus par lesquels ils doivent passer & s'élever à l'Infini, là ils deviennent d'une nature moyenne, qui les rend propres à se changer en Infinis par des changemens legers qui n'auroient pas suffi auparavant. Tous les Calculs n'operent que sur des Finis fixes, & jamais sur les Finis en mouvement : & de-là vient la Regle invariable, que le Fini multiplié par le Fini n'est que Fini. Il est bien sûr qu'un Calcul ne tombera jamais dans le cas de l'exception : mais il peut être permis à la Théorie d'aller plus loin, & de l'appercevoir, supposé qu'il soit fondé.

4°. Comme nous n'opérons que sur des Finis qui sont tout à l'origine des Suites, de même quand nous opérons sur des Infinis, ce n'est que sur ceux qui sont tout à l'extrémité, & qui ont pris la nature entiere & complete d'Infini; desorte

que nous ne saisissons que les deux bouts des Suites, encore n'y a-t'il que le premier bien saisi & bien connu, l'autre n'est guère qu'entrevû, & supposé. Tout l'entre-deux infini nous échappe, & il doit cependant y arriver tout ce que l'Infini a de plus merveilleux.

5°. Si l'on admet le Paradoxe, il y a des Finis de A qui deviennent Infinis dans A^2, & ils ne pourront être que de l'ordre de ∞, & assez petits dans cet ordre. Ils feront le degré & la nuance des Finis de A^2 aux infinis du 2d ordre ou aux ∞^2 : or ces degrés & ces nuances sont nécessaires dans les Suites, & tous les Géometres en conviennent. Si tout ce qui est Fini dans A, demeure Fini dans A^2, tout ce qui étoit Infini dans A, deviendra dans A^2 infini du 2d ordre, & A^2 sautera brusquement du Fini à ∞^2, sans passer par ∞, ce qui n'a absolument aucun exemple dans des Suites, dont la gradation soit aussi lente que celle de A^2.

6°. Si on n'admet pas le Paradoxe, je démontrerai invinciblement le contraire de quelques vérités constantes & reçues, & il y aura démonstration contre démonstration. On en verra des exemples, quand l'ordre de cet Ouvrage les amenera.

7°. Le Paradoxe admis ne conduit jamais à aucune conclusion fausse. Au contraire, il se lie nécessairement aux vérités déja connues, & en produit beaucoup de nouvelles. C'est de quoi l'on sera pleinement convaincu dans la suite. S'il est faux, il est donc parfaitement équivalent à quelque chose de vrai, & en remplit bien heureusement la place.

En attendant ce vrai, que je ne connois pas, je vais prendre ce Paradoxe pour une vérité démontrée dans l'art. précédent, me réservant toutefois, & je le dis avec la derniere sincérité, à le rejetter absolument, dès qu'on me fera voir que sans l'employer on peut faire un Sisteme lié de l'Infini en Géométrie, ou qu'il y a quelque autre idée à lui substituer, qui fasse le même effet sans avoir la même difficulté, ou une équivalente.

198. J'appelle *Finis indéterminables*, les termes finis de A

qui deviennent infinis dans A^2 par l'élévation au quarré : car comme ils sont dans le passage que fait A^2 du Fini à l'Infini, ils ne peuvent jamais être connus ni déterminés, comme les termes qui sont à l'origine de A ou de A^2.

199. Un terme quelconque de A^2 étant nn, nn exprime aussi le quantieme, il est dans A, & sa racine n le quantieme, il est dans A^2. Ainsi 16 est le 16[me] terme de A, & est le 4[me] de A^2. 100 est le 100[me] de A, & le 10[me] de A^2. Donc si nn est le 1[er] terme infini de A^2, & par conséquent si n est le 1[er] terme fini indéterminable de A qui soit devenu infini dans A^2, nn n'est qu'à une distance finie de 1, premier terme de A^2; car sa racine n, qui est finie, exprime son quantieme dans A^2, & ce quantieme n'est donc que fini. Donc le 1[er] terme infini de A^2 n'est qu'à une distance finie de 1 son 1[er] terme.

200. Mais n étant ici un Fini indéterminable, cette distance finie est indéterminable, & plus grande que toutes celles qui peuvent être déterminées ou connues.

201. Donc A^2 n'a qu'un nombre fini, mais indéterminable en grandeur, de termes finis.

202. Et puisque A avoit un nombre infini de termes finis, il y a donc une infinité de ses Finis qui deviennent Infinis dans A^2.

203. Donc A formée d'une infinité de Finis, & d'une infinité beaucoup plus grande d'Infinis (193) a ses Finis de deux especes, les uns Finis déterminables & connus, mais en nombre seulement fini indéterminable, les autres Finis indéterminables en nombre infini.

204. Il est aisé de voir que la source des changemens qui arrivent à A^2 par rapport à A, est que A^2 vers son origine ne prend que des termes qui sont dans A, mais qu'elle en prend peu, & en saute toujours de plus en plus. A^2 dès ses deux 1[ers] termes, qui sont 1 & 4, saute deux termes de A, entre 4 & 9 elle en saute quatre, entre 9 & 16 six, & toujours ainsi selon la Suite des Pairs; & enfin comme on vient de voir, elle en a sauté un nombre infini, lorsqu'elle n'est encore

arrivée qu'à une diſtance finie de ſon origine, ou n'a eu qu'un cours fini.

205. Quoique A^2 faſſe de plus grands pas que A, elle ne les fait que proportionnés à ceux de A, & comme ceux-ci, qui ne ſont que la différence conſtante 1, ſont d'une grande lenteur pour aller de 1 à ∞, A^2 dont on ſait que les différences ſont la Suite des nombres impairs 3, 5, 7, &c. ne peut pas aller de 1 à ∞^2 en faiſant des pas infinis, c'eſt-à-dire, ſauter de 1 à ∞^2 ſans paſſer par ∞. Donc A^2 a des termes de l'ordre de ∞, & elle en doit avoir de cet ordre, lorſque A n'en a encore que de correſpondans finis; ce ſont les Finis indéterminables de A, qui devenus infinis dans A^2, ſont les termes de l'ordre de ∞ par leſquels A^2 paſſe du Fini à ∞^2, & ils ſont en nombre infini (202).

106. Mais il y a encore plus : la gradation lente de A^2, fondée ſur celle de A, ne permet pas que tous les Infinis de A deviennent dans A^2 des Infinis de l'ordre de ∞^2. D'ailleurs, puiſqu'il y a des Finis ſi grands, qu'étant quarrés ils ſortent de leur ordre, & deviennent infinis, l'analogie demande qu'il y ait des Infinis ſi petits, qu'étant quarrés ils ne ſortent point de leur ordre, & ſi cela peut être, cela eſt. Or $\infty^{\frac{1}{2}}$ eſt tel, qu'étant quarré il ne ſort point de l'ordre potentiel de ∞ dont il étoit, donc ou $\infty^{\frac{1}{2}}$, s'il eſt dans A, & des Infinis d'une grandeur approchante, ou ſi $\infty^{\frac{1}{2}}$ n'eſt pas dans A, ces Infinis ſeuls d'une grandeur approchante feront tels, qu'étant quarrés ils ne ſortiront point de l'ordre de ∞, & ils ſe joindront dans A^2 aux Finis indéterminables devenus de cet ordre, & moindres qu'eux.

207. En un mot, l'élévation au quarré doit agir de la même maniere ſur les Finis & ſur les Infinis de A. Elle éleve à l'ordre ſupérieur un nombre infini de Finis, & n'en laiſſe qu'un nombre fini indéterminable dans leur premier ordre. Donc elle éleve à ∞^2 un nombre infini des ∞, & en laiſſe un nombre fini indéterminable dans l'ordre des ∞, & cela

ajoute à l'art. précedent que le nombre des ∞ de A, qui ne fortent point de cet ordre dans A^2, ne foit que fini.

208. Donc le nombre infini des Finis indéterminables de A, devenus de l'ordre de ∞ dans A^2, n'eft augmenté que d'un nombre fini par le nombre des Infinis de A qui demeurent de l'ordre de ∞ dans A^2.

209. Donc le nombre infini des Finis de A étant beaucoup moindre que celui de fes Infinis (193), & tous les Finis de A n'étant pas devenus infinis dans A^2, & le nombre infini de ceux qui le font devenus n'étant augmenté que d'un nombre fini (208), il fuit que le nombre des termes de l'ordre de ∞^2 dans A^2 eft plus grand, non feulement que le nombre des termes finis qui eft fini, mais que le nombre des termes de l'ordre de ∞, qui eft infini.

210. Donc A^2 eft formée 1° de termes Finis en nombre fini, 2° de termes de l'ordre de ∞ en nombre infini, 3° de termes de l'ordre de ∞^2 en nombre infini beaucoup plus grand.

211. Donc la fomme de A^2 eft un Infini du 3me ordre, & tous les termes Finis y font inutiles (175).

212. Le nombre des ∞^2 de A^2 eft moindre que le nombre des ∞ de A (206). D'un autre côté tous les Finis de A^2 font inutiles à fa fomme; ce qui fait le même effet par rapport à la fomme, que fi A^2 étoit compofée d'un moindre nombre de termes que A. Enfin il faut faire encore une obfervation. Ce qui fait que la fomme de A n'eft qu'une partie de ∞^2, & non pas ∞^2 entier, c'eft que tous fes termes ne font pas chacun $=\infty$, mais tous inégaux depuis 1 jufqu'à ∞. D'ailleurs ils font les moins inégaux dans leur total qu'il fe puiffe (72). Donc s'ils étoient plus inégaux, comme ils le feroient effectivement dans une progreffion géométrique correfpondante où ils feroient les plus inégaux qu'il fe puiffe (72), leur fomme feroit moindre (67); & fi dans une Suite quelconque comprife, comme A, entre 1 & ∞, ils étoient plus inégaux que dans A, & que leur fomme fût de l'ordre de ∞^2, il faudroit du moins que cette fomme fût une moindre

partie de ∞^2 que n'eſt celle de *A*, c'eſt-à-dire, $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{4}$, &c. puiſque celle de *A* en eſt $\frac{1}{2}$. Or le même raiſonnement ſubſiſte à l'égard de A^2 comparé à *A*. Les termes de A^2 étant viſiblement plus inégaux dans leur total que ceux de *A*, la ſomme de A^2 qui eſt de l'ordre de ∞ doit être une moindre partie de ∞^3, que celle de *A* n'eſt de ∞^2. Donc par les trois raiſons énoncées dans cet article, la ſomme de *A* étant $=\frac{\infty^2}{2}$ ou $\frac{1}{2}$ de ∞^2, la ſomme de A^2 ſera une moindre partie de ∞^3, c'eſt-à-dire, par ex. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c.

213. A^2 tend & arrive à l'égalité, car les termes de *A* y tendent & y arrivent, & par conſéquent auſſi ceux de A^2, qui en ſont les quarrés.

Conſidération de A^3.

214. Soit maintenant A^3, ou *A* élevée au cube, qui eſt 1. 8. 27. 64, &c. ∞^3.

Puiſqu'il y a dans *A* des Finis indéterminables, & en nombre infini, qui par l'élévation au quarré deviennent Infinis, il eſt évident que non ſeulement ils ne ceſſeront pas de l'être par l'élévation au cube; mais que ſi on cube *A*, d'autres Finis indéterminables qui n'avoient pas été aſſez grands pour devenir infinis par l'élévation au quarré, le deviendront par l'élévation au cube. De même d'autres Finis indéterminables encore moindres qui n'étoient pas devenus infinis par l'élévation au cube, le deviendront par l'élévation au quarré-quarré, & toujours ainſi de ſuite. Donc ce ſera la propriété ou le caractere général des Finis indéterminables de devenir infinis par l'élévation à quelque puiſſance finie.

215. Dans A^3 les premiers Finis indéterminables qui par l'élévation au cube ſeront devenus infinis, ne ſeront que de l'ordre de ∞. Donc A^3 aura des termes finis à ſon origine, enſuite des ∞, & à ſon extrémité des ∞^3, & comme elle ne peut aller de ∞ à ∞^3 ſans paſſer par ∞^2, elle aura donc des termes des 4 ordres, des Finis, des ∞, des ∞^2, & des ∞^3.

216. Il eſt très-aiſé de voir que le nombre des Finis de A^3 ne ſera que fini, & moindre que celui des Finis de A^2,

mais toujours Fini indéterminable. Le nombre total des Infinis de A^3 sera donc plus grand que celui des Infinis de A^2 : mais il ne sera plus grand que de la quantité dont le nombre des Finis de A^2 surpasse le nombre des Finis de A^3 : or cette quantité ne peut être que finie, ces deux nombres étant finis ; donc le nombre total des Infinis de A^3 ne surpassera que d'une quantité finie celui des Infinis de A^2.

217. La différence finie du nombre total des Infinis de A^3 & de A^2 étant nulle par rapport à ces deux nombres infinis, & par conséquent ces deux nombres pouvant être pris pour égaux, d'un autre côté le nombre total des Infinis de A^3 étant composé d'Infinis de 3 ordres différens (215) au lieu que le nombre des Infinis de A^2 n'est composé que d'Infinis de 2 ordres, il suit que dans A^3 le nombre des Infinis de chaque ordre sera moindre que n'étoit le nombre des Infinis de chaque ordre dans A^2.

218. Donc le nombre des ∞ dans A^3 sera moindre que dans A^2, mais de plus il ne sera que fini. Car si A^2 qui éleve A à la puissance immédiatement supérieure, fait l'effet de changer en ∞ un nombre des Finis de A, tel que le nombre de ces Finis devenus ∞, est infini par rapport au nombre des Finis qui demeurent Finis, à plus forte raison A^3 qui fait de plus grands pas que A^2 doit-elle changer en ∞^2 une infinité des ∞ de A^2, & n'en laisser qu'un nombre fini dans l'ordre de ∞. Donc A^3 n'aura qu'un nombre fini de ∞, & un infini de ∞^2.

219. Le nombre infini des ∞^2 de A^3 sera encore augmenté par des ∞^2 de A^2 qui demeureront de l'ordre de ∞^2 dans A^3 : mais ils ne seront qu'en nombre fini par la même raison que les ∞ de A qui sont demeurés de l'ordre de ∞ dans A^2 n'ont été qu'en nombre fini (207).

220. De-là il suit aussi que le nombre des ∞^3 de A^3 est infini.

221. Donc A^3 est composée 1° de Finis en nombre fini. 2° De ∞ en nombre fini. 3° De ∞^2 en nombre infini. 4° De ∞^3 en nombre infini.

222. A qui a des termes de 2 ordres, a le nombre des termes de l'ordre du Fini beaucoup moindre que celui des termes de l'ordre de ∞ (193). Et par conséquent le nombre des termes de ces différens ordres est croissant, à compter de l'origine de A. De même A^2 qui a des termes de 3 ordres, a le nombre des termes de ses différens ordres croissant depuis l'origine (210). Donc pour conserver l'analogie qui doit être entre A, A^2 & A^3, il faut que dans A^3, qui a des termes de 4 ordres, le nombre des termes de chaque ordre soit aussi croissant; c'est-à-dire, que le nombre des termes finis étant fini, celui des ∞ soit un Fini plus grand, & que celui des ∞^2 étant infini, celui des ∞^3 soit un Infini plus grand.

223. A^3 a une somme de l'ordre de ∞^4, à laquelle tous les Finis & tous les ∞ sont inutiles. Ses ∞^2 qui y sont utiles sont en moindre nombre que les ∞^3 (222), & enfin les termes de A^3 sont plus inégaux que ceux de A^2. Donc en suivant le raisonnement de l'art. 212, la somme de A^3 sera une moindre partie de ∞^4, que la somme de A^2 n'étoit de ∞^3.

224. A^3 tend & arrive à l'égalité aussi-bien que A^2, & par la même raison (213).

225. On voit par tout ce qui a été dit, que quand on change A en A^2, il n'y a qu'un nombre fini des termes finis de A qui ne s'élevent point d'ordre, quoiqu'ils s'élevent de grandeur, & qui demeurent *immobiles* quant à l'ordre, & qu'il y a un nombre infini de ces mêmes termes finis qui sont *mobiles*, ou qui s'élevent d'ordre. En même temps, ou dans le même changement de A en A^2, il n'y a qu'un nombre fini des ∞ de A qui demeurent immobiles, & tous les autres ∞ en nombre infini sont mobiles. De même quand A^2 se change en A^3, du nombre infini des ∞ de A^2; car les Finis de A^2 n'étant qu'en nombre fini, ils ne peuvent donner lieu à cette comparaison qui demande un nombre infini de termes d'un même ordre, de ce nombre infini, dis-je, des ∞ de A^2, il n'y en a qu'un nombre fini d'immobiles, ou qui demeurent des ∞, & tous les autres en nombre

infini

Infini deviennent des ∞^2, ou sont mobiles, & pareillement du nombre infini des ∞^2 de A^2 il n'y en a qu'un nombre fini d'immobiles, & tous les autres sont mobiles. Or il est à remarquer qu'un ordre étant composé d'une infinité de termes, les immobiles, qui sont toujours en nombre fini, sont toujours à l'origine de l'ordre, & les mobiles en nombre infini, toujours vers l'extrémité & jusqu'à l'extrémité.

Cela répond à une difficulté qu'on auroit lieu de faire dans le Sisteme commun de l'Infini, pourquoi le Fini élevé à quelque puissance finie que ce soit, demeure-t'il toujours dans son ordre, au lieu que l'Infini pareillement élevé, s'éleve toujours d'ordre ? Car le Fini n'étant à l'égard de ∞ que ce qu'est ∞ à l'égard de ∞^2, il est contre cette analogie, que ∞, dès qu'il est quarré, s'éleve d'ordre, tandis que le Fini quarré demeure dans le sien. La réponse est, que le fait supposé n'est pas vrai, & que c'est parfaitement la même chose pour le Fini & pour l'Infini. Dès que le Fini est à une certaine distance finie, mais indéterminable, de l'origine de son ordre, il s'éleve d'ordre étant quarré, & jusque là il ne s'en éleve point ; de même ∞ étant quarré ne s'éleve point d'ordre, tant qu'il n'est qu'à une certaine distance finie indéterminable de l'origine de son ordre, & passé cela il s'éleve. Mais ce qui nous jette dans l'erreur sur la comparaison du Fini & de l'Infini à cet égard, c'est que nous ne connoissons le Fini qu'à l'origine de son ordre, nous n'operons sur lui qu'en le prenant à sa naissance ; & au contraire l'Infini à l'origine de son ordre nous est absolument inconnu, & le peu de connoissance que nous en avons, roule sur un Infini plein, pour ainsi dire, & qui a franchi un passage immense pour être devenu ce qu'il est. De là vient que nous ne connoissons que des Finis, qui élevés à une puissance finie, ne s'élevent point d'ordre, & des Infinis au contraire qui s'en élevent.

226. Si l'on prend A^4, 1. 16. 81. 256, &c. ∞^4. Il est aisé de voir par l'application de tout ce qui a été dit, 1°. que A^4 aura des Finis en nombre fini, des ∞ en nombre fini, *Considération de A^4.*

K

de ∞^2 en nombre fini, des ∞^3 en nombre infini, & des ∞^4 en nombre infini.

2°. Que le nombre des termes de ces cinq différens ordres sera croissant depuis l'origine.

3°. Que A^4 aura une somme de l'ordre de ∞^5, à laquelle les Finis, les ∞, & les ∞^2 seront inutiles.

4°. Que le ∞^5 qui exprimera cette somme, sera dans son ordre un moindre Infini que n'étoit dans le sien le ∞^4 qui exprimoit la somme de A^3.

Considération de A^n *en général.*

227. En général n étant un Exposant fini toujours croissant, dont la 1re valeur est 1, A^n sera toujours telle qu'elle aura un nombre d'ordres $= n + 1$; le nombre des ordres, qui auront un nombre de termes infinis, toujours $= 2$, ce qui donnera le nombre des ordres où le nombre des termes sera fini; le nombre des termes des différens ordres croissant depuis l'origine; le nombre des termes de chaque ordre toujours moindre, à mesure que n sera plus grand; une somme de l'orde de ∞^{n+1} à laquelle les deux derniers ordres seuls seront utiles; & toujours un moindre ∞^{n+1} qui exprimera cette somme, ou, ce qui est le même, ∞^{n+1} divisé par un plus grand nombre.

Considération de A^∞.

228. Si enfin l'exposant $n = \infty$, on a A^∞. 1^∞. 2^∞. 3^∞, &c. ∞^∞. Suite qu'il faut considérer plus particulierement, parce qu'elle contient les puissances infinies de tous les nombres de A, & qu'il est important de connoître les rapports que ces nombres élevés à ∞ ont soit au Fini, soit entr'eux.

2^∞, 2d terme de A^∞, seroit le dernier terme de la progression géométrique infinie, 2^1, 2^2, 2^3, &c. 2^∞, que j'appelle P. Si l'on compare P à A^2, on a d'un côté 2^1. 2^2. 2^3. 2^4. 2^5. 2^6, &c. & de l'autre 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, &c. & l'on voit que $2^1 > 1^2$, $2^2 = 2^2$, $2^3 < 3^2$, $2^4 = 4^2$, $2^5 > 5^2$, $2^6 > 6^2$, &c. & que depuis $2^5 = 3^2$, tous les termes de P

ſont plus grands que les correſpondans de A^2, & fort croiſſans par rapport à eux. Donc ſi A^2 n'a qu'un nombre fini de termes finis, à plus forte raiſon P n'en a-t'elle qu'un nombre fini, & même elle n'en a qu'un nombre fini beaucoup moindre. Donc P après un nombre de termes fini, mais indéterminable, arrive à l'Infini. Donc 2 n'ayant qu'un expoſant x, fini indéterminable, eſt infini, ou 2^x eſt de l'ordre de ∞.

229. Il ſuit de là que non-ſeulement 2^∞, dernier terme de P, eſt plus grand que ∞^2, dernier terme de A^2; mais qu'il doit être d'un grand nombre d'ordres au-deſſus de ∞^2, puiſqu'après qu'on a eu dans P, 2^x, il reſte encore un nombre infini d'expoſans à donner à 2, avant qu'il ſoit 2^∞.

230. Pour le voir plus en détail, & plus ſûrement, je compare P aux A^n qui ſuivent A^2, & pour plus de facilité du calcul, aux ſeules A^n où n eſt un nombre pair.

Le 16[me] terme de A^4, qui eſt 16^4, eſt égal au 16[me] de P qui eſt 2^{16} : car $16^4 = 2^{4 \times 4} = 2^{16}$, & après cela le 17[me] terme de P eſt plus grand que le 17[me] de A^4, & toujours ainſi de ſuite. Donc $2^\infty > \infty^4$.

De même en comparant P à A^6, on a pour le 1[er] terme de P, plus grand que le correſpondant de A^6, après lequel tous les termes de P ſont plus grands, le 30[me] terme de P qui eſt de $2^{30} > 30^6$ ſon correſpondant : car tirant de part & d'autre le $\sqrt[6]{}$, on a $2^5 > 30^1$. Donc $2^\infty > \infty^6$.

Si l'on prend A^8, le 44[me] terme de P qui eſt 2^{44} eſt plus grand que 44^8 : car en tirant de part & d'autre la $\sqrt[4]{}$, on a $2^{11} = 2048$, plus grand que $44^2 = 1936$. Donc $2^\infty > \infty^8$.

Il réſulte de ces quatre comparaiſons que le 1[er] terme de P, plus grand que le correſpondant de A^n, & après lequel P croît toujours plus que A^n, eſt le 5[me] ſi P eſt comparée à A^2 le 17[me] ſi P eſt comparée à A^4, le 30[me] ſi P eſt comparée à A^6, le 44[me] ſi P eſt comparée à A^8.

Or en considérant ces 4 nombres, 5, 17, 30, 44, on les trouve très-réguliers, puisque leurs différences sont la progression arithmétique naturelle 12, 13, 14, & cette extreme régularité pourroit suffire pour persuader qu'elle se soutiendra toujours, mais de plus on le trouvera par le calcul pour les A^n suivantes. Donc la progression arithmétique des différences, qui a commencé par 12, 13, 14, continue par 15, 16, 17, &c. & les termes dont ces nombres sont les différences, & qui étoient 5, 17, 30, 44, continueront par être 59, 75, 92, &c. c'est-à-dire, que P à son 59me terme commencera à croître toujours au-dessus de A^{10}, à son 75me au-dessus de A^{12}, à son 92me au-dessus de A^{14}, &c. Donc $2^\infty > \infty^{14}$, &c.

231. A^n où n est pair, étant exprimée en général, il est aisé de trouver en général le quantieme terme sera dans P celui où elle commencera à croître au-dessus de A^n.

La Suite de ces quantiemes est, 5, 17, 30, 44, 59, &c. & celle de leurs différences, 12, 13, 14, 15, &c. progression arithmétique, dont la différence est 1, le 1er terme 12, le nombre des termes correspondant à une A^n quelconque, $\frac{n-2}{2}$. Car le nombre des termes de la suite des quantiemes pour A^n est toujours $\frac{n}{2}$; si $A^n = A^2$, $\frac{2}{2} = 1$, & 5, premier terme de la Suite des quantiemes est celui qui désigne à quel terme P croît pour toujours au-dessus de A^2. Si $A^n = A^4$, $\frac{n}{2} = 2$, & 17, second terme de la Suite des quantiemes, désigne le terme où P croît au-dessus de A^4, &c. Donc $\frac{n}{2}$ est toujours le nombre des termes de la Suite des quantiemes, dont le dernier est celui dont on a besoin pour l'A^n proposée. Donc le nombre des termes de la Suite des

différences des quantiemes eſt $\frac{n}{2} - 1 = \frac{n-2}{2}$. Donc la ſomme d'un nombre quelconque de termes de cette Suite des différences eſt $\frac{42n + nn - 88}{8}$.

Cette ſomme eſt égale au dernier terme correſpondant de la ſuite des quantiemes, moins 5, premier terme de cette Suite. Donc $\frac{42n + nn - 88}{8} + 5 = \frac{42n + nn - 48}{8}$ eſt le dernier terme de la Suite des quantiemes, ou celui que l'on cherche pour l'A^n propoſée. Ainſi ſi $n = 10$, on a $\frac{472}{8} = 59$; c'eſt-à-dire, que ſi on compare P à A^{10}, P commence pour toujours à ſurpaſſer A^{10} à ſon 59me terme.

232. par cette expreſſion $\frac{42n + nn - 48}{8}$, on voit que tant que n eſt Fini déterminable, P commence à ſurpaſſer A^n à un terme qui n'eſt qu'à une diſtance finie déterminable de l'origine de P, & que par conſéquent P ſurpaſſe A^n durant un cours infini. Donc $2^\infty > \infty^n$ & même plus élevé de pluſieurs ordres, quelque grand nombre fini déterminable que ſoit n.

233. Mais lorſque n eſt devenu un Fini indéterminable x qui par l'élévation au quarré eſt infini; c'eſt-à-dire, quand on compare P à A^x, $\frac{42n + nn - 48}{8}$ devient $\frac{42x + xx - 48}{8} = \frac{xx}{8} = \frac{\infty}{8}$, xx étant alors un Infini, donc P commence à ſurpaſſer A^x à un terme dont le quantieme eſt exprimé par $\frac{\infty}{8}$. Or ce terme eſt bien éloigné d'être le ∞^{me} ou dernier. Donc 2^∞ eſt beaucoup au-deſſus de ∞^x, dernier terme de A^x. quelque grand nombre fini indéterminable que ſoit x.

234. Donc enfin 2^∞ ne ſauroit être égal qu'à ∞^∞, c'eſt-à-dire, à ∞ élevé à quelque puiſſance infinie, moindre

que ∞, mais dont le rapport à ∞ est absolument inconnu.

Que 2^∞ est d'une infinité d'ordres au dessus de ∞.

235. Donc $2^\infty = \infty^\infty$ est d'une infinité d'ordres au-dessus de ∞.

136. *P* a donc des termes d'un nombre infini d'ordres, mais non pas $= \infty$. Et en effet il est impossible qu'elle ait ce nombre de différens ordres $= \infty$, puisque le nombre de ses termes n'est que $= \infty$, & qu'elle ne change pas d'ordre à chaque terme : car elle en a d'abord un nombre fini indéterminable dans le seul ordre du Fini. Ensuite elle en a dans l'ordre de ∞, de ∞^2 &c. mais toujours un moindre nombre, ce qui est visible par la grandeur des pas qu'elle fait.

237. Quand une Suite a plusieurs termes dans un même ordre, j'appelle cela y *séjourner* ; si elle a des termes consécutifs dans des ordres consécutifs, elle *passe* par ces ordres ; si elle a des termes consécutifs dans des ordres non consécutifs, elle *saute* quelques ordres.

Il s'agit de savoir si *P* ayant séjourné à son origine, passe ou saute à son extrémité, & pour le déterminer il faut observer qu'une Suite croissante ayant une gradation réguliére, si elle doit séjourner plusieurs fois & passer, elle séjourne avant que de passer, & séjourne toujours moins; & que si elle doit passer & sauter, elle passe avant que de sauter ; & que si elle doit après cela faire plusieurs sauts, elle les fait toujours plus grands, ou croissants. Donc si *P* arrivé à ses deux derniers termes ne fait que passer, elle n'a point sauté précédemment. Or son dernier terme étant 2^∞, le pénultieme qui en est $\frac{1}{2}$, est $\frac{2^\infty}{2} = 2^{\infty - 1}$, où il faut remarquer que -1 ne disparoît point dans cet exposant devant ∞ : car on auroit $\frac{2^\infty}{2} = 2^\infty$, ce qui est absurde. Donc l'exposant $\infty - 1$ signifie que le terme qui en est affecté, est de l'ordre immédiatement inférieur à celui qui est affecté de ∞. Donc $2^{\infty - 1}$ & 2^∞ sont de deux ordres consécutifs, & *P* à son extrémité ne fait que passer sans sauter jamais.

238. Donc 2^{∞} eſt ſeul de ſon ordre dans *P*, & il fait ſeul la ſomme de *P*.

239. Il eſt clair que tout ce qui a été dit de *P*, ou de $\div\div$ $2^1 . 2^2$, &c. 2^{∞} s'applique de ſoi-même à la $\div\div$ $3^1 . 3^2 . 3^3$, &c. 3^{∞}; mais qu'à cauſe que cette 2de progreſſion eſt beaucoup plus croiſſante que la 1re, 3^{∞} ſera beaucoup au deſſus de 2^{∞}.

Pour le voir plus préciſément, ſoit la $\div\div$ $1^{\infty} . 2^{\infty} . 4^{\infty}$; puiſque 2^{∞} eſt d'un nombre infini d'ordres au-deſſus de 1 (235), 4^{∞} eſt de ce même nombre d'ordres au-deſſus de 2^{∞}. Donc 3^{∞} qui partage en deux parties, quoiqu'inégales, l'intervalle qui eſt entre 2^{∞} & 4^{∞}, ne peut être que d'un nombre infini d'ordres au-deſſus de 2^{∞}, & d'un autre nombre infini moindre d'ordres au-deſſous de 4^{∞}.

240. Donc $3^{\infty} \pm 2^{\infty} = 3^{\infty}$, & $4^{\infty} \pm 3^{\infty} = 4^{\infty}$.

Que 3^{∞} eſt d'une infinité d'ordres au-deſſus de 2^{∞}, pareillement 4^{∞} au-deſſus de 2^{∞}, &c.

241. On prouvera aiſément la même choſe pour tous les autres nombres par le moyen de la progreſſion double, 2, 4, 8, 16, &c. élevée à ∞: car tous les autres nombres, tels que 3, 5, 6, 7, &c. élevés à ∞, ne pourront que ſe placer dans ſes intervalles infinis & égaux. Mais il s'y placera toujours un plus grand nombre de ces nombres intermédiaires, & comme ce nombre croiſſant ne ſera que fini, tant que les termes de la progreſſion double qu'on affectera de l'expoſant ∞ ne ſeront que finis en eux-mêmes, on aura toujours, quelque nombre fini déterminable que ſoit *n*, $\overline{n+1}^{\infty}$ élevé d'un nombre infini d'ordres au-deſſus de n^{∞}, mais toujours d'un moindre nombre d'ordres à meſure que *n* ſera plus grand. Cela vient viſiblement de ce que le rapport géométrique des nombres naturels *n* eſt toujours décroiſſant, & par conſéquent auſſi celui de leurs puiſſances quelconques.

242. Si entre deux nombres finis conſécutifs de la Suite naturelle on introduit un nombre moyen quelconque, & qu'on les éleve tous trois à ∞, ce moyen ſera d'une infinité d'ordres au-deſſus de l'un des extremes, & d'une autre infinité au-deſſous de l'autre, quelque peu diſtant qu'il ſoit de

l'un ou de l'autre. Ainsi si entre 1 & 2 on introduit $1+\frac{1}{100}$, $\overline{1+\frac{1}{100}}^{\infty}$ sera d'une infinité d'ordres au-dessus de $1^{\infty}=1$, & d'une autre infinité au-dessous de $\overline{2}^{\infty}$. Car $\overline{1+\frac{1}{100}}^{\infty} = \frac{\overline{101}^{\infty}}{\overline{100}^{\infty}}$, qui est à $1^{\infty}=1=\frac{\overline{100}^{\infty}}{\overline{100}^{\infty}}$ :: $\overline{101}^{\infty}$. $\overline{100}^{\infty}$. Or $\overline{n+1}^{\infty}$ est d'une infinité d'ordres au-dessus de n^{∞} (241). A plus forte raison l'autre partie de la proposition est-elle vraie.

Pour faire que le nombre moyen élevé à ∞ fût du même ordre que n^{∞} ou $\overline{n+1}^{\infty}$, il faudroit qu'il eût été pris infiniment proche de l'un ou de l'autre, ce qu'il est impossible dans le Fini.

243. Voilà tout ce qui étoit nécessaire pour être en état de raisonner sur la Suite A^{∞}, qui est 1^{∞}, 2^{∞}, 3^{∞}, &c. ∞^{∞}.

Elle saute donc de son 1[er] terme au 2[d] une infinité d'ordres, du 2[d] au 3[me] une autre infinité moindre, & toujours ainsi tant que n, nombre naturel quelconque est Fini (239, 240 & 241). Mais comme elle a sauté un nombre infini d'ordres, que par conséquent elle ne contient point, que le nombre total des ordres, tant de ceux qu'elle contient que de ceux qu'elle ne contient point, est $=\infty$, & qu'elle a un nombre de termes $=\infty$, il faut nécessairement qu'elle vienne à séjourner dans des ordres, & y fasse autant de séjours & aussi longs qu'il est besoin, pour avoir, malgré l'infinité d'ordres sautés, un nombre de termes $=\infty$. D'un autre côté, ayant commencé par sauter, elle ne peut séjourner sans avoir passé (237). Donc elle saute, passe, & séjourne, fait des sauts toujours décroissans, passe par moins d'ordres qu'il n'y en a où elle séjourne, & enfin fait des séjours toujours croissans.

244. Il faut qu'à son extrémité elle fasse ou une infinité de séjours finis, ou un nombre fini de Finis, & un dernier Infini : car elle n'en peut faire une infinité d'Infinis, puisque par-là le nombre de ses termes seroit de l'ordre de ∞^2. Mais je

je dis qu'elle en fait une infinité de Finis, car dans les A^n où n est fini, le nombre des termes de chaque ordre étant toujours moindre à mesure que n est plus grand (227), & par conséquent le nombre des termes du dernier ordre toujours moindre, & ce nombre ayant commencé par être infini, il faut qu'enfin il devienne fini dans A^∞, ou, ce qui est le même, que le dernier séjour de A^∞ ne soit que fini, ce qui ne l'empêche pas d'être plus grand que tous les précédens (227).

245. Donc la somme de A^∞ est son dernier terme ∞^∞ multiplié par quelque nombre fini inconnu, ou $x\,\infty^\infty$.

246. Il est aisé de voir en quoi A^∞ convient avec les A^n où n étoit fini, ou en différe, & pourquoi.

Les A^n ayant toujours réduit le nombre des termes finis de leur origine à être moindre, A^∞ le réduit à n'être que 1, terme inébranlable.

A^∞ tend & arrive à l'égalité aussi-bien que les A^n & par la même raison.

Mais il étoit impossible que A^∞ eût un nombre d'ordres $= \infty + 1$, puisqu'elle n'en peut avoir qu'un nombre $= \infty$, & qu'elle n'en a effectivement qu'un nombre beaucoup moindre à cause des ordres sautés à son origine; de-là naissent ses différences avec les A^n.

Elle saute, passe, & séjourne, au lieu que les A^n ne font que séjourner.

Mais dès qu'elle séjourne, elle doit reprendre son analogie avec les A^n, & faire des séjours croissans, & elle n'en doit faire un dernier que fini, parce que les A^n font leur dernier séjour infini décroissant.

Cela fait que le dernier ordre seul de A^∞ est utile à sa somme, au lieu que les deux derniers des A^n sont utiles à la leur.

Les ſommes des A^n ayant toujours été décroiſſantes dans l'Infini immédiatement ſupérieur à leur dernier terme, la ſomme de A^∞ n'eſt que ſon dernier terme infini infiniment multiplié.

247. De-là on doit conjecturer qu'il y a eu entre les A^n où n étoit Fini déterminable, & A^∞, quelque Suite A^x, x étant Fini indéterminable, qui n'a eu qu'un nombre d'ordres égal à ſon expoſant, qui a paſſé d'abord par les ordres, & enſuite a ſéjourné, & ſéjourné infiniment dans ſon dernier ordre ſeul, & dont par conſéquent la ſomme a été ſon dernier terme infiniment multiplié, qu'immédiatement après elle eſt venue une Suite qui n'a fait qu'un ſaut d'un ſeul ordre, enſuite a paſſé, &c. & dont la ſomme a été ſon dernier terme multiplié par un moindre nombre, ce qui enfin a amené par degrés A^∞.

Conſidération de $A^{\frac{1}{2}}$.

248. Après avoir examiné la Suite A, élevée à la puiſſance quelconque n, & en avoir tiré toutes les connoiſſances que nous avons pû, voyons maintenant la même A dont on tire la $\sqrt[n]{}$ quelconque, ou $A^{\frac{1}{n}}$, qui ſera $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{1}{4}}$, &c. $A^{\frac{1}{\infty}}$, ſelon les différentes valeurs ſucceſſives de n.

Il eſt clair d'abord en général que l'extraction de la $\sqrt[n]{}$ étant préciſément le contraire de l'élevation à la puiſſance n, on doit trouver dans A, devenue $A^{\frac{1}{n}}$, le contraire de ce qu'on a trouvé dans A devenue A^n. Donc tout ce qui en paſſant de A dans A^n étoit élevé, eſt abaiſſé en paſſant de A dans $A^{\frac{1}{n}}$.

249. Soit $A^{\frac{1}{2}}$, qui eſt $1^{\frac{1}{2}} = 1.\ 2^{\frac{1}{2}}.\ 3^{\frac{1}{2}}.\ 4^{\frac{1}{2}} = 2$ $5^{\frac{1}{2}}\ 6^{\frac{1}{2}}\ 7^{\frac{1}{2}}\ 8^{\frac{1}{2}}\ 9^{\frac{1}{2}} = 3$, &c. $\infty^{\frac{1}{2}}$.

Il n'y a dans A aucun nombre fini déterminable, qui ne ſoit la $\sqrt[2]{}$ de quelque nombre fini déterminable de A, or $A^{\frac{1}{2}}$

contient le $\sqrt[2]{}$ de tous les nombres de *A*, donc elle contient tous les Finis déterminables de *A*. Mais de plus entre deux nombres consécutifs de *A*, tels que 1 & 2, 2 & 3, &c. $A^{\frac{1}{2}}$ introduit de nouveaux nombres qui n'étoient point dans *A*. Donc $A^{\frac{1}{2}}$ a plus de nombres finis déterminables que *A*.

250. $A^{\frac{1}{2}}$ introduit deux nombres nouveaux entre 1 & 2, 4 entre 2 & 3, 6 entre 3 & 4, & toujours ainsi selon la suite des Pairs, d'où il suit qu'outre les Finis déterminables de *A*, $A^{\frac{1}{2}}$ prend autant de termes nouveaux que A^2 en sautoit dans *A* (204), & par conséquent comme *A* sautoit dans *A* un nombre de termes infini par rapport au nombre des termes qu'elle y prenoit, $A^{\frac{1}{2}}$ prend un nombre de termes finis nouveaux qui est infini par rapport au nombre des Finis déterminables de *A* qu'elle prend. Et comme le nombre des Finis déterminables de *A* n'est que fini, le nombre des Finis déterminables de $A^{\frac{1}{2}}$ est infini.

251. Si $A^{\frac{1}{2}}$ continuoit toujours ainsi, c'est-à-dire, si elle prenoit tous les termes des *A* finis & infinis, & qu'elle introduisît entr'eux des termes nouveaux en nombre toujours croissant, le nombre total de ses termes ne pourroit être qu'infiniment plus grand que celui des termes de *A*. Mais $A^{\frac{1}{2}}$ se termine par $\infty^{\frac{1}{2}}$ & par conséquent ne prend aucun terme de *A* plus grand que $\infty^{\frac{1}{2}}$, ou qu'un Infini fort approchant, si $\infty^{\frac{1}{2}}$ n'est pas dans *A*. $A^{\frac{1}{2}}$ prend donc tous les termes de *A* depuis 1 jusqu'à $\infty^{\frac{1}{2}}$, en introduisant toujours entr'eux des termes nouveaux. Et comme le nombre des termes nouveaux introduits entre deux termes consécutifs de *A* est toujours croissant selon la Suite des Pairs pendant le cours infini de $A^{\frac{1}{2}}$, il suit que le nombre de ces termes introduits entre les deux derniers termes que $A^{\frac{1}{2}}$ prend dans *A*

eſt infini. Donc $\infty^{\frac{1}{2}}$ étant néceſſairement précédé dans *A* d'un autre Infini moindre, & $A^{\frac{1}{2}}$ les prenant tous deux, elle introduit entr'eux un nombre infini d'Infinis. Donc $A^{\frac{1}{2}}$ ſe termine par un nombre infini d'Infinis.

Cette démonſtration demande ſeulement qne dans *A*, $\infty^{\frac{1}{2}}$ ſoit précédé d'un Infini; mais comme il eſt viſible qu'il l'eſt de beaucoup d'autres, & que la Suite des Pairs ſe termine par plus d'un Infini, le nombre infini des Infinis de $A^{\frac{1}{2}}$ en eſt d'autant plus grand.

252. Le nombre des Finis déterminables de $A^{\frac{1}{2}}$ par où elle commence eſt donc infini (250), & le nombre des Infinis par où elle ſe termine infini auſſi. Mais tous les Finis indéterminables de *A* qui ſont en nombre infini demeurent Finis dans $A^{\frac{1}{2}}$, puiſque l'extraction de leur $\sqrt[2]{}$ ne peut pas les rendre infinis, & de plus $A^{\frac{1}{2}}$ ne peut introduire entr'eux qu'un nombre infini de termes nouveaux. Donc voilà le nombre infini des Finis de $A^{\frac{1}{2}}$ beaucoup augmenté.

253. De plus, puiſqu'il y a dans *A* des Infinis ſi petits, que l'élevation à la puiſſance 2 ne les éleve pas d'ordre dans A^2 (206), il faut que par la raiſon contraire l'extraction de la $\sqrt[2]{}$ les abaiſſe d'ordre dans $A^{\frac{1}{2}}$, ou les faſſe devenir Finis. Mais comme ils ne ſont qu'en nombre fini (207), ils n'augmenteront que finiment l'infinité des Finis de $A^{\frac{1}{2}}$.

254. La préſomption eſt donc grande que le nombre infini des Finis de $A^{\frac{1}{2}}$ ſera plus grand que le nombre infini de ſes Infinis, ou, ce qui eſt le même, que le nombre des termes des deux différens ordres dont $A^{\frac{1}{2}}$ eſt formée, ſera décroiſſant de l'origine vers l'extrémité. Mais on le voit ſûrement par l'analogie d'oppoſition qui doit être entre $A^{\frac{1}{2}}$ & *A*.

ou A^2, dans lesquelles le nombre des termes des différens ordres est croissant (193 & 210.)

255. Puisque $A^{\frac{1}{2}}$ est comprise entre 1 & $\infty^{\frac{1}{2}}$, deux extremes infiniment moins éloignés que 1 & ∞, extremes de A, & que $A^{\frac{1}{2}}$ introduit toujours des termes nouveaux entre deux consécutifs de A qu'elle prend, & toujours un nombre croissant de ces termes, les termes de $A^{\frac{1}{2}}$ pris dans leur total ont de moindres rapports, ou sont moins inégaux que ceux de A, & de plus c'est vers l'extrémité de $A^{\frac{1}{2}}$ qu'ils ont de moindres rapports. Donc $A^{\frac{1}{2}}$ tend & arrive à l'égalité. On le prouvera aussi par le même raisonnement qui l'a prouvé de A^2 & de A^n en général.

256. Puisque le nombre des Finis de $A^{\frac{1}{2}}$ est infini, ils sont tous utiles à sa somme, & tous les termes $A^{\frac{1}{2}}$, excepté le 1[er], étant plus grands que 1, la somme est plus grande que celle de la Suite infinie des Unités qui est $= \infty$, & elle doit être de quelque ordre au-dessus de ∞, puisqu'il y entre une infinité d'Infinis. D'un autre coté la somme de $A^{\frac{1}{2}}$ est moindre que celle de A qui est de l'ordre de ∞^2, & moindre de quelque ordre, puisqu'elle n'a pas d'Infinis plus élevés que $\infty^{\frac{1}{2}}$. Donc elle est de quelque ordre moyen entre ∞ & ∞^2, c'est-à-dire, qu'elle est quelque Infini radical qui est de l'ordre de ∞^2 incomplet, comme $\infty^{\frac{3}{2}}$, ou $\infty^{\frac{5}{4}}$, &c.

257. Comme dans A $\infty^{\frac{1}{2}}$ est précédé par $\infty^{\frac{1}{2}} - 1$, & qu'entre ces deux Infinis $A^{\frac{1}{2}}$ en a introduit une infinité de nouveaux qui ne peuvent être que de l'ordre de $\infty^{\frac{1}{2}}$, il y a dans $A^{\frac{1}{2}}$ un nombre ∞ de termes de l'ordre de $\infty^{\frac{1}{2}}$, mais non pas égaux à $\infty^{\frac{1}{2}}$, d'où il suit que leur somme est

$\propto \times \infty^{\frac{1}{2}}$ divisé par quelque nombre fini d'autant plus grand que l'inégalité des Infinis de l'ordre de $\infty^{\frac{1}{2}}$ sera plus grande, car c'est cette inégalité qui empêche leur somme d'être $= \propto \times \infty^{\frac{1}{2}}$. Après cela les Infinis de $A^{\frac{1}{2}}$ qui précédent $\infty^{\frac{1}{2}} - 1$ n'étant pas en nombre infiniment plus grand que ceux de l'ordre de $\infty^{\frac{1}{2}}$, & étant même d'ordres inférieurs, & plus inégaux entr'eux, ils ne peuvent élever d'ordre la somme des $\infty^{\frac{1}{2}}$, mais seulement l'augmenter. Les Finis en nombre infini ne peuvent que l'augmenter encore d'un terme infini d'autant moindre que leur inégalité, plus grande que celle des Infinis, est plus grande. Donc la somme de $A^{\frac{1}{2}}$ est fixée à être de l'ordre de $\propto \times \infty^{\frac{1}{2}}$. Et comme $\propto$ est de l'ordre de ∞, elle est de l'ordre de $\infty^{\frac{3}{2}}$.

258. Selon le raisonnement de l'art. 212, mais renversé, tous les termes de $A^{\frac{1}{2}}$ étant utiles à sa somme (256), & d'ailleurs étant tous moins inégaux que ceux de A (255) la somme de $A^{\frac{1}{2}}$ doit être une plus grande partie de son Tout ou de $\infty^{\frac{3}{2}}$ que la somme de A n'est du sien, ou de ∞^2. Donc la somme de $A^{\frac{1}{2}}$ est, par ex. $\frac{2\infty^{\frac{3}{2}}}{3}$, ou $\frac{3\infty^{\frac{3}{2}}}{4}$, &c.

Considération de $A^{\frac{1}{3}}$, *& en général de* $A^{\frac{1}{n}}$, *& de* $A^{\frac{1}{\infty}}$.

259. $A^{\frac{1}{3}}$ est $1^{\frac{1}{3}} = 1, 2^{\frac{1}{3}}. 3^{\frac{1}{3}}. 4^{\frac{1}{3}}. 5^{\frac{1}{3}}. 6^{\frac{1}{3}}. 7^{\frac{1}{3}}. 8^{\frac{1}{3}} = 2$, &c. $\infty^{\frac{1}{3}}$. Et il est aisé de voir que $A^{\frac{1}{3}}$ est comprise entre deux extremes moins éloignés que ceux de $A^{\frac{1}{2}}$, & que par conséquent tous les termes moyens sont plus petits que ceux de $A^{\frac{1}{2}}$, qu'elle prend dans A tous les termes qui étoient entre 1 & $\infty^{\frac{1}{3}}$; & par conséquent un moindre nombre de termes que n'en prenoit $A^{\frac{1}{2}}$, qu'elle introduit entre deux

termes consécutifs de A un plus grand nombre de termes nouveaux que n'en introduisoit $A^{\frac{1}{2}}$, & un nombre toujours croissant, qu'elle a un nombre infini de Finis plus grand que celui des Finis de $A^{\frac{1}{2}}$, & un nombre infini d'Infinis moindre, que ses termes pris dans le total sont moins inégaux que ceux de $A^{\frac{1}{2}}$, qu'elle tend & arrive à l'égalité, que sa somme est de l'ordre de $\infty^{\frac{4}{3}}$, moindre que $\infty^{\frac{3}{2}}$, & une plus grande partie de $\infty^{\frac{4}{3}}$, que la somme de $A^{\frac{1}{2}}$ n'étoit de $\infty^{\frac{3}{2}}$.

260. Il en ira toujours de même de $A^{\frac{1}{4}}$, $A^{\frac{1}{5}}$, & en général de $A^{\frac{1}{n}}$, desorte que la derniére $A^{\frac{1}{n}}$ n'aura plus que des nombres finis, ou égaux, ou très-approchans d'être égaux, & une somme de l'ordre de ∞, & même égale à ce ∞, puisqu'elle n'en sera plus du tout une partie. En effet la derniére $A^{\frac{1}{n}}$ est $A^{\frac{1}{\infty}}$ qui est $1^{\frac{1}{\infty}} = 1.\ 2^{\frac{1}{\infty}}.\ 3^{\frac{1}{\infty}}$ &c. $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, & il est aisé de prouver en détail qu'elle a toutes les propriétés annoncées.

Quelque nombre que soit n, fini ou infini, $2^n > n$. Donc $2 > n^{\frac{1}{n}}$. Donc tout nombre n par l'extraction de sa $\sqrt[n]{}$ tombe au-dessous de 2, ou entre 2 & 1; car il ne peut tomber plus bas que 1 (8). Donc n étant fini, il reste encore après la $\sqrt[n]{}$ une infinité de $\sqrt{}$ à tirer jusqu'à la $\sqrt[\infty]{}$. Donc tout nombre fini a une infinité de $\sqrt{}$ entre 2 & 1, & comme chacune l'abaisse toujours ou l'approche toujours de 1, il en est donc infiniment approché par la $\sqrt[\infty]{}$, & vient à se confondre avec 1. Donc n étant fini, $n^{\frac{1}{\infty}} = 1$. Donc tous les nombres finis de $A^{\frac{1}{\infty}}$ sont les plus petits qu'il se puisse & égaux.

261. Cette démonſtration n'eſt que trop forte, car il n'y a point de nombre n, excepté 2, qui attende ſa $\sqrt[n]{}$ pour tomber au-deſſous de 2. 3, par exemple, y tombe avant ſa $\sqrt[3]{}$ & dès ſa $\sqrt[2]{}$, 4 dès ſa $\sqrt[3]{}$, &c. 100 dès ſa $\sqrt[7]{}$ très-éloignée la $\sqrt[100]{}$, 1000 dès ſa $\sqrt[9]{}$, &c.

En général ſi un nombre eſt une puiſſance de 2, comme $512 = 2^9$, il eſt viſible que ſa $\sqrt[9]{}$ étant 2, toutes ſes autres $\sqrt{}$ ſont au-deſſous de 2. & ſi le nombre n'eſt pas une puiſſance de 2, il ne peut avoir de ſes $\sqrt{}$ au-deſſus de 2 qu'autant que la plus grande puiſſance de 2 qui eſt au-deſſous de lui a de dimenſions. Ainſi parce que la plus grande puiſſance de 2 qui ſoit au-deſſous de 1000 eſt 512, 1000 ne peut avoir que ſes $\sqrt[2]{}$, $\sqrt[3]{}$, &c. juſqu'à $\sqrt[9]{}$ au-deſſus de 2, & toutes les autres ſont au-deſſous, & il eſt bien éloigné d'attendre pour cela ſa $\sqrt[1009]{}$. Et comme du nombre infini des puiſſances de 2 il n'y en a qu'un nombre fini de finies (228), il n'y a point de nombre fini, quelque grand qu'il ſoit, qui ait au-deſſous de ſoi une puiſſance de 2 ſi grande qu'elle ne ſoit plus finie, & par conſéquent il ne peut avoir qu'un nombre fini de ſes $\sqrt{}$ au-deſſus de 2, & il en a un nombre infini entre 2 & 1.

262. Puiſque n étant fini ou infini, $2 > n^{\frac{1}{n}}$ (260), on a $2 > \infty^{\frac{1}{\infty}}$, dernier terme de $A^{\frac{1}{\infty}}$, comme on l'a déja trouvé dans l'art. 167. Donc tous les termes de $A^{\frac{1}{\infty}}$ ſont finis, puiſque ſon plus grand terme l'eſt, auſſi-bien que le premier & le plus petit.

263. $n^{\frac{1}{\infty}}$ étant $= 1$ tant que n eſt fini (260), cela n'eſt plus vrai quand $n = \infty$. Car on a déja vû que $\infty^{\frac{1}{\infty}}$

> 1

> 1 (166). On peut considérer de plus, que quoique la $\sqrt[\infty]{}$ d'un grand nombre fini le confonde avec 1, aussi-bien que la $\sqrt[\infty]{}$ d'un petit nombre le confond avec 1, la $\sqrt[\infty]{}$ du grand nombre ne le confond pas si absolument & si pleinement avec 1. Ainsi quoique $100^{\frac{1}{\infty}} = 1$, & $2^{\frac{1}{\infty}} = 1$, $100^{\frac{1}{\infty}}$ n'est pas si absolument 1 que $2^{\frac{1}{\infty}}$. Car si cela étoit, on auroit absolument $100^{\frac{1}{\infty}} = 2^{\frac{1}{\infty}}$, ou $100 = 2$, ce qui seroit absurde. $n^{\frac{1}{\infty}} = 1$ n'est donc pas une égalité absolue, mais seulement telle que la différence de $n^{\frac{1}{\infty}}$ à 1 n'est pas à compter, tant que n est fini. Mais quand $n = \infty$, cette différence sera à compter, parce que si la $\sqrt[\infty]{}$ d'un plus grand nombre le confond toujours moins absolument avec 1, la $\sqrt[\infty]{}$ de ∞ ne l'y confondra plus du tout. Cela sera encore beaucoup plus éclairci dans la suite. Donc $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ tombe entre 1 & 2 sans se confondre avec 1, & il y a quelque différence finie dont $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ surpasse 1.

264. Donc les deux extremes de $A^{\frac{1}{\infty}}$ étant 1 & $\infty^{\frac{1}{\infty}} < 2$ & > 1, les termes moyens qui sont en nombre infini ne peuvent être qu'infiniment approchans d'être tous égaux chacun à son antécédent ou à son conséquent, & les plus égaux de tous sont vers l'extrémité selon la propriété de toutes les $A^{\frac{1}{\infty}}$ (255 & 259), desorte que $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ & son antécédent seront absolument égaux; ce qui confirme que les termes qui sont à l'origine de $A^{\frac{1}{\infty}}$ ou les $\sqrt[\infty]{}$ des nombres finis

ne ſont pas abſolument $= 1$, car elles ſeroient abſolument égales entr'elles.

265. $A^{\frac{1}{\infty}}$ eſt une Suite croiſſante comme toutes les $A^{\frac{1}{n}}$, puiſque $\infty^{\frac{1}{\infty}} > 1$: mais c'eſt une ſuite auſſi peu croiſſante qu'il ſoit poſſible, & en effet toutes les $A^{\frac{1}{n}}$ précédentes l'étoient toujours de moins en moins.

266. $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ n'eſt pas dans A, mais ſeulement $2 > \infty^{\frac{1}{\infty}}$, & par conſéquent $A^{\frac{1}{\infty}}$ introduit ſon infinité de termes moyens entre 1 & $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, dont le ſecond n'eſt pas dans A, mais ſeulement 2, nombre approchant. Mais quand $A^{\frac{1}{\infty}}$ auroit introduit ſon infinité de termes entre 1 & 2, ce ſeroit toujours la même choſe, quant à la nature de la Suite, à ſa maniere d'être croiſſante, & à l'égalité de ſes termes. Donc il n'eſt pas néceſſaire en général, que les $A^{\frac{1}{n}}$ n'introduiſent des termes moyens qu'entre des termes qui ſoient préciſément dans A, il ſuffit qu'elles les introduiſent entre des termes approchans. Cela n'eſt néceſſaire dans les $A^{\frac{1}{n}}$ que quand n eſt fini, & de plus vers l'origine de ces Suites; de-ſorte que, comme nous l'avons dit, $\infty^{\frac{1}{2}}$, $\infty^{\frac{1}{3}}$, &c. derniers termes de $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, &c. pourroient n'être pas dans A, mais ſeulement des termes approchans, ce qui ne change rien à la nature de ces Suites.

267. Tous les termes de $A^{\frac{1}{\infty}}$ ne ſont preſque que des Unités, puiſque $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, le plus grand de tous, & infiniment diſtant de 1 dans $A^{\frac{1}{\infty}}$, eſt moindre que 2, & ne ſurpaſſe 1

que d'une différence finie. Donc la somme de $A^{\frac{1}{\infty}}$ ne peut surpasser celle de la Suite infinie des Unités que d'une différence finie. Or la somme de la Suite des Unités est $= \infty$, donc celle de $A^{\frac{1}{\infty}}$ est ∞ plus un nombre fini x, c'est-à-dire ∞ entier, & sans diviseur.

268. Donc en disposant selon leur ordre les sommes de toutes les $A^{\frac{1}{n}}$, elles sont comprises pour l'ordre entre $\infty^{\frac{3}{2}}$ & ∞; d'où il suit qu'elles vont toujours en s'abaissant, & tendant à l'égalité, & y arrivent.

269. Puisque n étant un nombre fini, $n^{\frac{1}{\infty}} = 1$, & que $n^0 = 1$ (50), $n^{\frac{1}{\infty}}$ est $= n^0$, c'est-à-dire, qu'élever un nombre à la moindre puissance possible, ou en tirer la plus grande $\sqrt{}$ possible, c'est également le rendre le moindre nombre possible ou 1.

270. Quand on voit d'un même coup d'œil toutes les A^n qui en partant de A, où le nombre des Finis est infini, deviennent successivement & par une infinité de degrés A^∞, où il ne reste que 1 de nombre fini, il est impossible de ne pas conclurre que le changement des Finis en Infinis a commencé dès A^2, sur-tout parce qu'il est très-certain que le nombre des Finis a diminué dès A^2. De même, & par la raison contraire, quand on voit toutes les $A^{\frac{1}{n}}$ qui partant de A, où le nombre des Infinis est infini, deviennent enfin $A^{\frac{1}{\infty}}$, où il n'y a plus aucun Infini, mais seulement des Unités, il est impossible de ne pas conclurre que le changement des Infinis en Finis a commencé dès $A^{\frac{1}{2}}$: car si tous les Finis & Infinis de A étoient fixes dans leur état, & immuables, le changement de A en A^∞ ou en $A^{\frac{1}{\infty}}$ ne seroit plus successif

& gradué, comme on voit très-certainement qu'il l'eſt. C'eſt de-là que naît toute la Théorie ſi paradoxe des *Finis indéterminables*, qui eſt auſſi celle des *Infinis indéterminables*. Les uns & les autres ſont des nombres de A, placés dans le paſſage incompréhenſible du Fini à l'Infini, & qui ſont, pour ainſi dire, les nuances d'un ordre à l'autre. Ils exiſtent, quoiqu'on ne puiſſe ni les déterminer, ni les comprendre, & il eſt important de connoître qu'ils exiſtent, parce que c'eſt de leurs changemens que dépendent ſouvent les différens ordres des ſommes des Suites.

Conſidération de $A^{\frac{2}{3}}$, $A^{\frac{3}{4}}$, *&c. & de* $A^{\frac{n-1}{n}}$ *en général.*

271. Soit A élevée à $A^{\frac{2}{3}}$, ce qui donne $A^{\frac{2}{3}}$, qui eſt $1^{\frac{2}{3}} = 1 . 2^{\frac{2}{3}} . 3^{\frac{2}{3}}$, &c. $8^{\frac{2}{3}} = 4$, &c. $\infty^{\frac{2}{3}}$.

Ou ſoit $A^{\frac{3}{4}}$, qui eſt $1^{\frac{3}{4}} = 1 . 2^{\frac{3}{4}} . 3^{\frac{3}{4}}$, &c. $16^{\frac{3}{4}} = 8$, &c. $\infty^{\frac{3}{4}}$.

Et en général $A^{\frac{n-1}{n}}$. On peut conſidérer ces Suites, ou comme partant de $A^{\frac{1}{2}}$, la premiere & la moindre de toutes, déja connue, auquel cas n aura toutes les valeurs poſſibles depuis 2, ou comme étant les $A^{\frac{1}{n}}$ déja connues, que l'on éleve à la puiſſance $n - 1$, auquel cas la plus petite valeur de n ſera 3, car ſi n étoit $= 2$, la puiſſance $n - 1 = 1$ ne donneroit rien de nouveau, & l'on aura pour la premiere de ces Suites $A^{\frac{2}{3}}$ qui ſera $A^{\frac{1}{3}}$ élevée au quarré, pour la ſeconde $A^{\frac{3}{4}}$, qui ſera $A^{\frac{1}{4}}$ élevée au cube, &c. la 1[re] maniere de les conſidérer ſera la plus commode.

Les $A^{\frac{n-1}{n}}$ étant ſucceſſivement $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, $A^{\frac{3}{4}}$, $A^{\frac{4}{5}}$, &c. où l'on voit que l'expoſant $\frac{n-1}{n}$ approche toujours d'autant plus d'être $= 1$ que n eſt plus grand, la derniere $A^{\frac{n-1}{n}}$ ſera $A^1 = A$, & il eſt bon de remarquer qu'alors dans

l'exposant $\frac{n-1}{n} = \frac{\infty - 1}{\infty}$ le -1 du numérateur disparoît devant ∞, quoiqu'il soit dans un exposant, ainsi que dans l'art. 237, & qu'apparemment il n'y a point de Regle absolument générale de Calcul pour négliger 1 ou ne le pas négliger devant l'Infini, mais qu'il faut se régler sur la nature & les circonstances du sujet dont il s'agit.

272. L'exposant des $A^{\frac{n-1}{n}}$ croissant donc toujours depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à 1, les $A^{\frac{n-1}{n}}$ croissent toujours aussi, c'est-à-dire, ont toujours chacune de plus grands termes que les correspondans dans la précédente, & en effet leurs derniers termes sont $\infty^{\frac{1}{2}}$, $\infty^{\frac{2}{3}}$, $\infty^{\frac{3}{4}}$, &c. ∞. Infinis toujours croissans. Les $A^{\frac{n-1}{n}}$ vont donc toujours s'élevant depuis $A^{\frac{1}{2}}$ jusqu'à A.

273. $A^{\frac{1}{2}}$ a un nombre infini de termes finis & un infini d'infinis, mais moindre (254). A a un nombre infini de finis, & un infini d'infinis beaucoup plus grand. Donc toutes les $A^{\frac{n-1}{n}}$ moyennes ont un nombre infini de termes finis, & un infini d'infinis, mais le nombre des finis est toujours décroissant à mesure qu'elles s'élevent de $A^{\frac{1}{2}}$ vers A, & le nombre des infinis est croissant.

274. Puisque toutes les $A^{\frac{n-1}{n}}$ ont un nombre infini d'Infinis, leur somme est de l'ordre de $\infty \times \infty^{\frac{n-1}{n}} = \infty^{\frac{n-1}{n}+1} = \infty^{\frac{2n-1}{n}}$. Et en effet la somme de $A^{\frac{1}{2}}$, où $n = 2$, est de l'ordre de $\infty^{\frac{4-1}{2}} = \infty^{\frac{3}{2}}$ (257), & la somme de A, où $n = \infty$, est de l'ordre de $\infty^{\frac{2\infty}{\infty}} = \infty^2$. Donc

la ſomme de $A^{\frac{2}{3}}$, où $n=3$, eſt de l'ordre de $\infty^{\frac{5}{3}}$, celle de $A^{\frac{3}{4}}$ de l'ordre de $\infty^{\frac{7}{4}}$, &c.

275. La ſomme de $A^{\frac{1}{2}}$ étant la moindre de toutes, & celle de A la plus grande, toutes les ſommes des $A^{\frac{n-1}{n}}$ moyennes ſont compriſes entre l'ordre de $\infty^{\frac{3}{2}}$ & celui de $\infty^2 = \infty^{\frac{4}{2}}$. Donc elles n'ont toutes à partager entr'elles qu'un intervalle $= \infty^{\frac{1}{2}}$.

276. Comme elles ſont en nombre infini, elles ne peuvent partager cet intervalle en un nombre infini de parties infinies, mais ſeulement en un nombre infini de finies, ou en un nombre fini d'infinies, & un infini de finies. Or les premieres $A^{\frac{n-1}{n}}$, telles que $A^{\frac{1}{2}}$ & $A^{\frac{2}{3}}$, ou $A^{\frac{2}{3}}$ & $A^{\frac{3}{4}}$, &c. ont des ſommes $\infty^{\frac{3}{2}}$ & $\infty^{\frac{5}{3}}$, ou $\infty^{\frac{5}{3}}$ & $\infty^{\frac{7}{4}}$ (274) &c. qui different de quelques ordres radicaux d'Infini, & par conſéquent infiniment. Donc il y a depuis $A^{\frac{1}{2}}$ un nombre ſeulement fini, mais indéterminable, de $A^{\frac{n-1}{n}}$, dont les ſommes s'élevent les unes au deſſus des autres de quelques ordres radicaux, & enſuite il y en a un nombre infini du même ordre qui eſt celui de ∞^2.

277. Puiſque toutes les $A^{\frac{n-1}{n}}$ ont un nombre infini de Finis, tous leurs termes ſont utiles à leurs ſommes, & elles doivent être cenſées avoir toutes, à l'égard de ces ſommes, un nombre de termes égal. D'ailleurs la ſomme de $A^{\frac{1}{2}}$ eſt une plus grande partie de l'Infini qui déſigne ſon ordre, que la ſomme de A n'eſt de l'Infini qui déſigne le ſien, & cela parce que les termes de $A^{\frac{1}{2}}$ pris dans leur total, ſont moins inégaux entr'eux que ceux de A (258). Donc les $A^{\frac{n-1}{n}}$ qui ſuivent

$A^{\frac{1}{2}}$, & tendent à devenir A, ayant toujours leurs termes plus approchans d'être auſſi inégaux que ceux de A, & par conſéquent toujours plus inégaux entr'eux que ceux de $A^{\frac{1}{2}}$; leurs ſommes ſeront toujours de moindres parties de l'Infini qui deſignera leur ordre.

278. Et comme la ſomme de A eſt $\frac{1}{2}$ de ſon Infini, & que la ſomme de $A^{\frac{1}{2}}$ eſt une partie du ſien plus grande que $\frac{1}{2}$; les ſommes des $A^{\frac{n-1}{n}}$ ſeront des parties de leur Infini, toujours décroiſſantes depuis un nombre plus grand que $\frac{1}{2}$, depuis $\frac{2}{3}$, par exemple, ou $\frac{3}{4}$, &c. juſqu'à $\frac{1}{2}$. Et comme elles ſont en nombre infini, il n'eſt pas poſſible qu'elles ne viennent à être égales, non ſeulement quant à l'ordre (276), mais encore quant à la grandeur, même après qu'elles n'auront été encore qu'en nombre fini.

On tireroit toutes les mêmes concluſions, en conſidérant les $A^{\frac{1}{n}}$ déja connues, comme élevées à $n-1$.

279. Il eſt aiſé de voir que les $A^{\frac{n}{n-1}}$, qui ſont $A^{\frac{2}{1}} = A^2, A^{\frac{3}{2}}$, ou $1^{\frac{3}{2}} = 1, 2^{\frac{3}{2}}, 3^{\frac{3}{2}}, 4^{\frac{3}{2}} = 8$, &c. $\infty^{\frac{3}{2}}$. $A^{\frac{4}{3}}$, ou $1^{\frac{4}{3}} = 1, 2^{\frac{4}{3}}, 3^{\frac{4}{3}}$, &c. $8^{\frac{4}{3}} = 16$, &c. $\infty^{\frac{4}{3}}$. $A^{\frac{5}{4}}$, &c. ſont le contraire de $A^{\frac{n-1}{n}}$. *Conſidération des* $A^{\frac{n-1}{n}}$.

Au lieu que les $A^{\frac{n-1}{n}}$ s'élevent depuis $A^{\frac{1}{2}}$ qui en eſt la 1re juſqu'à A, les $A^{\frac{n}{n-1}}$ deſcendent depuis A^2 qui en eſt la 1re juſqu'à A.

La 1re $A^{\frac{n-1}{n}}$ a un nombre infini de termes Finis, & un infini d'Infinis moindre, & dans les $A^{\frac{n-1}{n}}$ ſuivantes le nombre des Finis eſt toujours décroiſſant, & celui des Infinis

croiſſant, juſqu'à ce qu'enfin dans A le nombre infini des Finis ſoit beaucoup moindre que celui des Infinis. Tout au contraire dans la 1[re] des $A^{\frac{n}{n-1}}$ le nombre des Finis n'eſt que fini, & celui des Infinis infini, & dans les $A^{\frac{n}{n-1}}$ ſuivantes, le nombre des Finis eſt croiſſant, & celui des Infinis décroiſſant, juſqu'à ce qu'enfin dans A le nombre des Finis ſoit infini auſſi-bien que celui des Infinis, quoique beaucoup moindre.

Au contraire des $A^{\frac{n-1}{n}}$ les $A^{\frac{n}{n-1}}$ décroiſſent, auſſi-bien que leurs expoſans qui décroiſſent depuis 2 juſqu'à 1, c'eſt-à-dire, que les termes d'une $A^{\frac{n}{n-1}}$ ſont toujours moindres que leurs correſpondans dans la précédente.

280. Puiſque la ſomme de A^2 eſt de l'ordre de ∞^3, & celle de A de l'ordre de ∞^2, les ſommes de toutes les $A^{\frac{n}{n-1}}$ moyennes ſont compriſes dans l'ordre potentiel qui eſt entre ∞^3 & ∞^2, & par conſéquent elles ſont de l'ordre de ∞^3 incomplet, & ſe terminent à celui de ∞^2 complet. Ainſi puiſque toutes les $A^{\frac{n}{n-1}}$ ont une infinité d'Infinis, la ſomme de $A^{\frac{3}{2}}$ eſt de l'ordre de $\infty \times \infty^{\frac{3}{2}} = \infty^{\frac{5}{2}}$, qui eſt ∞^3 incomplet; celle de $A^{\frac{4}{3}}$ eſt de l'ordre de $\infty^{\frac{7}{3}}$, &c. Mais comme ces ſommes ſont en nombre infini, qu'elles n'ont à partager entr'elles que l'intervalle $= \infty$ qui eſt entre ∞^3 & ∞^2, & que les premieres different entr'elles de quelques ordres radicaux d'Infini, il s'enſuit qu'il n'y a que ces premieres en nombre fini indéterminable qui aient de pareilles différences, & que toutes les autres en nombre infini ſont de l'ordre de ∞^2 complet, & par conſéquent qu'elles ont tendu & ſont arrivées à l'égalité d'ordre. En effet $\frac{n}{n-1}$ tend autant à l'égalité, & y tend par la même raiſon que $\frac{n-1}{n}$.

281.

281. tant que les $A^{\overline{\frac{n}{n-1}}}$ n'ont qu'un nombre fini de Finis comme la 1re A^2, ce qui doit être dans un nombre fini indéterminable de $A^{\overline{\frac{n}{n-1}}}$, ou, ce qui revient au même, tant que n est fini déterminable, tous leurs Finis sont inutiles aux sommes: mais après cela elles viennent à avoir une infinité de Finis, & par conséquent elles doivent être censées, à l'égard des sommes, avoir un plus grand nombre de termes. De plus elles partent de A^2 qui a des termes plus inégaux entr'eux que ceux de A, & elles tendent à devenir A, d'où il suit que les termes de chacune sont toujours d'autant moins inégaux qu'elles approchent plus de A. Donc leurs sommes sont toujours une plus grande partie de l'Infini qui désigne leur ordre. Et comme la somme de A^2 est une partie de ∞^3 moindre que $\frac{1}{2}$ (212), les sommes des $A^{\overline{\frac{n}{n-1}}}$ sont toujours de plus grandes parties de leur Infini, & sont croissantes à cet égard depuis $\frac{1}{3}$, par exemple, ou $\frac{1}{4}$, &c. jusqu'à $\frac{1}{2}$ qui est le coëfficient de l'Infini de la somme de A. Donc toutes les $A^{\overline{\frac{n}{n-1}}}$ aussi-bien que les $A^{\overline{\frac{n-1}{n}}}$ tendent & arrivent à des sommes égales tant en grandeur qu'en ordre.

282. Si l'on éleve chaque terme de A à la puissance de *son nom*, ce qui donnera la Suite $1^1 = 1$. $2^2 = 4$. $3^3 = 27$. $4^4 = 256$, &c. ∞^∞, que j'appelle $\overset{a}{A}$; il est clair d'abord que si A^2 n'a qu'un nombre fini de termes Finis, $\overset{a}{A}$ en a encore beaucoup moins, & un nombre infini d'Infinis. *Considération de* A^a.

283. Puisque $\overset{a}{A}$ se termine par ∞^∞, elle a une infinité de différens ordres d'Infini: mais elle n'en a pas un nombre $= \infty$, puisqu'elle séjourne d'abord dans l'ordre du Fini. Ensuite elle peut faire de moindres séjours dans les premiers ordres d'Infini: mais ne fît-elle qu'y passer, il faut absolument qu'elle vienne à sauter des ordres vers sa fin. Donc son

dernier terme ∞^{∞} fait seul sa somme. On voit par-là que $\grave{A}$ est le contraire de A^{∞} trouvée dans les art. 228, 243, 244, &c. & comprise entre les mêmes extremes.

Considération de $A^{\frac{1}{a}}$.

284. Si de chaque terme de A on tire la $\sqrt{}$ de son nom, ce qui donne $A^{\frac{1}{a}}$, $1^{\frac{1}{1}} = 1$, $2^{\frac{1}{2}}$, $3^{\frac{1}{3}}$, &c. $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, on voit que tous ses termes sont finis, puisque les deux extremes le sont. De plus on a toujours $2 > n^{\frac{1}{n}}$, quelque nombre que soit n (260). Donc tous les termes de $A^{\frac{1}{a}}$, qui ne sont que des $n^{\frac{1}{n}}$, sont moindres que 2, & il est clair qu'ils sont tous plus grands que 1.

Il faut observer maintenant que n ayant successivement tous les nombres naturels pour valeur, $2^{n} > n$ est de plus d'autant plus grand par rapport à n, que n est plus grand, sous cette condition que n ait de plus grandes valeurs que 1 & que 2. Car quand $n = 1$, 2^{1} est double de 1, & quand $n = 2$, 2^{2} est encore double de 2, ce qui fait le même rapport de 2^{n} à n pour ces deux valeurs de n: mais passé cela, le rapport de 2^{n} à n est toujours d'autant plus grand que n est plus grand, ce qu'il est aisé de voir. Donc le rapport de 2 à $n^{\frac{1}{n}}$, quoique différent de celui de 2^{n} à n, est aussi croissant sous cette même condition, & par conséquent dans $A^{\frac{1}{a}}$, passé les deux 1[ers] termes, où $n = 1$, & $n = 2$, tous les termes depuis le 3[me], qui est $3^{\frac{1}{3}}$, sont toujours plus petits par rapport à 2, ou absolument plus petits, & décroissans: & comme c'est à ce 3[me] terme qu'il se fait un changement, ils ont dû jusques-là être ou égaux ou croissans, or il est visible qu'ils ne sont pas égaux, donc ils sont croissans. Donc $A^{\frac{1}{a}}$ est croissante jusqu'à son 3[me] terme, & de-là toujours décroissante.

On le peut voir en détail. Il est clair d'abord que $2^{\frac{1}{2}} > 1$.

$3^{\frac{1}{3}} > 2^{\frac{1}{2}}$. Car $3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{6}}$, & $2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{6}}$, or élevant de part & d'autre à la puissance 6, on a $3^2 > 2^3$, puisque $3^2 = 9$. & $2^3 = 8$.

Mais $4^{\frac{1}{4}} < 3^{\frac{1}{3}}$. Car $4^{\frac{1}{4}} = 4^{\frac{3}{12}}$, & $3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{4}{12}}$, or élevant de part & d'autre à la puissance 12, on a $4^3 = 64 < 81 = 3^4$. On le peut voir tout d'un coup, car $4^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}$.

De même $5^{\frac{1}{5}} = 5^{\frac{4}{20}} < 4^{\frac{1}{4}} = 4^{\frac{5}{20}}$, puisque $5^4 = 625$, & $4^5 = 1024$.

$6^{\frac{1}{6}} = 6^{\frac{5}{30}} < 5^{\frac{1}{5}} = 5^{\frac{6}{30}}$, puisque $6^5 = 7776$, & $5^6 = 15625$, & ainsi des autres.

285. Tous les termes de $A^{\frac{1}{a}}$ étant décroissans depuis $3^{\frac{1}{3}}$, il suit que non-seulement $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ est plus petit que 2, mais qu'il l'est plus que $3^{\frac{1}{3}} < 2$, comme on l'a déja trouvé (169). De-là suit $3^{\frac{2}{3}} > \infty^{\frac{2}{\infty}}$. $3^{\frac{3}{3}} = 3 > \infty^{\frac{3}{\infty}}$, & en general $3^{\frac{n}{3}} > \infty^{\frac{n}{\infty}}$. Donc $3^{\frac{\infty}{3}} > \infty^{\frac{\infty}{\infty}} = \infty$.

286. Puisqu'entre $3^{\frac{1}{3}} < 2$, & $\infty^{\frac{1}{\infty}} < 2$ & > 1, il y a une infinité de termes toujours décroissans, il faut qu'ils soient tous presqu'égaux, & ne soient guere que des Unités, ce que l'on verra plus distinctement dans la suite.

287. Non-seulement les termes de $A^{\frac{1}{a}}$ sont presque égaux, mais ils approchent toujours de plus en plus d'être entierement égaux. Car deux termes consécutifs de $A^{\frac{1}{a}}$ étant $n^{\frac{1}{n}}$ & $\overline{n+1}^{\frac{1}{n+1}}$, ils approchent d'autant plus de l'égalité

& par eux-mêmes, & par leurs expoſans, que n eſt plus grand. Donc enfin $A^{\frac{1}{a}}$ arrive à deux termes entierement égaux.

288. Tous les termes de $A^{\frac{1}{a}}$, horſmis le 1[er], ſont plus grands que 1, ce qui eſt viſible d'abord dans ſes trois 1[ers] termes où elle eſt croiſſante, & enſuite dans tous les autres où elle eſt décroiſſante, puiſque $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, le moindre de tous, eſt $>$ 1. Son 2[d] & ſon 3[me] terme ont des différences finies à 1, & tous les autres du cours décroiſſant ont chacun une différence finie à 1, puiſque telle eſt la différence de $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, le moindre de tous, à 1 (263). Donc la ſomme de $A^{\frac{1}{a}}$ eſt plus grande d'une différence infinie que celle de la ſomme des Unités, qui eſt $= \infty$. D'un autre côté chaque terme de $A^{\frac{1}{a}}$ eſt moindre que 2. Donc la ſomme de $A^{\frac{1}{a}}$ eſt un Infini moyen entre ∞ & 2∞.

Il eſt aiſé de voir en quoi $A^{\frac{1}{a}}$, compriſes entre les mêmes extremes que $A^{\frac{1}{\infty}}$, lui eſt contraire, comme A^{a} l'étoit à A^{∞} (283).

Conſidération de $A^{\frac{a}{n}}$.

289. Si de A^{a} on tire la $\sqrt[n]{}$, n ayant ſucceſſivement toutes les valeurs, ce qui donnera $A^{\frac{a}{1}} = A^{a}$, $A^{\frac{a}{2}}$ qui eſt $1^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{2}{2}} = 2 \cdot 3^{\frac{3}{2}} \cdot 4^{\frac{4}{2}} = 16 \cdot 5^{\frac{5}{2}}$, &c. $\infty^{\frac{\infty}{2}}$. $A^{\frac{a}{3}}$; $1^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{3}{3}} = 3 \cdot 4^{\frac{4}{3}}$, &c. $\infty^{\frac{\infty}{3}}$. $A^{\frac{a}{4}}$, $1^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{4}} \cdot 4^{\frac{4}{4}} = 4 \cdot 5^{\frac{5}{4}}$, &c. $\infty^{\frac{\infty}{4}}$, &c. on voit d'abord que chacune de ces Suites $A^{\frac{a}{n}}$ a des termes toujours croiſſans, mais que d'une Suite à l'autre ils ſont toujours moindres, puiſque n eſt toujours croiſſant.

290. Elles ont toutes vers leur origine un terme égal au terme correſpondant de la Suite naturelle A; par exemple, $A^{\frac{a}{2}}$ a ſon 2^d terme $2^{\frac{2}{2}}$ égal au 2^d de A, $A^{\frac{a}{3}}$ a ſon 3me terme égal au 3me de A, &c. ce qui arrive néceſſairement, lorſque dans l'expoſant $\frac{a}{n}$, $a = n$. Et comme dans $A^{\frac{a}{2}}$ on a $a = n$ dès le 2^d terme, dans $A^{\frac{a}{3}}$ au 3me, & toujours ainſi de ſuite, le terme de $A^{\frac{a}{n}}$ égal au correſpondant de A, avance toujours d'une place à meſure que n croît d'une unité, & le nombre qui exprime la quantieme eſt cette place, eſt n. D'un autre côté il eſt viſible que dans les $A^{\frac{a}{n}}$ tous les termes, horſmis le 1er, qui précedent le terme égal au correſpondant dans A, ſont moindres que leurs correſpondans dans A, & tous les termes qui le ſuivent, plus grands. Donc plus n eſt petit, plus les $A^{\frac{a}{n}}$ ont un grand nombre de termes plus grands que leurs correſpondans dans A : & au contraire plus n eſt grand, plus les $A^{\frac{a}{n}}$ ont un grand nombre de termes plus petits que leurs correſpondans dans A.

291. Il faut encore ajouter que plus n eſt petit, moins les termes de $A^{\frac{a}{n}}$ plus petits que leurs correſpondans dans A ſont petits, & plus les termes de $A^{\frac{a}{n}}$ plus grands que leurs correſpondans dans A ſont grands. Au contraire plus n eſt grand, plus les termes de $A^{\frac{a}{n}}$ plus petits que leurs correſpondans dans A ſont petits; & moins les termes de $A^{\frac{a}{n}}$ plus grands que leurs correſpondans dans A ſont grands. Il eſt aiſé de le voir.

292. De tout cela il ſuit que quand $n = \infty$, ce qui

donne $A^{\frac{a}{\infty}}$, $1^{\frac{1}{\infty}} = 1$. $2^{\frac{2}{\infty}}$. $3^{\frac{3}{\infty}}$, &c. $\infty^{\frac{\infty}{\infty}} = \infty$, le terme égal à un terme correſpondant dans A, qui a toujours avancé d'une place à meſure que n croiſſoit (290), eſt enfin venu à la derniere place dans $A^{\frac{a}{\infty}}$, que ce terme eſt ∞, & que tous les termes de $A^{\frac{a}{\infty}}$ moyens entre 1 & ∞ ſont moindres que leurs correſpondans dans A, & que de plus n étant alors le plus grand qu'il puiſſe être, tous ces termes ſont les plus petits qu'il ſoit poſſible par rapport à ces correſpondans ſelon les conditions des $A^{\frac{a}{n}}$ (291). En effet ces termes moyens commençant par être $2^{\frac{2}{\infty}} = 4^{\frac{1}{\infty}} = 1$ $3^{\frac{3}{\infty}} = 27^{\frac{1}{\infty}} = 1$, $4^{\frac{4}{\infty}} = 256^{\frac{1}{\infty}} = 1$, & toujours ainſi de ſuite tant que les nombres $\overset{n}{n}$ ſont finis (260), on voit que tous ces termes de $A^{\frac{a}{\infty}}$ deſcendent le plus bas que des nombres puiſſent tomber par des extractions de $\sqrt{}$.

293. $A^{\frac{a}{\infty}}$ n'a donc que des termes preſque abſolument égaux à 1, tant que $\overset{n}{n}$ eſt fini, c'eſt-à-dire, qu'elle en a un nombre fini indéterminable, ou qu'elle ſéjourne dans le ſeul nombre 1 pendant une étendue finie indéterminable de ſon cours. Mais il eſt viſible qu'elle ſéjourne beaucoup moins dans 1 que ne faiſoit $A^{\frac{1}{\infty}}$; après cela elle ſéjourne dans 2, mais moins que dans 1; dans 3, moins que dans 2, &c. Il faut donc que la Suite vers ſon extrémité faſſe des ſauts, non d'ordres, mais de nombres conſécutifs de A, pour réparer les longs ſéjours qu'elle a faits dans d'autres nombres conſécutifs; & avant que de ſauter, il faut qu'elle paſſe. De-là il ſuit qu'elle fera ſes ſéjours ou ſes paſſages dans le Fini, & ſes ſauts dans l'Infini, & qu'elle aura beaucoup plus de termes Finis que d'Infinis. Or je dis qu'elle n'en aura qu'un nombre fini d'Infinis,

car il faut que tous ses termes soient les plus petits qu'il soit possible par rapport aux correspondans dans A (291), or de cette maniere cela est ainsi.

En effet $A^{\frac{a}{\infty}}$ doit être le contraire de $\overset{a}{A} = A^{\frac{a}{1}}$. Or dans $\overset{a}{A}$ le nombre des Finis est fini, & celui des Infinis infini (282).

294. La 1[re] des $A^{\frac{a}{n}}$, qui est $A^{\frac{a}{2}}$, a son 4[me] terme $4^{\frac{4}{2}} = \sqrt[2]{256}$ égal au 4[me] terme de A^{2}, qui est 16, & ensuite tous ses termes beaucoup plus grands que leurs correspondans dans A^{2}, ce qu'il est aisé de voir. Donc si A^{2} n'a qu'un nombre fini de termes Finis, à plus forte raison $A^{\frac{a}{2}}$ n'en a-t-elle aussi qu'un nombre fini. Donc le nombre de ses Infinis est infini.

295. Puisque dans $A^{\frac{a}{2}}$ le nombre des Finis n'est que fini, & le nombre des Infinis infini, & que dans $A^{\frac{a}{\infty}}$ la derniére des $A^{\frac{a}{n}}$, c'est le contraire (293), dans toutes les $A^{\frac{a}{n}}$ moyennes, à mesure que n croît, le nombre des Finis augmente, & celui des Infinis diminue.

296. Mais comme d'une $A^{\frac{a}{n}}$ à la suivante, le nombre des Finis n'augmente qu'à proportion de l'augmentation de n, qui ne croît que d'une unité, le nombre des Finis n'augmente que finiment, tant que n est Fini déterminable, & par conséquent dans toutes les $A^{\frac{a}{n}}$ où n est un Fini déterminable, le nombre des Finis n'est que fini, mais croissant.

297. $\infty^{\frac{\infty}{2}}$, dernier terme de $A^{\frac{a}{2}}$, étant presque de l'ordre de ∞^{∞}, & $A^{\frac{a}{2}}$ séjournant dans l'ordre du Fini, où

elle a beaucoup plus de termes qu'il ne manque d'ordres $\infty^{\frac{\infty}{2}}$ pour être égal à ∞^{∞}, il faut néceſſairement que $A^{\frac{a}{2}}$ ſaute quelques ordres d'Infini, & comme elle a commencé par ſéjourner dans ſon premier ordre, il faut qu'enſuite elle paſſe par les ordres, & n'en ſaute qu'à ſon extrémité. Donc $\infty^{\frac{\infty}{2}}$ eſt ſeul de ſon ordre, & il fait ſeul la ſomme.

298. Il en va de même de toutes les $A^{\frac{a}{n}}$ ſuivantes, tant que n eſt fini.

299. Au contraire dans $A^{\frac{a}{\infty}}$ tous les termes ſont utiles à la ſomme. Elle n'eſt que de l'ordre de ∞, puiſqu'il n'y a qu'un nombre fini d'Infinis de cet ordre, mais elle eſt plus grande que ∞, ſomme des Unités, & plus grande d'une différence infinie.

Conſidération des $A^{\frac{n}{a}}$.

300. Si on éleve $A^{\frac{1}{a}}$ à la puiſſance n qui aura ſucceſſivement toutes ſes valeurs, ce qui donne $A^{\frac{1}{a}}$, $A^{\frac{2}{a}}$, $1^{\frac{2}{1}}$. $2^{\frac{2}{2}} = 2$. $3^{\frac{2}{3}}$, $4^{\frac{2}{4}} = 2$. $5^{\frac{2}{5}}$, &c. $\infty^{\frac{2}{\infty}}$. $A^{\frac{3}{a}}$, $1^{\frac{3}{1}}$. $2^{\frac{3}{2}}$. $3^{\frac{3}{3}} = 3$. 4, &c. $\infty^{\frac{3}{\infty}}$. $A^{\frac{4}{a}}$, $1^{\frac{4}{1}}$. $2^{\frac{4}{2}} = 4$. $3^{\frac{4}{3}}$. $4^{\frac{4}{4}} = 4$, &c. $\infty^{\frac{4}{\infty}}$, &c. on voit d'abord que ces Suites $A^{\frac{n}{a}}$ ont comme les $A^{\frac{a}{n}}$ un terme égal au terme correſpondant dans A, lorſque $n = a$, & que ce terme avance toujours d'une place à meſure que n croît d'une unité, mais qu'au contraire des $A^{\frac{a}{n}}$, tous les termes des $A^{\frac{n}{a}}$ juſqu'à ce terme égal ſont plus grands que leurs correſpondans dans A, & tous enſuite plus petits. La raiſon en eſt claire.

301. Donc dans la derniere des A, $^{\frac{n}{a}}$, qui eſt $A^{\frac{\infty}{a}}$, le terme égal eſt à la derniere place, & tous les termes qui le précedent,

précédent, hormis 1, le 1er de la Suite, sont plus grands que leurs correspondans dans A. En effet $A^{\frac{\infty}{a}}$ est $1^{\frac{\infty}{1}} = 1$. $2^{\frac{\infty}{2}}$, $3^{\frac{\infty}{3}}$, &c. $\infty^{\frac{\infty}{\infty}} = \infty$, ou $2^{\frac{\infty}{2}}$ est non-seulement plus grand que 2, son correspondant dans A, mais infiniment plus grand, de même $3^{\frac{\infty}{3}}$ infiniment plus grand que 3, &c.

302. Comme les $A^{\frac{n}{a}}$ ne sont que des puissances de $A^{\frac{1}{a}}$, & que dans $A^{\frac{1}{a}}$ le 3me terme est le plus grand de tous, & qu'elles sont croissantes jusqu'à lui, & de-là décroissantes (284), il suit qu'il en va de même dans toutes les $A^{\frac{n}{a}}$. Donc tant que le 3me terme de $A^{\frac{n}{a}}$ est fini, elles n'ont que des termes finis.

303. Le troisieme terme de toutes les $A^{\frac{n}{a}}$ est $3^{\frac{n}{3}}$, qui dans $A^{\frac{1}{a}}$ est $3^{\frac{1}{3}}$, & dans $A^{\frac{\infty}{a}}$, $3^{\frac{\infty}{3}}$, c'est-à-dire, que $3^{\frac{1}{3}}$ est élevé successivement dans les $A^{\frac{n}{a}}$ à toutes les puissances depuis la puissance 1 jusqu'à la puissance ∞. Or tant que n est fini, $3^{\frac{n}{3}}$ est une puissance finie de $3^{\frac{1}{3}}$, ou un nombre fini; donc tant que n est fini, les $A^{\frac{n}{a}}$ n'ont que des termes finis.

304. Donc les sommes des $A^{\frac{n}{a}}$ ne sont alors que de l'ordre de ∞, mais croissantes dans cet ordre.

305. Puisque n étant fini, tous les termes des $A^{\frac{n}{a}}$ sont finis, les derniers de chaque $A^{\frac{n}{a}}$ disposés de suite, qui sont

$\infty^{\frac{1}{\infty}}$, $\infty^{\frac{2}{\infty}}$, $\infty^{\frac{3}{\infty}}$, &c. ſont donc finis, & en général les $\infty^{\frac{n}{\infty}}$ ſont des nombres finis tant que n eſt fini.

306. Lorſque n eſt devenu quelque nombre Fini indéterminable x tel que le 3me terme de $A^{\frac{x}{a}}$, qui eſt alors $3^{\frac{x}{3}}$, ſoit infini pour la premiere fois, tous les termes ſuivans moindres que lui ſont encore finis, & quand dans les $A^{\frac{n}{a}}$ ſuivantes quelques-uns de ces Finis deviennent Infinis, ce ſont les plus proches du 3me terme, le 4me d'abord, enſuite le 5me, &c. deſorte que c'eſt à l'extrémité de ces Suites qu'il ſubſiſte plus long-temps des termes finis. Et comme dans la derniere de ces Suites, qui eſt $A^{\frac{\infty}{a}}$, tous les termes ſont infinis, il faut que depuis la 1re $A^{\frac{x}{a}}$, où le 3me terme a commencé à être infini, il y ait infiniment plus de Suites qui aient des termes finis à leur extrémité, qu'il n'y en a qui ont tous leurs termes infinis, ou, ce qui revient au même, le nombre des Suites qui ont des termes finis à leur extrémité eſt infini, & le nombre de celles qui n'ont que des termes infinis, n'eſt que fini.

307. Donc les derniers termes de toutes les $A^{\frac{n}{a}}$ étant $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, $\infty^{\frac{2}{\infty}}$, $\infty^{\frac{3}{\infty}}$, &c. $\infty^{\frac{\infty}{\infty}} = \infty$, qui ſont la Suite des puiſſances de $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, il y a un nombre infini de ces puiſſances, qui ſont finies, & un nombre ſeulement fini d'infinies, ce qui eſt le contraire de la Suite des puiſſances de 2, de 3, &c. (228, 239, &c.) Et cela même fait voir l'analogie qui eſt entre la Suite des puiſſances de 1 & de 2, & celle des puiſſances de $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, nombre moyen entre 1 & 2. Car toutes les puiſſances de 1 en nombre infini ſont finies;

$\infty^{\frac{1}{\infty}}$ a un nombre infini de puissances finies, & un nombre fini d'infinies, 2 a un nombre fini de puissances finies, & un infini d'infinies. D'où l'on peut même conjecturer qu'entre $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ & 2 il y a quelque nombre qui a un nombre infini de puissances finies, & un nombre infini égal d'infinies. Toujours il résulte des puissances de 1, de $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, & de 2, qu'une très-petite différence entre deux nombres fait une grande différence d'ordres entre leurs puissances ∞, comme il a été dit.

308. Dans $A^{\frac{\infty}{a}}$ le 2[d] terme $2^{\frac{\infty}{2}}$ est infiniment plus grand que le 1[er] terme 1, & d'une infinité d'ordres au-dessus. Car $2^{\frac{\infty}{2}}$ est $2^{\frac{1}{2}}$ élevé à ∞; or $2^{\frac{1}{2}}$ est le moyen géométrique entre 1 & 2, & par conséquent $2^{\frac{\infty}{2}}$ partage également le rapport de 1 à 2^{∞}. Or 2^{∞} est d'une infinité d'ordres au-dessus de 1 (235), donc $2^{\frac{\infty}{2}}$ est de la moitié de ce nombre infini d'ordres au-dessus de 1. $3^{\frac{\infty}{3}}$, 3[me] terme de $A^{\frac{\infty}{a}}$, est encore infiniment grand par rapport à $2^{\frac{\infty}{2}}$, mais moins au dessus de $2^{\frac{\infty}{2}}$ que $2^{\frac{\infty}{2}}$ n'étoit au-dessus de 1. Car, 1°. $3^{\frac{1}{3}}$ & $2^{\frac{1}{2}}$ sont deux nombres moyens entre 1 & 2, d'où il suit qu'étant élevés à ∞ $3^{\frac{1}{3}} > 2^{\frac{1}{2}}$ (242) est infiniment plus grand, & d'autant plus qu'ils sont pris tous deux dans le plus grand de tous les intervalles géométriques de A, qui est celui de 1 à 2. 2°. $3^{\frac{1}{3}}$ n'est pas si grand par rapport à $2^{\frac{1}{2}}$, que $2^{\frac{1}{2}}$ par rapport à 1, d'où il suit que $3^{\frac{\infty}{3}}$ n'est pas si élevé au-dessus de $2^{\frac{\infty}{2}}$, que $2^{\frac{\infty}{2}}$ au-dessus de 1. Donc dans le cours croissant de $A^{\frac{\infty}{a}}$ qui n'est composé que de 3 termes,

chaque terme diſparoît devant ſon conſéquent, & le rapport des termes eſt décroiſſant.

309. De même dans le cours décroiſſant de $A^{\frac{\infty}{a}}$, qui eſt compoſé d'une infinité de termes, leur rapport eſt décroiſſant, puiſque $A^{\frac{1}{a}}$ doit avoir des rapports décroiſſans, ou tendre à l'égalité auſſi-bien que $A^{\frac{1}{a}}$ (287). $3^{\frac{\infty}{3}}$ 1[er] terme du cours décroiſſant de $A^{\frac{\infty}{a}}$ étant infiniment plus grand que $2^{\frac{\infty}{2}}$ qui eſt d'une infinité d'ordres au-deſſus de 1 (308), il eſt donc d'une infinité d'ordres au-deſſus de 1, & au-deſſus de ∞, dernier terme de $A^{\frac{\infty}{a}}$ Mais ce nombre infini d'ordres dont $3^{\frac{\infty}{3}}$ ſurpaſſe ∞, eſt beaucoup moindre que ∞; & doit être diſtribué dans tout le cours décroiſſant de $A^{\frac{\infty}{a}}$, qui a un nombre de termes $= \infty - 3 = \infty$. Donc la Suite ſéjournera dans quelques ordres d'Infini, & les rapports de ſes termes étant décroiſſans, ce ſera vers ſon extrémité qu'elle ſéjournera, & à ſon extrémité même qu'elle fera ſon plus long ſéjour, qui ſera dans l'ordre de ∞. Et quand même ce ſéjour ſeroit infini, ce qui éleveroit à l'ordre de ∞^2 la ſomme des termes de ce dernier ordre, elle diſparoîtroit devant des Infinis ſupérieurs, qui diſparoîtront devant d'autres Infinis ſupérieurs & précédens, & toute la ſomme du cours décroiſſant de $A^{\frac{\infty}{a}}$, auſſi-bien que celle du cours croiſſant (308), ne ſera que $3^{\frac{\infty}{3}}$, 3[me] terme de la Suite.

Conſidération de la progreſſion géométrique G correſpondante à A.

310. Soit maintenant entre 1 & ∞, termes extremes de A, la progreſſion géométrique G, compoſée du mêms nombre de termes, & qui eſt $\div\!\div$ 1, $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, $\infty^{\frac{2}{\infty}}$, &c.

$\infty^{\frac{\infty}{\infty}} = \infty$ On sçait déja qu'il n'y a aucun de ses termes qui soit infiniment grand par rapport à son antécédent (165), & que *G*, qui est la Suite des puissances de $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ n'a qu'un nombre fini d'Infinis à son extrémité, & un nombre infini de Finis depuis son origine (307). On peut voir aussi d'une autre maniere cette derniere vérité. *G* partage le plus inégalement qu'il se puisse, l'intervalle entre 1 & ∞ que *A* partage également (71), donc *G* n'introduit pas dans cet intervalle une infinité tant de Finis que d'Infinis, car elle le partageroit comme fait *A*. Elle n'y introduit pas non plus un nombre fini de Finis, & un infini d'Infinis; car alors elle auroit au moins quelques termes moyens plus grands & infiniment plus grands que leurs correspondans dans *A*, ce qui est impossible (66). Donc elle introduit dans cet intervalle une infinité de Finis, & un nombre seulement fini d'Infinis, ce qui est la seule maniere possible de le partager le plus inégalement par rapport à celle dont *A* le partage.

311. On sait que dans toute Suite croissante le dernier terme moins le premier est la somme des différences de tous les termes de la Suite, donc dans *A* & dans *G* $\infty - 1$, où ∞ est la somme des différences de *A* & de *G*, & à cause de l'opposition de ces deux progressions, il doit être cette somme des deux manieres les plus opposées qu'il se puisse, où étant la somme d'une infinité de différences finies égales, ce qu'il est certainement dans *A*, ou étant la somme de différences croissantes, les unes finies en nombre infini, les autres infinies en nombre seulement fini, ce qu'il doit donc être dans *G*. Or les différences finies ne seront qu'entre des termes Finis du côté de l'origine, & les infinies entre des Infinis à l'extrémité. Donc, &c.

312. La somme des différences de *A* & de *G* étant la même, il faut que puisqu'il entre des Finis dans l'une & dans l'autre, & des Infinis dans celle des différences de *G* seulement, il y ait en récompense dans celle-ci des Finis beaucoup

plus petits que dans celle des différences de *A*. Et comme les plus petits Finis de la progreſſion des différences de *G* ſont à ſon origine, & que toutes les différences de *A* ſont des Unités, il faut que les premieres différences de *G* ſoient beaucoup plus petites que 1. En effet on a toujours trouvé $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ beaucoup moindre que 2, & par conſéquent $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ de bien peu plus grand que 1. Donc $\infty^{\frac{1}{\infty}} - 1$, premiere différence de *G*, eſt une fraction, dont 1 étant le numérateur, le dénominateur doit être un fort grand nombre, mais inconnu, qu'on peut appeller *x*, & la fraction ſera $\frac{1}{x}$.

313. La ſomme de *G* ne peut donc être qu'un Infini de l'ordre de ∞, & tous les Finis y ſeront utiles. En effet ſelon la Formule $\frac{am^n - a}{m-1}$, *a* étant ici $= 1$, $m = \infty^{\frac{1}{\infty}}$, $n = \infty$, on a pour la ſomme de *G* $\frac{\infty}{\infty^{\frac{1}{\infty}} - 1} = \infty$ diviſé par $\frac{1}{x}$ (312) $= x\infty$, *x* étant un grand nombre fini.

Rapport des ſommes de A & de G.

314. Donc la ſomme de *A* eſt à celle de *G* :: $\frac{\infty^2}{2}$. $x\infty$ :: ∞. $2x$.

315. On voit par-là la confirmation de ce qui a été dit dans l'art. 81, que l'augmentation de *b* par rapport à *a*, augmente plus le rapport de la ſomme de la progreſſion arithmétique à la ſomme de la progreſſion géométrique, que ne fait l'augmentation de *n*. Car ici *n* étant $= \infty$ auſſi-bien que *b*, ſi *n* augmentoit infiniment le rapport de la ſomme de *A* à celle de *G*, auſſi-bien que *b* l'a augmenté infiniment, la ſomme de *A* ſeroit de deux ordres au-deſſus de celle de *G*, or elle n'eſt que d'un ordre au-deſſus.

316. Il eſt bon d'approfondir davantage cette matiere, dont la connoiſſance confirmera des choſes qui ont été dites, & ſervira pour d'autres qui viendront.

En général les ſommes des deux progreſſions correſpon-

dantes, l'une arithmétique, l'autre géométrique, sont $\frac{an+bn}{2}$ & $\frac{b^{\frac{n}{n-1}}-a^{\frac{n}{n-1}}}{b^{\frac{1}{n-1}}-a^{\frac{1}{n-1}}}$ (79)

Si b est infini par rapport à a, n étant fini, ces deux sommes se réduisent à $\frac{bn}{2}$ & $\frac{b^{\frac{n}{n-1}}}{b^{\frac{1}{n-1}}} = b$. Donc elles sont :: $\frac{bn}{2}$. b :: n. 2.

Si alors $n = 3$, ce qui est sa moindre valeur possible, & $a = 1$, comme on l'a toujours supposé, on a pour la progression $A \div 1. \frac{\infty}{2}. \infty$, dont la somme est $\frac{3\infty}{2}$, & pour G on a $\dot{\div}\dot{\div}$ 1. $\infty^{\frac{1}{2}}$. ∞, dont la somme est ∞. Or ces deux sommes sont :: 3. 2 :: n. 2.

Si $n = 4$, on a $A \div 1. \frac{\infty}{3}. \frac{2\infty}{3}. \frac{3\infty}{3}$, dont la somme est 2∞, & $G \dot{\div}\dot{\div}$ 1. $\infty^{\frac{1}{3}}$. $\infty^{\frac{2}{3}}$. $\infty^{\frac{3}{3}}$, dont la somme est ∞, & ces deux sommes sont :: 2. 1 :: $n = 4$. 2.

Il en ira de même de toutes les valeurs successives de n fini. Dans toutes les A, tous les termes seront utiles à la somme, horsmis le premier, & dans toutes les G le dernier terme seul fera la somme, ce qui confirme toute la Théorie des Infinis radicaux, car s'ils ne disparoissoient pas, comme il a été dit, devant les Infinis potentiels, le rapport $\frac{n}{2}$ des deux sommes seroit faux, quoique démontré par le calcul.

317. Il n'est pas possible que si n continue de croître jusqu'à devenir infini, le rapport des sommes de A & de G ne devienne infini, lorsque n sera $= \infty$, mais il ne devient pas celui de ∞ à 2, comme on pourroit le conjecturer d'abord.

La raison en est que tant que n est fini, la grandeur $a^{\frac{1}{n-1}} = 1$ disparoît devant $b^{\frac{1}{n-1}}$ dans le dénominateur de la somme

de G, car alors $b^{\frac{1}{n-1}}$ eſt quelque Infini radical, mais dès que n eſt le plus petit $\propto$ poſſible, on a pour la ſomme de G

$$\frac{\infty^{\frac{\propto}{\propto-1}}-1}{\infty^{\frac{1}{\propto-1}}-1} = \frac{\infty}{\infty^{\frac{1}{\propto}}-1}$$, où 1 ne diſparoît plus devant $\infty^{\frac{1}{\propto}}$ qui eſt fini, & plus grand que $\infty^{\frac{1}{\infty}}$. Car ſi l'on conçoit que dans $\infty^{\frac{1}{n}}$, n augmente toujours, $\infty^{\frac{1}{n}}$ ne ſera infini que tant que n ſera fini, & qu'on aura $\infty^{\frac{1}{2}}$, ou $\infty^{\frac{1}{3}}$ &c. & tous les $\infty^{\frac{1}{\propto}}$ ſeront finis. Le rapport de la ſomme de A à celle de G, qui étoit le rapport déterminé de n à 2, tant que n étoit fini, change donc quand $n = \propto$.

$\infty^{\frac{1}{\propto}}$ eſt donc un nombre fini, toujours décroiſſant à meſure que n eſt un plus grand $\propto$, & la ſomme de G en eſt toujours d'autant plus grande, ce qui doit être, & n'empêche pas qu'elle ne ſoit toujours moins grande, & même infiniment moins grande que celle des correſpondantes A.

Quand $\infty^{\frac{1}{\propto}}$ en décroiſſant toujours devient $= 2$, on a pour la ſomme de G $\frac{\infty}{2-1} = \infty$, mais après cela $\infty^{\frac{1}{\propto}}$ continuant à décroître pour devenir $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ preſque égal à 1, les ſommes des G ſont ∞ diviſé par des fractions, ou multiplié par les dénominateurs de ces fractions, & par conſéquent ces ſommes ſont encore croiſſantes, ce qui donne enfin $\frac{\infty}{\infty^{\frac{1}{\infty}}-1} = x\infty$.

318 Le rapport de la ſomme de A à celle de G ayant été celui de n à 2, tant que n a été fini, deſorte que ſi cela eût continué, le rapport de la ſomme de la Suite naturelle à la ſomme de la progreſſion géométrique correſpondante eût

été

été celui de ∞ à 2 (317), & ce dernier rapport n'étant que celui de ∞ à $2x$ (314), moindre que celui de ∞ à 2, il s'ensuit que le rapport de la somme de *A* à celle de *G* a été d'abord en croissant comme n, qu'ensuite il a crû moins que n, que dans un certain endroit, ou pour une *A* & une *G* correspondante, il a été le plus grand qu'il pût être, & qu'alors il a été celui de ∞ à 2, si cela a été possible. Or cela l'a été, quand la somme de *A* a été en général $\frac{\infty^2}{2m}$, & celle de *G* $\frac{\infty}{m}$, c'est-à-dire, quand la somme de *A* a été une certaine partie m de $\frac{\infty^2}{2}$, somme de la Suite naturelle, & quand en même-temps dans la somme $\frac{\infty}{\infty^{\frac{1}{\infty}}-1}$, $\infty^{\frac{1}{\infty}}-1$ a été $=m$. Or m étant un nombre indéterminé, il a une infinité de valeurs qui donneroient ce rapport de ∞ à 2, & il arriveroit une infinité de fois que les sommes de *A* & de *G* auroient ce rapport: mais certainement cela n'arrive qu'une fois, & il faut déterminer quelle est alors la valeur de m.

Quand cela arrive, le rapport des sommes de *A* & de *G* est le plus grand qu'il se puisse, & par conséquent la somme de la progression arithmétique, qui est $\frac{\infty^2}{2m}$, est la plus approchante qu'il se puisse de la somme de la Suite naturelle, ou, ce qui est le même, m est le moindre nombre possible. Or il ne peut être moindre que 2, donc alors on a $\frac{\infty^2}{4}$, & $\frac{\infty}{2}$, ce qui donne pour les deux sommes le rapport de ∞ à 2.

319. Quand la somme de *A* est $=\frac{\infty^2}{4}$, elle est la somme de la progression arithmétique des Pairs ou des impairs, qui est $\frac{\infty^2}{4}$. Donc le nombre des termes est alors $n=\frac{\infty}{2}$, & c'est quand n a cette valeur, ou qu'il est à la moitié de toutes ses valeurs successives, que l'on a pour les deux sommes de *A*

& de G le rapport de ∞ à 2, qui eſt leur plus grand rapport poſſible.

320. On voit que la Suite naturelle A & la correſpondante G ſont d'une nature toute oppoſée, non-ſeulement en ce que l'une eſt une progreſſion arithmétique, & l'autre une géométrique, mais en ce que 1° A a une infinité tant de termes Finis que d'Infinis, & G une infinité de Finis, & un nombre ſeulement fini d'Infinis, 2°. tous les Finis de G, horſmis 1, ſont des $\sqrt[\infty]{\ }$ de ∞^{n} abſolument inconnues, & par-là même les Infinis de G ſont encore plus inconnus que ceux de A.

321. Les numérateurs des expoſans des termes de G étant la Suite des nombres naturels, il y a de ces numérateurs de trois eſpeces, des Finis déterminables n, des indéterminables x, & des $\propto$. On a donc outre les $\infty^{\frac{n}{\infty}}$, une infinité tant de $\infty^{\frac{x}{\infty}}$ que de $\infty^{\frac{\propto}{\infty}}$, qui ſont des nombres finis, & il n'y a qu'un nombre fini de $\infty^{\frac{\propto}{\infty}}$ qui ſoient Infinis. On verra encore mieux par le raiſonnement ſuivant, comment cela ſe fait. ∞ élevé à une puiſſance dont l'expoſant ſoit une fraction pure, comme toutes celles dont il s'agit ici, eſt élevé autant de fois qu'il y a d'unités dans le numérateur de la fraction, & abaiſſé autant de fois qu'il y a d'unités dans le dénominateur : car le numérateur exprime une puiſſance parfaite, & le dénominateur une $\sqrt{\ }$. Si ∞ eſt finiment élevé par le numérateur de ſon expoſant, & finiment abaiſſé par le dénominateur, ou, ce qui eſt le même, ſi le nombre des unités tant du numérateur que du dénominateur, n'eſt que fini, quelque différens que ſoient ces deux nombres entr'eux, ∞ n'a point reçu de changement quant à l'ordre, & il reſte dans celui dont il étoit. De-là vient que tous les $\infty^{\frac{1}{2}}$, $\infty^{\frac{1}{3}}$, &c. ſont des Infinis. Mais ſi ∞ eſt finiment élevé par le

numérateur de ſon expoſant, & infiniment abaiſſé par le dénominateur, il ſort de ſon ordre, & tombe dans celui du Fini, donc tous les $\infty^{\frac{n}{\infty}}$ & les $\infty^{\frac{x}{\infty}}$ ſont des nombres finis, & même tous les $\infty^{\frac{\propto}{\infty}}$, tant que $\propto$ a une différence infinie à ∞, & que par conſéquent il a une infinité d'unités moins que ∞. Or il y a une infinité de $\propto$ qui ont une différence infinie à ∞, & il n'y en a qu'un nombre fini qui aient à ∞ une différence finie (184). Donc, &c.



SECTION IV.

De la Grandeur infiniment petite.

Ce que c'eſt que l'Infiniment petit.

322. TOUTE grandeur a infiniment moins grande que b, eſt infiniment petite par rapport à elle. Ainſi 1 ou tout nombre fini eſt infiniment petit par rapport à ∞, ∞ l'eſt par rapport à ∞^2, &c. $\infty^{\frac{1}{3}}$ par rapport à $\infty^{\frac{1}{2}}$, &c. Mais ce ne ſont pas là les grandeurs que l'on appelle proprement ou abſolument *infiniment petites*. Ce ne ſont que celles qui le ſont par rapport au Fini, & il faut que nous en prouvions l'exiſtence.

323. La preuve de l'art. 82 porte également ſur la poſſibilité de la diminution infinie de la grandeur finie, & ſur la poſſibilité de ſon augmentation infinie, & tout ce qui a été dit enſuite ſur l'augmentation, s'applique de ſoi-même à la diminution. Donc puiſque la grandeur infiniment grande eſt la grandeur finie que l'on a conçue comme infiniment augmentée, l'infiniment petite doit être la même grandeur finie que l'on concevra comme infiniment diminuée.

324. 1 étant pris pour repréſenter en général la grandeur finie, plus le nombre par lequel je le diviſe eſt grand, plus je le diminue, deſorte que $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. ſont des grandeurs toujours décroiſſantes. Donc à la fin $\frac{1}{\infty}$ ſera une grandeur infiniment petite, ou, ce qui eſt la même choſe, l'Infiniment petit eſt une partie du Fini réſultante d'une diviſion pouſſée à l'infini, ou une partie *infinitieme* du Fini, comme 1 eſt une partie infinitieme de ∞.

325. Donc l'Infiniment petit eſt eſſentiellement une fraction, mais infiniment petite, ou, ce qui revient au même, une fraction dont le numérateur eſt fini, & le dénominateur infini. Et l'Infini eſt un entier infiniment grand, dont le Fini n'eſt qu'une partie infinitieme.

326. Donc $\div \frac{1}{\infty} . 1 . \infty$.

327. Et puisque 1, quoiqu'infiniment petit par rapport à ∞, est grandeur en lui-même, $\frac{1}{\infty}$, quoiqu'infiniment petit par rapport à 1, est aussi grandeur en lui-même. *Que l'Infiniment petit ou $\frac{1}{\infty}$ est grandeur.*

328. Donc $\frac{1}{\infty}$ peut être encore infiniment divisé, ce qui donnera $\frac{1}{\infty^2}$, partie infinitieme de $\frac{1}{\infty}$, ou infiniment petit de l'infiniment petit $\frac{1}{\infty}$, & l'on aura encore $\div\!\div \frac{1}{\infty^2}$. 1. ∞^2. *Ordres à l'Infini d'Infiniment petits.*

329. Et comme cela n'a point de fin, on aura 1. $\frac{1}{\infty}$. $\frac{1}{\infty^2}$. $\frac{1}{\infty^3}$. $\frac{1}{\infty^4}$, &c. $\frac{1}{\infty^\infty}$, c'est-à-dire, autant d'ordres d'Infiniment petits qui s'abaisseront à l'infini au-dessous de 1, que l'on a vû d'ordres d'Infinis qui s'élevoient à l'infini au-dessus de 1.

330. Toutes ces grandeurs $\frac{1}{\infty}$, $\frac{1}{\infty^2}$, $\frac{1}{\infty^3}$, &c. quoique toujours infiniment plus petites, seront toujours grandeurs (327 & 328), & même $\frac{1}{\infty^\infty}$, quoiqu'une infinité de fois infiniment plus petite que 1.

331. Il est visible que la Suite $\frac{1}{\infty}$, $\frac{1}{\infty^2}$, &c. $\frac{1}{\infty^\infty}$ est la Suite des puissances de $\frac{1}{\infty}$, & par conséquent progression géométrique.

332. Dans le Fini les élevations aux puissances augmentent de grandeur les nombres entiers, & diminuent les fractions. Dans l'Infini ces mêmes élevations doivent augmenter ou diminuer les grandeurs de grandeur & d'ordre en même-temps. Mais dans l'Infiniment grand, elles augmentent les grandeurs de grandeur & d'ordre, parce que les grandeurs infinies sont des entiers, & dans l'Infiniment petit elles diminuent les grandeurs de grandeur & d'ordre, parce que les Infiniment petits sont des fractions (325.)

333. Donc aussi, pour suivre cette analogie, puisque les extractions de racines diminuent de grandeur les entiers dans

le Fini, & augmentent de grandeur les fractions, & que dans l'infiniment grand elles diminuent les grandeurs de grandeur & d'ordre, il faut que dans l'infiniment petit elles augmentent les grandeurs de grandeur & d'ordre. Mais ces ordres ne sont que radicaux.

334. Tout cela se conclurra encore de ce que l'on aura toujours $\frac{1}{\infty^n} . \frac{1}{\infty^m} :: \infty^m . \infty^n$. m & n étant des nombres quelconques entiers ou rompus. Ainsi les rapports de tous les Infinis, soit potentiels, soit radicaux, ayant été traités, il seroit inutile de s'arrêter à ceux des Infiniment petits quelconques, qui ne sont que la même chose renversée.

335. De tout ce qui a été dit, il suit que

1°. $1 \pm \frac{1}{\infty} = 1$, ou $a \pm \frac{1}{\infty} = a$.

2°. $\frac{1}{\infty^n} \pm \frac{1}{\infty^{n+1}} = \frac{1}{\infty^n}$.

3°. $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{n+1}}} \pm \frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{n+1}}}$.

Comment different $\frac{1}{\infty}$ *& o.*

336. Si l'on change la Suite naturelle des nombres entiers en une Suite de fractions, qui auront toutes 1 pour numérateur, & pour dénominateurs les nombres naturels, ce qui donnera la progression *harmonique* $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, &c. on voit que cette Suite toujours décroissante aboutira à $\frac{1}{\infty}$, qui pourra être pris pour zero, non pour zero *absolu*, car $\frac{1}{\infty}$ est toujours grandeur en lui-même, mais pour zero *relatif*, c'est-à-dire, par rapport à toute grandeur finie, quelque petite qu'elle soit.

337. En prenant o pour absolu, on ne peut dire ni $\frac{0}{1}$, ni $\frac{1}{0}$, car le pur rien & la grandeur n'ont nul rapport géométrique, ni même $\frac{0}{0} = 1$, car il n'est point vrai, exactement parlant, que le pur rien soit une fois dans le pur rien. Mais en prenant o pour relatif, ou $0 = \frac{1}{\infty}$, on peut dire $\frac{0}{1}$, ce qui est le rapport géométrique de $\frac{1}{\infty}$ à 1, ou d'une partie

infiniment petite à ſon Tout. On peut dire $\frac{1}{0}$, ce qui eſt le rapport de 1 à $\frac{1}{\infty}$, ou d'un Tout à ſa partie infiniment petite, & enfin $\frac{0}{0}$, ce qui eſt le rapport d'un Infiniment petit à lui-même, ou 1.

338. Donc o étant pris pour relatif, $\frac{0}{1} = \frac{1}{\infty}$, & $\frac{1}{0} = \infty$. Et en effet $\frac{0}{1}$ eſt $\frac{1}{\infty}$ diviſé par 1, ou $\frac{1}{\infty}$, & $\frac{1}{0}$ eſt 1 diviſé par $\frac{1}{\infty}$, ce qui eſt $\frac{\infty}{1} = \infty$.

339. On peut exprimer $\frac{0}{1}$ ſimplement par o, & alors ce o, puiſqu'il eſt relatif, & $= \frac{1}{\infty}$, eſt eſſentiellement une fraction, quoiqu'il n'en ait pas la forme, & $\frac{1}{0}$, qui ne peut être exprimé autrement, en faiſant entrer o dans l'expreſſion, eſt un entier $= \infty$, quoiqu'il ait la forme d'une fraction.

340. o abſolu, & o relatif $= \frac{1}{\infty}$ peuvent par une eſpece d'accident venir à faire le même effet, quoiqu'ils ſoient en eux-mêmes eſſentiellement différens. Ainſi dans a^0 l'expoſant o étant abſolu, $a^0 = 1$, & d'un autre côté $a^{\frac{1}{\infty}} = 1$ (260).

341. A plus forte raiſon o abſolu & o relatif $= \frac{1}{\infty}$ feront-ils des effets différens, comme ils en font dans $\infty^0 = 1$ (110), & dans $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ grandeur finie plus grande que 1 (166). ∞^0 eſt une grandeur qui n'a été, ni n'a pû être abſolument formée par aucune multiplication, & par conſéquent 1, & $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ eſt l'Infini dont on tire une racine infiniment petite par rapport à lui, mais non pas nulle.

342. Si l'on veut ſavoir ce que ce ſeroit que $\sqrt[0]{a}$, il faut conſidérer que $\sqrt[0]{a}$ ne peut être que la derniere d'une Suite infinie de $\sqrt{}$ décroiſſantes de a, qui ſeroient par conſéquent $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, &c. Or la Suite de ces expoſans aboutit

à $\frac{1}{\infty}$ (336) qui eſt un o relatif. Donc dans l'expreſſion $\sqrt[0]{a}$, o ne peut être que relatif. Donc $\sqrt[0]{a} = a^{\frac{1}{\infty}} = 1$.

343. Dans le calcul $\sqrt[n]{a}$ eſt toujours $= a^{\frac{1}{n}}$, & de-là il ſemble qu'il devroit s'enſuivre $\sqrt[0]{a} = a^{\frac{1}{0}}$. Mais ce qui fait que cela ne s'enſuit pas, c'eſt que dans $a^{\frac{1}{n}}$, $\frac{1}{n}$ eſt toujours une fraction, or $\frac{1}{0}$ n'en eſt pas une (339), & au contraire o relatif en eſt une.

344. Par la même raiſon $a^{\frac{1}{0}} = a^{\infty}$.

345. La ſuite infinie de toutes les $\sqrt{}$ conſécutives de $\frac{1}{\infty}$, qui eſt $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{3}}}$, &c. eſt croiſſante (333), & elle aboutit à $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{\infty}}}$. Or $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ eſt une grandeur finie plus grande que 1, & moindre que 2. Donc $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{\infty}}}$ eſt une fraction finie, & toute la Suite des $\sqrt{\frac{1}{\infty}}$ eſt compriſe dans le ſeul ordre potentiel qui eſt entre $\frac{1}{\infty}$ & 1, comme celle des $\sqrt{\infty}$ eſt compriſe dans l'ordre correſpondant qui eſt entre 1 & ∞.

Quelles ſont les parties infinitiemes d'un Tout fini.

346. Tout ce qui a été dit depuis l'art. 161 juſqu'au 165 ſur la diviſion d'un Tout infini, ou en général d'un Tout quelconque en un nombre infini de parties égales ou inégales, s'applique ici de ſoi-même à la diviſion d'un Tout fini. Ainſi ſi un Tout fini eſt diviſé en une infinité de parties égales, elles ſont toutes infiniment petites & de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$; ſi les unes ſont finies, & les autres infiniment petites, il n'y en a qu'un nombre fini de finies, & une infinité d'infiniment petites. Il en iroit de même d'un Tout qui ſeroit $\frac{1}{\infty}$ ou $\frac{1}{\infty^2}$, &c.

347.

347. Le rapport arithmétique de 1 à $\frac{1}{\infty}$ étant 1, puisque $1 - \frac{1}{\infty} = 1$ (335), si on divise ce rapport en une infinité de parties égales, on aura donc une progression arithmétique comprise entre $\frac{1}{\infty}$ & 1, dont toutes les différences seront infiniment petites, & qui sera $\div \frac{1}{\infty} . \frac{2}{\infty} . \frac{3}{\infty}$, &c. $\frac{\infty}{\infty} = 1$, c'est-à-dire, que ce seront tous les termes de la Suite naturelle divisés chacun par ∞, ou dont on prendra la partie infinitieme. Donc tant que les termes de la Suite naturelle seront finis, ceux de la nouvelle progression seront infiniment petits; & quand les termes de la Suite naturelle seront infinis, ceux de la nouvelle progression seront finis.

Considération de la progression arithmétique comprise entre $\frac{1}{\infty}$ & 1.

348. Il y aura donc dans cette nouvelle progression une infinité de termes finis, qui n'auront chacun à celui qui le suivra, qu'une différence infiniment petite & $= \frac{1}{\infty}$, & comme cette différence ne sera pas à compter par rapport à eux, ils seront égaux à cet égard, & ne le seront pourtant pas à la rigueur, puisqu'ils seront termes d'une grogression toujours croissante. C'est ainsi que des grandeurs peuvent être égales en un sens, & inégales en un autre, selon ce qui avoit été entrevû dans l'art. 263. Cela se trouve toujours en général, quand elles sont croissantes ou décroissantes, & que leurs différences, qui sont leurs accroissemens ou décroissemens, sont d'un ordre inférieur à elles.

349. Les termes de la Suite naturelle étant des n finis déterminables, des x finis indéterminables, & des $\propto$, tous les $\frac{n}{\infty}$ & $\frac{x}{\infty}$ de la $\div \frac{1}{\infty}, \frac{2}{\infty}$, &c. seront infiniment petits, & tous les $\frac{\propto}{\infty}$ finis & des fractions moindres que 1 (188) jusqu'à ce qu'enfin la progression se termine par 1. Et en effet selon la formule $\overline{2a + \overline{m \times n - 1}} \times \frac{n}{2}$ (77), la somme de cette progression est $\overline{\frac{2}{\infty} + \overline{\frac{1}{\infty} \times \infty}} \times \frac{\infty}{2} = \frac{2}{\infty} + 1$

$\times \frac{\infty}{2} = \frac{\infty}{2}$, ce qui marque bien que cette progreſſion a une infinité de termes finis, & moindres que 1, puiſque la Suite infinie des Unités a une ſomme $= \infty$.

350. Il faut donc concevoir que comme dans cette progreſſion une infinité de termes finis ſont égaux & croiſſans, parce qu'ils croiſſent infiniment peu, ainſi les termes de la Suite $1^{\frac{1}{\infty}}, 2^{\frac{1}{\infty}}, 3^{\frac{1}{\infty}}$, &c. $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ de l'art. 260, & ceux de la Suite $1^{\frac{1}{\infty}}, 2^{\frac{2}{\infty}}, 3^{\frac{3}{\infty}}$, &c. $\infty^{\frac{\infty}{\infty}} = \infty$ de l'art. 292. ſont égaux & croiſſans tant qu'ils n'ont que des différences infiniment petites par rapport à eux, ce qui leve toute la difficulté de l'art. 263, & explique pleinement l'art. 286.

351. Donc $a^{\frac{1}{\infty}} = 1$ ne l'eſt pas exactement & à la rigueur, mais ſeulement parce que ſa différence à 1 eſt infiniment petite, & plus a eſt grand, plus cette différence infiniment petite eſt grande, de ſorte que quand $a = \infty$, cette différence doit devenir finie, & en effet on a toujours trouvé que $\infty^{\frac{1}{\infty}} - 1$ étoit une grandeur finie.

Conſidération de la progreſſion géométrique compriſe entre $\frac{1}{\infty}$ & 1.

352. Le rapport géométrique de 1 à $\frac{1}{\infty}$ étant $= \infty$, ſi on le diviſe en une infinité de parties égales, on aura la progreſſion $\div \frac{1}{\infty} = \frac{\infty^{\frac{0}{\infty}}}{\infty}, \frac{\infty^{\frac{1}{\infty}}}{\infty}, \frac{\infty^{\frac{2}{\infty}}}{\infty}$, &c. $\frac{\infty^{\frac{\infty}{\infty}}}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = 1$, dans laquelle tous les rapports ſont égaux & finis, c'eſt-à-dire, qu'aucun terme ne ſera infiniment grand, ou petit, par rapport à ſon antécédent, ou à ſon conſéquent. Il eſt viſible que cette progreſſion eſt la progreſſion $\div 1. \infty^{\frac{1}{\infty}}. \infty^{\frac{2}{\infty}}$, &c. $\infty^{\frac{\infty}{\infty}} = \infty$ de l'art. 310, correſpondante à la Suite naturelle, mais dont chaque terme eſt diviſé par ∞, enſorte que chaque terme de cette nouvelle progreſſion eſt la partie infinitieme de ſon correſpondant dans la premiere. Or la partie infinitieme d'un nombre fini eſt un $\frac{1}{\infty}$,

& la partie infinitieme d'un infini est un nombre fini ; & d'un autre côté la premiere progression a un nombre infini de termes finis, & un nombre seulement fini d'infinis (310), donc la nouvelle a une infinité de termes infiniment petits, & un nombre seulement fini de finis. En effet puisque $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ est fini, $\frac{\infty^{\frac{1}{\infty}}}{\infty}$ est un $\frac{1}{\infty}$, de même $\frac{\infty^{\frac{2}{\infty}}}{\infty}$, &c.

353. Si l'on prend la somme de cette progression, où $a = \frac{1}{\infty}$, $m = \infty^{\frac{1}{\infty}}$, $n = \infty$, on a $\frac{\frac{1}{\infty} \times \infty^{\frac{\infty}{\infty}} - \frac{1}{\infty}}{\infty^{\frac{1}{\infty}} - 1} = \frac{\frac{\infty}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{\infty^{\frac{1}{\infty}} - 1} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{\infty^{\frac{1}{\infty}} - 1} = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{\infty}} - 1} = 1 \times x$ (312) grandeur finie, ce qui fait voir qu'il n'y a dans la progression qu'un nombre fini de termes finis.

354. Les différences de cette progression étant aussi en progression, & en même progression, il y en a une infinité d'infiniment petites, & un nombre fini de finies. Et en effet leur somme est $1 - \frac{1}{\infty} = 1$.

355. En général de ce que les différences des termes d'une progression géométrique sont en même progression, il suit que les différences sont d'autant d'ordres différens que les termes, & en nombre pareillement fini ou infini dans chaque ordre. Car la progression des différences a le même multiplicateur perpétuel que la progression primitive (68), & c'est uniquement de la grandeur de ce multiplicateur que dépend celle des pas d'une progression; ou, ce qui est le même, c'est en vertu de la grandeur de ce multiplicateur qu'elle s'éleve à des ordres supérieurs à ceux de son origine, & y séjourne plus ou moins, d'où il suit que dans la progression primitive & dans celle des différences, tout sera le même à cet égard.

Cela n'emporte pas que dans la progression primitive, & dans celle des différences, les ordres différens soient les

mêmes dans chacune, car les différences peuvent être d'un ordre inférieur aux termes de la progression primitive, par exemple infiniment petites, les termes étant finis : mais il y aura autant d'ordres différens dans une progression que dans l'autre, & les mêmes séjours ; & s'il n'y a qu'un ordre dans la primitive, il n'y en aura qu'un, mais inférieur dans celle des différences. Ainsi dans la progression des puissances de $2^{\frac{1}{\infty}}$, qui est $\div 2^{\frac{0}{\infty}} = 1.\ 2^{\frac{1}{\infty}}.\ 2^{\frac{1}{\infty}}$, &c. $2^{\frac{\infty}{\infty}} = 2$, & qui n'a que des termes finis, la progression des différences n'a que des termes de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$.

356. De-là même suit encore ce qu'on a dit tant de fois, que $\infty^{\frac{1}{\infty}} - 1$ est une grandeur finie : car si elle n'étoit pas finie, elle seroit infiniment petite, or elle ne l'est pas. C'est la différence des deux 1[ers] termes de la $\div 1.\ \infty^{\frac{1}{\infty}}.\ \infty^{\frac{2}{\infty}}$, &c. ∞, qui n'a des termes que de l'ordre du Fini & de ∞. Donc la progression des différences n'a des termes que de deux ordres. Certainement elle en a à son extrémité qui sont de l'ordre de ∞, car l'intervalle qui est entre 1 & ∞ est divisé le plus inégalement qu'il se puisse (72), donc elle n'a des termes que de l'ordre de ∞ & de celui du Fini. Donc $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ moins son 1[er] terme 1, ou $\infty^{\frac{1}{\infty}} - 1$, n'est pas un Infiniment petit, mais une grandeur finie.

357. Mais je dis en même-temps que cette grandeur finie, qui est une fraction, est si petite, qu'élevée au quarré, elle devient infiniment petite, c'est-à-dire, que $1 - 2\infty^{\frac{1}{\infty}} + \infty^{\frac{2}{\infty}} = \frac{1}{\infty}$, ou, ce qui est le même, $2\infty^{\frac{1}{\infty}} - \infty^{\frac{2}{\infty}} = 1 - \frac{1}{\infty}$.

$2\infty^{\frac{1}{\infty}} - \infty^{\frac{2}{\infty}}$ est la différence du double de $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ à son quarré : or tout nombre compris entre 1 & 2, comme

$\infty^{\frac{1}{\infty}}$, eſt tel que ſon double eſt plus grand que ſon quarré, cette différence allant toujours en décroiſſant juſqu'à 2, qui a ſon double & ſon quarré égaux.

Soit en général ce nombre moyen entre 1 & 2, $1 + \frac{1}{x}$; la différence de ſon double & de ſon quarré eſt $1 - \frac{1}{xx}$. Or ſi on détermine $1 + \frac{1}{x}$ à être $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, la différence $1 - \frac{1}{xx}$ devient $1 - \frac{1}{\infty}$, ce que je prouve ainſi.

$\infty^{\frac{1}{\infty}}$ eſt tel, qu'élevé à la puiſſance ∞, il eſt $= \infty$, donc auſſi $1 + \frac{1}{x}$, ou $\frac{x+1}{x}$. Donc $\frac{\overline{x+1}^{\infty}}{x^{\infty}} = \infty$. Pour cela il faut néceſſairement que $\overline{x+1}^{\infty}$ ne ſoit que d'un ordre au deſſus de x^{∞}. Mais tant que dans $1 + \frac{1}{x}$, x ſera un Fini déterminable, $\overline{x+1}^{\infty}$ ſera d'une infinité d'ordres au-deſſus de x^{∞}; & au contraire ſi x étoit $= \infty$, $\overline{x+1}^{\infty}$ & x^{∞} ſeroient du même ordre (241 & 242), ce qui approche infiniment plus de ce qu'il faudroit. Donc afin que $\overline{x+1}^{\infty}$ & x^{∞} ne different que d'un ordre préciſément, il faut que x ſoit le plus grand Fini indéterminable poſſible. Or les plus grands Finis de cette eſpece ſont ceux qui dès l'élévation au quarré deviennent infinis. Donc tel eſt x dans $1 + \frac{1}{x} = \infty^{\frac{1}{\infty}}$. Donc la différence $1 - \frac{1}{xx} = 1 \frac{1}{\infty}$. Donc, &c.

358. Donc il y a des grandeurs finies *indéterminables en petiteſſe*, comme il y en a de finies indéterminables en grandeur, c'eſt-à-dire, que comme celles-ci élevées à une puiſſance finie montent d'ordre, les autres baiſſent, & la ſeule analogie d'oppoſition auroit ſuffi pour le faire conjecturer.

359. Il ſuit & de cette analogie & de la nature même de la choſe, que le Fini indéterminable en petiteſſe, étant multiplié par l'Infini, peut demeurer Fini, comme le Fini

indéterminable en grandeur, multiplié par le Fini, devient Infini, pourvû que le Fini qui le multiplie ſoit d'une certaine grandeur. En effet le Fini indéterminable en petiteſſe étant moyen entre 1 & $\frac{1}{\infty}$, & $\frac{1}{\infty} \times \infty$ n'étant que 1, le Fini indéterminable en petiteſſe, multiplié par ∞, peut bien n'être qu'un nombre Fini plus grand que 1.

360. Quand on a pris $\infty^{\frac{1}{\infty}} - 1 = \frac{1}{x}$, cet x eſt viſiblement le même que celui qui entre dans $1 + \frac{1}{x} = \infty^{\frac{1}{\infty}}$ (357). Donc dans la ſomme de la $\div 1. \infty^{\frac{1}{\infty}}. \infty^{\frac{2}{\infty}}$, &c. ∞, qui eſt $x\infty$ (313), x eſt un Fini indéterminable en grandeur, & la ſomme eſt plus grande dans l'ordre de ∞ que ſi x étoit un nombre Fini déterminable quelconque, mais elle ne va pas juſqu'à être de l'ordre de ∞^2. Il faudroit pour cela qu'elle fût $x^2\,\infty$.

Conſidération de toutes les Suites A, A^n, *&c. changées en* $\frac{1}{A}$. $\frac{1}{A^n}$, *&c.*

361. Quand on a une Suite quelconque compoſée de nombres entiers, les uns finis, & les autres infinis, on la peut changer en une Suite de fractions, dont les dénominateurs ſeront tous les termes de la Suite des entiers, & 1 le numérateur perpétuel & conſtant; & alors tous les termes qui dans la 1re Suite étoient finis, demeureront finis dans la 2de, & ceux qui dans la 1re étoient infinis, deviendront infiniment petits dans la 2de. Ce ſera encore la même choſe, ſi tous les numérateurs ſont inégaux, mais finis. On en a déja vû un exemple dans l'art. 336. Donc en réduiſant toutes les Suites de la Section précédente en fractions qui aient toujours pour numérateur 1, ou un nombre fini quelconque, ou enfin toujours des nombres finis différens pour différentes Suites, ou différens pour une même, on ſaura tout d'un coup ſi ces nouvelles Suites auront un nombre fini ou infini de termes finis ou infiniment petits, & par conſéquent ſi leurs ſommes ſeront finies ou infinies, puiſqu'on ſait ſi les Suites primitives ont un nombre fini ou infini de termes finis ou infinis.

362. Donc ſi la Suite naturelle *A* devient $\frac{1}{A}$, c'eſt-à-dire,

$\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c, $\frac{1}{\infty}$, la somme en est infinie, car A a un nombre infini de termes finis qui demeurent Finis dans $\frac{1}{A}$. De plus les Infinis de A, qui sont en nombre infini, & plus grand que celui des Finis, deviennent dans $\frac{1}{A}$ des infiniment petits en nombre infini, dont la somme est finie, & par conséquent se joint aux termes finis de $\frac{1}{A}$, & est utile à la somme totale. Cette somme totale infinie est beaucoup moindre que ∞, somme des Unités, puisque chaque terme fini de $\frac{1}{A}$ est moindre, & toujours moindre que 1, & que $\frac{1}{A}$ a une infinité d'infiniment petits.

363. Puisque A^2 n'a qu'un nombre fini de termes finis, & tous les autres infinis (210), la Suite $\frac{1}{A^2}$, ou $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, &c. $\frac{1}{\infty^2}$, ne peut avoir qu'une somme finie.

Il est démontré selon d'autres méthodes que $\frac{1}{A}$ a une somme infinie, & $\frac{1}{A^2}$ une somme finie, d'où il suit nécessairement qu'une infinité de termes qui étoient finis dans $\frac{1}{A}$ ont cessé de l'être dans $\frac{1}{A^2}$, & y sont devenus infiniment petits, c'est-à-dire, qu'une infinité de $\frac{1}{x}$ finis sont devenus infiniment petits, étant $\frac{1}{x^2}$, ou que x fini est devenu infini, étant x^2, ce qui prouve invinciblement *à posteriori* tout le Paradoxe des Finis indéterminables. Car si on prétend que tous les Finis de A sont demeurés finis dans A^2, donc il y a une infinité de termes finis dans $\frac{1}{A^2}$, aussi-bien que dans $\frac{1}{A}$, donc elles ont toutes deux une somme infinie, quoique celle de $\frac{1}{A^2}$ soit la moindre. Donc le contraire d'une vérité constante & reçue seroit démontré.

364. Puisque A a un nombre infini tant de ∞ que de ∞^2 (210), $\frac{1}{A^2}$ a un nombre infini tant de $\frac{1}{\infty}$ que de $\frac{1}{\infty^2}$, & par conséquent tous ses infiniment petits sont utiles à sa somme.

365. Il est aisé de voir que toutes les $\frac{1}{A^n}$, n étant > 1,

n'auront que des ſommes finies, & toujours décroiſſantes juſqu'à celle de $\frac{1}{A^{\infty}}$, qui eſt la Suite $\frac{1}{1^{\infty}}$, $\frac{1}{2^{\infty}}$, $\frac{1}{3^{\infty}}$, &c. $\frac{1}{\infty^{\infty}}$, dont la ſomme n'eſt que le 1er terme $\frac{1}{1^{\infty}} = 1$, puiſque 2^{∞} étant infiniment grand par rapport à 1, & infiniment petit par rapport à 3^{∞}, & 3^{∞} infiniment petit par rapport à 4^{∞}, &c. (239 & 240), $\frac{1}{2^{\infty}}$ diſparoît devant 1, $\frac{1}{3^{\infty}}$ devant $\frac{1}{2^{\infty}}$, &c.

Un plus grand détail de ce qui regarde les Suites moyennes entre $\frac{1}{A^2}$ & $\frac{1}{A^{\infty}}$ ſe préſentera de ſoi-même.

366. Toutes les Suites $A^{\frac{1}{n}}$ depuis $A^{\frac{1}{1}} = A$, ou depuis $A^{\frac{1}{2}}$ juſqu'à $A^{\frac{1}{\infty}}$, ayant une infinité croiſſante de termes finis (250, 254, 259, 260), les Suites $\frac{1}{A^{\frac{1}{n}}}$ qui ſont $\frac{1}{1^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}$, &c. $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$, ou $\frac{1}{1^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}}$, &c. $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{3}}}$, ou $\frac{1}{1^{\frac{1}{4}}}$, $\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}$, $\frac{1}{3^{\frac{1}{4}}}$, &c. $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{4}}}$, &c. ont des ſommes infinies; & comme les termes de $\frac{1}{A^{\frac{1}{3}}}$ ſont plus grands que leurs correſpondans dans $\frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}$, ceux de $\frac{1}{A^{\frac{1}{4}}}$ plus grands que leurs correſpondans dans $\frac{1}{A^{\frac{1}{3}}}$, &c. ces ſommes infinies des $\frac{1}{A^{\frac{1}{n}}}$ ſont croiſſantes, tant parce que le nombre de leurs termes finis eſt toujours plus grand, que parce que leurs termes ſont toujours plus grands. La premiere de ces Suites, qui eſt $\frac{1}{A^{\frac{1}{1}}} = \frac{1}{A}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. $\frac{1}{\infty}$, a une ſomme infinie beaucoup moindre que ∞ (362).

(362). La derniere Suite $\frac{1}{A^{\frac{1}{\infty}}}$ est $= A^{\frac{1}{\infty}}$, parce que tous les termes des $A^{\frac{1}{\infty}}$ sont $= 1$, horsmis le dernier (267), & la somme de $A^{\frac{1}{\infty}}$ est $= \infty$ (267). Donc toutes les sommes infinies croissantes des $\frac{1}{A^{\frac{1}{n}}}$ sont comprises entre un Infini beaucoup moindre que ∞, & ∞.

367. Puisque toutes les $A^{\frac{n-1}{n}}$, dont la premiere est $A^{\frac{1}{2}}$; & la derniere A (271), ont un nombre infini décroissant de termes finis (273), les $\frac{1}{A^{\frac{n-1}{n}}}$ qui sont $\frac{1}{1^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}$, &c. $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$, ou $\frac{1}{1^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{1}{3^{\frac{2}{3}}}$, &c. $\frac{1}{\infty^{\frac{2}{3}}}$, ou $\frac{1}{1^{\frac{3}{4}}}$, $\frac{1}{2^{\frac{3}{4}}}$, $\frac{1}{3^{\frac{3}{4}}}$, &c. $\frac{1}{\infty^{\frac{3}{4}}}$, &c. auront des sommes infinies, mais décroissantes, tant parce que le nombre de leurs termes finis est décroissant, que parce que les termes de $\frac{1}{A^{\frac{2}{3}}}$ sont plus petits que leurs correspondans dans $\frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}$, ceux de $\frac{1}{A^{\frac{3}{4}}}$ plus petits que leurs correspondans dans $\frac{1}{A^{\frac{2}{3}}}$, &c. La premiere de ces Suites, qui est $\frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}$, a une somme plus grande que celle de $\frac{1}{A}$ (366), & la derniere, qui est $\frac{1}{A}$, a une somme beaucoup moindre que ∞. Donc le nombre infini des sommes infinies décroissantes des $\frac{1}{A^{\frac{n-1}{n}}}$ est compris entre deux Infinis moindres que ∞.

368. Puisque les $A^{\frac{n}{n-1}}$, dont la premiere est $A^{\frac{2}{1}} = A^2$, & la derniere A, n'ont, tant que n est fini déterminable, qu'un nombre fini de termes finis, mais croissant (281), toutes les $\frac{1}{A^{\frac{n}{n-1}}}$ où n sera Fini déterminable, qui sont $\frac{1}{1^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}$, &c. $\frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$, ou $\frac{1}{1^{\frac{4}{3}}}$, $\frac{1}{2^{\frac{4}{3}}}$, $\frac{1}{3^{\frac{4}{3}}}$, &c. $\frac{1}{\infty^{\frac{4}{3}}}$, ou $\frac{1}{1^{\frac{5}{4}}}$, $\frac{1}{2^{\frac{5}{4}}}$, $\frac{1}{3^{\frac{5}{4}}}$, &c. $\frac{1}{\infty^{\frac{5}{4}}}$, &c. auront des sommes finies, mais croissantes, tant parce que le nombre des termes finis est croissant, que parce que les termes de $\frac{1}{A^{\frac{4}{3}}}$ sont plus grands que leurs correspondans dans $\frac{1}{A^{\frac{3}{2}}}$, & ainsi de suite. Et comme $\frac{1}{A^2}$ n'a qu'une somme finie (363), & que $\frac{1}{A}$ en a une infinie beaucoup moindre que ∞, toutes les sommes des $\frac{1}{A^{\frac{n}{n-1}}}$ moyennes seront comprises entre ces deux termes.

369. On trouvera de même que $\frac{1}{A^a}$ (282) qui est $\frac{1}{1^1}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{3^3}$, &c. $\frac{1}{\infty^\infty}$, n'a qu'une somme finie.

370. Selon l'article 296, les $\frac{1}{A^{\frac{a}{n}}}$, qui sont $\frac{1}{1^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{2^{\frac{2}{2}}}$, $\frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}$, &c. $\frac{1}{\infty^{\frac{\infty}{2}}}$, ou $\frac{1}{1^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{1}{3^{\frac{3}{3}}}$, &c. $\frac{1}{\infty^{\frac{\infty}{3}}}$, ou $\frac{1}{1^{\frac{1}{4}}}$, $\frac{1}{2^{\frac{2}{4}}}$, $\frac{1}{3^{\frac{3}{4}}}$, &c. $\frac{1}{\infty^{\frac{\infty}{4}}}$, &c. auront des sommes finies, tant que n sera fini. Et comme la premiere de ces Suites, qui est $\frac{1}{A^{\frac{a}{1}}} = \frac{1}{A^a}$, n'a qu'une somme finie (369), & que la

derniere, qui eſt $\frac{1}{A^{\frac{a}{\infty}}}$, a une ſomme infinie, puiſque $A^{\frac{a}{\infty}}$ a une infinité de termes finis (293), toutes les ſommes des $\frac{1}{A^{\frac{a}{n}}}$ ſeront croiſſantes depuis le Fini juſqu'à un Infini, & cet Infini ſera moindre que ∞; puiſque les termes de $\frac{1}{A^{\frac{a}{\infty}}}$ ſont pour la plus grande partie moindres que des Unités, & que cette Suite a des Infiniment petits.

371. Selon l'art. 284, $\frac{1}{A^{\frac{1}{a}}}$, qui eſt $\frac{1}{1^{\frac{1}{1}}}$, $\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}}$, &c. $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{\infty}}}$ aura une ſomme infinie, mais moindre que celle des Unités, puiſque tous ſes termes ſont des fractions moindres que 1. $\frac{1}{A^{\frac{\infty}{a}}}$, qui eſt ſelon l'art. 301, $\frac{1}{1^{\frac{\infty}{1}}}$, $\frac{1}{2^{\frac{\infty}{2}}}$, $\frac{1}{3^{\frac{\infty}{3}}}$, &c. $\frac{1}{\infty}$, n'aura qu'une ſomme finie, qui ſera d'abord formée du 1[er] terme $\frac{1}{1^{\frac{\infty}{1}}} = 1$, devant lequel diſparoîtront les termes ſuivans, qui ſont des infiniment petits d'ordres differens. Mais comme cette Suite au contraire de ſa génératrice $A^{\frac{\infty}{a}}$ eſt croiſſante depuis ſon 3[me] terme, elle aura à ſon extrémité ſes plus grands infiniment petits, & comme elle en peut avoir au moins dans ſon dernier ordre un nombre infini (309), ils feront en ce cas une ſomme finie qui s'ajoutera à 1 pour faire la ſomme totale, qui ne ſera formée que de termes pris aux deux extrémités de la Suite. Que ſi elle n'a pas dans ſon dernier ordre un nombre infini d'Infiniment petits, toute ſa ſomme ne ſera que 1. Donc les $\frac{1}{A^{\frac{n}{a}}}$ moyennes entre $\frac{1}{A^{\frac{1}{a}}}$ & $\frac{1}{A^{\frac{\infty}{a}}}$, auront des ſommes décroiſſantes depuis un Infini

moindre que ∞, jusqu'à un très-petit nombre fini. Ces sommes seront infinies, tant que n aura des valeurs finies, & même quand il aura un certain nombre infini de valeurs infinies (306).

372. Puisque 2 n'a qu'un nombre fini de puissances finies (228), & à plus forte raison tous les autres nombres plus grands que 2, la Suite des puissances d'un nombre n fini étant réduite en fractions, qui sera $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n^3}$, &c. $\frac{1}{n^\infty}$, n'aura qu'une somme finie, & d'autant moindre que n sera plus grand. Et en effet, cette Suite étant une progression géométrique, on trouvera aisément que la somme en est $\frac{1}{n-1}$. Si, par exemple, $n = 2$, la somme de la Suite infinie des puissances de $\frac{1}{2}$, à commencer par $\frac{1}{2}$, est 1, celle des puissances de $\frac{1}{3}$ est $\frac{1}{2}$, celle des puissances de $\frac{1}{4}$ est $\frac{1}{3}$, &c. & même celle des puissances de $\frac{1}{\infty}$ est $\frac{1}{\infty - 1} = \frac{1}{\infty}$, car toute la somme se réduit au 1er terme de la Suite.

373. Quand un nombre infini de Suites ont toutes leurs sommes comprises dans le même ordre, il faut, ou que les différences de ces sommes soient toutes de l'ordre inférieur, ou qu'il y ait un nombre fini de ces différences qui soient de l'ordre supposé, & un nombre infini de l'ordre inférieur. Dans le 1er cas, les sommes de deux Suites consécutives, ou qui ne sont qu'à une distance finie l'une de l'autre, sont égales, ou infiniment peu inégales; dans le 2d, il y en a un nombre fini d'inégales, & un nombre infini d'égales, ou du moins d'infiniment peu inégales, & elles tendoient toutes à l'égalité. De-là il suit, que si de ce nombre infini de Suites on voit que les premieres aient des sommes inégales, elles sont toutes dans le 2d cas, & leurs sommes tendent à l'égalité, & en approchent d'autant plus que les Suites sont plus avancées dans leur cours. Donc les sommes des Suites $\frac{1}{A^n}$ étant toutes comprises dans l'ordre du Fini, dès que $n = 2$ (365), & les premieres de ces sommes étant manifestement inégales, elles

tendent toutes à l'égalité ; c'est-à-dire, que par ex. la somme de $\frac{1}{A^4}$ approche plus d'être égale à celle de $\frac{1}{A^3}$, que celle de $\frac{1}{A^3}$ n'approche d'être égale à celle de $\frac{1}{A^2}$. De même les sommes des $\frac{1}{A^{\frac{1}{n}}}$ de l'art. *366*, & plusieurs autres qu'il sera aisé de voir, tendront à l'égalité.

Considération de la Suite $\frac{1}{G}$ correspondante à $\frac{1}{A}$.

374. Si l'on réduit en fractions la progression géométrique *G*, correspondante à *A*, ce qui donne $\frac{1}{G}$ ∺ $1 = \frac{1}{\infty^{\frac{0}{\infty}}} \cdot \frac{1}{\infty^{\frac{1}{\infty}}} \cdot \frac{1}{\infty^{\frac{2}{\infty}}}$, &c. $\frac{1}{\infty^{\frac{\infty}{\infty}}} = \frac{1}{\infty}$, la somme en est infinie, puisque *G* a une infinité de termes Finis, & un nombre seulement fini d'Infinis. Mais cette somme est moindre & beaucoup moindre que ∞, puisque $\frac{1}{G}$ n'a que des termes moindres que 1, excepté le 1[er], & toujours décroissans, & qu'elle a des Infiniment petits, & d'ailleurs la même somme est plus grande que celle de $\frac{1}{A}$ qui est infinie (*362*), puisque les termes de *A* étant tous plus grands que ceux de *G*, excepté les deux extremes, les termes de $\frac{1}{G}$ sont plus grands que ceux de $\frac{1}{A}$.

Différentes divisions finies ou infinies de la grandeur finie.

375. La grandeur est susceptible de diminution à l'infini. Donc quelque partie que je retranche de *a*, je puis encore retrancher une partie du reste, & encore une partie de ce 2[d] reste, & je trouverai toujours à retrancher, pourvu que je ne retranche aucun reste entier ; or je n'y serai jamais obligé, puisqu'un reste quelconque sera toujours une grandeur Donc la grandeur est divisible à l'infini, ou en une infinité de parties. On a déja vû dans cet Ouvrage quantité de choses qui prouvent nécessairement cette divisibilité à l'infini, ou qui s'y accordent.

376. La grandeur n'est divisible qu'en parties qu'elle a réellement. Un Pied, par exemple, n'est divisible en 12 pouces

que parce qu'il les a. Donc la grandeur a réellement une infinité de parties.

377. Puisqu'elle les a réellement, cette infinité de parties conçues comme faisant une Suite infinie de grandeurs, ne feront toutes ensemble que *a*, qui est le Tout quelconque supposé, ou, ce qui est le même, cette Suite infinie aura une somme $= a$. Il ne reste plus qu'à voir quelle doit être cette Suite infinie, ou dans quel ordre ses grandeurs doivent être disposées.

378. Il est clair, 1°. Que la Suite doit être toujours décroissante. 2°. Qu'il faut qu'il n'y ait aucun de ses termes qui ne soit une partie de *a*. 3°. Qu'il faut que chacun en soit une partie différente de toute autre. Or je remplis ces trois conditions, si ayant pris d'abord $\frac{1}{2}$ de *a*, ce qui donne pour 1[er] reste $\frac{1}{2}a$, je prens $\frac{1}{2}$ de ce 1[er] reste, ensuite $\frac{1}{2}$ du 2[d], $\frac{1}{2}$ du 3[me], &c. à l'infini; car par ce moyen il n'y a rien dans *a* qui ne devienne à son tour $\frac{1}{2}$, & une moitié différente de toute autre; d'ailleurs je prens toujours tout ce qui est moitié, & toutes ces moitiés sont décroissantes. Ce sera le même raisonnement si je prens d'abord $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. enfin une partie quelconque de *a*, & qu'ensuite je prenne sur tous les restes à l'infini une partie du même nom, c'est-à-dire, toujours $\frac{1}{3}$, ou toujours $\frac{1}{4}$, &c.

379. Donc *a* est composé d'une infinité, ou de moitiés, ou de tiers, &c. enfin de parties de même nom inégales & décroissantes, au lieu que si on prend ces parties de même nom égales, *a* n'en a qu'un nombre fini.

380. Si ayant pris d'abord, par ex. $\frac{1}{2}a$, je prens ensuite $\frac{1}{3}$ du 1[er] reste, $\frac{1}{4}$ du 2[d], $\frac{1}{5}$ du 3[me], &c. il est clair que je prendrai moins que les moitiés de tous les restes, & par conséquent quoique je prenne un nombre infini de parties de *a*, je n'aurai pas pris *a* entier, parce que je n'aurai pas pris tout ce qui étoit dans *a*, mais seulement des parties moindres que celles qu'il pouvoit me fournir. En un mot, les divisions infinies ne seront pas tombées sur *a* entier, mais seulement sur une certaine portion de *a*, divisible aussi à l'infini, & n'auront pas touché à l'autre portion.

381. Il ſemble qu'il y ait au contraire une maniere de faire ſur a une infinité de diviſions qui prennent plus que a. Telle eſt la Suite infinie $\frac{1}{2}a, \frac{1}{3}a, \frac{1}{4}a, \frac{1}{5}a$, &c. où dès qu'on a pris $\frac{1}{2}a, \frac{1}{3}a, \frac{1}{4}a$, on a $\frac{13}{12}a$ plus grand que a. Mais ce n'eſt pas là faire ſur a une infinité de diviſions, ou prendre une infinité de parties de a, puiſqu'avant la fin de la 3[me] diviſion, a eſt déja épuiſé. C'eſt ſeulement concevoir différentes grandeurs décroiſſantes rapportées à a, dont la 1[re] eſt $= \frac{1}{2}a$, la 2[de] $= \frac{1}{3}a$, la 3[me] $= \frac{1}{4}a$, &c. Et quoique chacune en particulier puiſſe être conſidérée comme partie de a, toutes priſes enſemble n'en ſont pas parties.

382. Si après avoir pris d'abord $\frac{1}{10}a$, par ex. je prens une partie du 1[er] reſte qui ſoit d'une plus grande dénomination que $\frac{1}{10}$, comme $\frac{1}{9}$, enſuite $\frac{1}{8}$ du 2[d] reſte, &c. il eſt bien vrai que je ne prendrai que de véritables parties de a, & différentes les unes des autres, mais je ne les prendrai qu'en nombre fini, & égales, & dans cet exemple ce ſeront dix 10[mes] parties.

383. Donc en prenant toujours ſur a des parties d'une même dénomination, on en prend une infinité d'inégales & de décroiſſantes, & on prend a entier (378). Si on prend des parties d'une dénomination toujours moindre, on en prend une infinité d'inégales & de décroiſſantes, mais on prend moins que a (379). Si on prend des parties d'une dénomination toujours plus grande, on prend a entier, mais on ne prend qu'un nombre fini de parties égales (382).

384. Donc il n'y a que deux manieres de faire une infinité de diviſions ſur a. La 1[re] prend tout ce qui eſt dans a, & la 2[de] ne prend pas tout.

Diviſion de la grandeur finie en une infinité de parties qui ſont en progreſſion géométrique.

385. Selon la 1[re] maniere, il faut donc prendre un nombre conſtant b, plus grand que a, qui ſera le diviſeur perpétuel de a, & de tous ſes reſtes, & on aura une Suite infinie, dont la ſomme ſera $= a$. $\frac{a}{b}$ ſera le 1[er] terme de cette Suite. $\frac{a}{b}$ étant ôté de a, le 1[er] reſte ſera $a - \frac{a}{b} = \frac{ab - a}{b}$, & ce

reſte diviſé par b, ſera $\frac{ab-a}{b^2}$, 2^{d} terme $\frac{a}{b}$ & $\frac{ab-a}{b^2}$ étant encore ôtés de a, le 2^{d} reſte ſera $a - \frac{a}{b} - \frac{ab+a}{b^2} = \frac{ab^2-2ab+a}{b^2}$, & ce reſte diviſé par b, ſera $\frac{ab^2-2ab+a}{b^3}$ 3me terme.

Or le 2^{d} terme $\frac{ab-a}{b^2} = \frac{\overline{b-1} \times a}{b^2}$. Le 3me $\frac{ab^2-2ab+a}{b^3} = \frac{\overline{b-1}^{2} \times a}{b^3}$. On trouvera de même que le 4me terme ſera $\frac{\overline{b-1}^{3} \times a}{b^4}$, & ainſi de ſuite, deſorte qu'on aura la Suite infinie décroiſſante $\frac{a}{b} \cdot \frac{\overline{b-1}^{1} \times a}{b^2} \cdot \frac{\overline{b-1}^{2} \times a}{b^3} \cdot \frac{\overline{b-1}^{3} \times a}{b^4}$, &c. juſqu'à $\frac{\overline{b-1}^{\infty-1} \times a}{b^\infty} = \frac{\overline{b-1}^{\infty} \times a}{b^\infty}$.

386. On voit d'abord que cette Suite eſt une progreſſion géométrique dont $\frac{a}{b}$ eſt le 1er terme, & le multiplicateur perpétuel ou m eſt $\frac{b-1}{b}$.

387. Si, pour avoir la ſomme de cette progreſſion, on y applique la Formule $\frac{am^n-a}{m-1}$, on trouvera que a de la Formule étant ici $= \frac{a}{b}$, $m = \frac{b-1}{b}$, & $n = \infty$, am^n devient $\frac{a}{b} \times \frac{\overline{b-1}^{\infty}}{b^\infty}$: or $\overline{b-1}^{\infty}$ étant infiniment petit par rapport à b^∞ (241), $\frac{a}{b} \times \frac{\overline{b-1}^{\infty}}{b^\infty}$ eſt une grandeur infiniment petite, qui par conſéquent dans le numérateur de la Formule $am^n - a$ diſparoît devant $-a = -\frac{a}{b}$. Donc il ne reſte que $-\frac{a}{b}$ diviſé par $m-1$, c'eſt-à-dire $-\frac{a}{b}$ diviſé

par

par $\frac{b - 1 - b}{b}$ ou $- \frac{a}{b}$ divisé par $\frac{-1}{b}$, ce qui est $\frac{ab}{b} = a$, somme de la progression, comme on avoit trouvé par le seul raisonnement que cela devoit être.

388. Il n'y a point de grandeur qui ne puisse être exprimée par une infinité de différentes progressions géométriques décroissantes : car la valeur de a ayant été déterminée, on peut donner à b une infinité de valeurs différentes, pourvu que b soit plus grand que a (385).

Par exemple, si $a = 2$, & $b = 3$, on aura

$$\div \frac{2}{3} . \frac{2 \times 2}{9} . \frac{4 \times 2}{27} . \frac{8 \times 2}{81}, \text{ \&c.} = 2.$$

ou $\div \frac{2}{3} . \frac{4}{9} . \frac{8}{27} . \frac{16}{81}$, &c. $= 2$.

Si $b = 4$, a étant toujours $= 2$, on aura

$$\div \frac{2}{4} . \frac{3 \times 2}{16} . \frac{9 \times 2}{64} . \frac{27 \times 2}{256}, \text{ \&c.} = 2.$$

ou $\div \frac{2}{4} . \frac{6}{16} . \frac{18}{64} . \frac{54}{256}$, &c. $= 2$.

ou $\div \frac{1}{2} . \frac{3}{8} . \frac{9}{32} . \frac{27}{128}$, &c. $= 2$.

D'où l'on voit que b étant successivement $= 5, = 6$, &c. il y aura une infinité de progressions géométriques décroissantes dont la somme sera $= 2$.

389. Si $a = 1$, tous les termes qui suivent le 1[er] $\frac{a}{b}$ $= \frac{1}{b}$ ne sont plus que $\frac{\overline{b - 1}^{n}}{b^{n+1}}$, n étant successivement 1, 2, 3, &c.

Par exemple, si $b = 2$, on a

$$\div \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \text{ \&c. } \frac{1}{2^{\infty}} = 1.$$

Si $b = 3$, on a

$$\div \frac{1}{3} . \frac{2}{9} . \frac{4}{27} . \frac{8}{81}, \text{ \&c. } \frac{2^{\infty}}{3^{\infty}} = 1.$$

Si $b = 4$, on a

$$\div \frac{1}{4} . \frac{3}{16} . \frac{9}{64} . \frac{27}{256}, \text{ \&c. } \frac{3^{\infty}}{4^{\infty}} = 1.$$

390. Les progreſſions, qui feroient les puiſſances conſécutives à l'infini d'une fraction quelconque $\frac{1}{n}$, n'appartiennent point à cette Théorie, ſi ce n'eſt quand $n = 2$; car hors de-là ce ne ſont point des Suites qui prennent toutes les parties de 1 ſelon l'art. 378, mais elles prennent moins ſelon l'art. 379. Auſſi a-t'on vû dans l'art. précédent, que ſi on a pris d'abord $\frac{1}{3}$ d'un Tout, il faut pour prendre le Tout, prendre enſuite $\frac{2}{9}$, $\frac{4}{27}$, &c. & non pas $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, &c. ce qui feroit la Suite des puiſſances de $\frac{1}{3}$; que ſi on a pris d'abord $\frac{1}{4}$, il faut prendre enſuite $\frac{3}{16}$, $\frac{9}{64}$, &c. & non pas $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{64}$. On ſait d'ailleurs par l'art. 372, que la ſomme des puiſſances à l'infini de $\frac{1}{n}$ eſt $= \frac{1}{n-1}$: or $\frac{1}{n-1}$ eſt toujours une fraction, ſi ce n'eſt quand $n = 2$, ce qui fait que la Suite des puiſſances de $\frac{1}{2}$, dont la ſomme eſt $= 1$, entre dans la Théorie que nous traitons préſentement, & non pas les autres.

391. Donc ſi on a les deux 1ers termes d'une progreſſion géométrique infinie décroiſſante, dont les deux numérateurs ne ſoient pas tous deux 1, elle n'appartiendra qu'à la Théorie préſente, & l'on verra aiſément quelle en eſt la ſomme. Car c'eſt toujours a, c'eſt-à-dire, le numérateur du 1er terme $\frac{a}{b}$. Mais comme la fraction $\frac{a}{b}$ peut avoir été réduite, & par conſéquent les autres, ainſi qu'elles le ſont dans le 2^d exemple de l'art. 388, ou $\frac{2}{4}$, $\frac{6}{16}$, &c. ſont devenus $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, &c. on n'auroit plus a, qui dans cet exemple eſt 2, & la ſomme de la progreſſion : mais 1 paroîtroit être a, & la ſomme de la progreſſion, & il ne l'eſt pas. C'eſt pour cela que la connoiſſance du 2^d terme eſt néceſſaire auſſi. Si le dénominateur du 2^d terme eſt le quarré de celui du 1er, il n'y a point eu de réduction de fractions, & par conſéquent le numérateur du 1er terme eſt a, qui n'a point été changé, & c'eſt la ſomme de la progreſſion. Mais ſi le dénominateur du 2^d terme n'eſt pas le quarré de celui du 1er, il y a eu une réduction, & il faut chercher a. Pour cela il faut voir quel eſt le plus petit nombre entier, qui étant coëfficient de ce dénominateur du

2^d^ terme, le rendroit le quarré du dénominateur du 1er; ce coëfficient multipliant aussi le numérateur du 2^d^ terme, & le numérateur & le dénominateur du 1er, ne changera rien à leur valeur, & les remettra tous deux tels qu'ils étoient avant la réduction.

Ainsi si on a pour les deux 1ers termes $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{9}$, on voit tout d'un coup que 2 est la somme de la progression.

Mais si on a $\frac{1}{2}$ & $\frac{3}{8}$, il faut, parce que 2 est le moindre coëfficient qui puisse rendre 8 quarré du dénominateur du 1er terme, qui sera alors 4, tout étant multiplié par 2, il faut, dis-je, changer les deux termes en $\frac{1\times 2}{2\times 2} = \frac{2}{4}$, & en $\frac{3\times 2}{2\times 8} = \frac{6}{16}$, & l'on voit que 2 est la somme.

De même si on a pour les deux 1ers termes $\frac{2}{3}$ & $\frac{10}{18}$, on voit qu'en multipliant tout par 2, on aura $\frac{4}{6}$ & $\frac{20}{36}$; & par conséquent 4 est la somme de la progression.

392. Puisque *a* étant $= 1$, la progression est $\div \frac{1}{b} . \frac{\overline{b-1}^{1}}{b^2} . \frac{\overline{b-1}^{2}}{b^3}$, &c. (389), il suit que deux termes quelconques consécutifs étant pris dans la Suite naturelle, si on fait une Suite dont le 1er terme soit 1 divisé par le plus grand des deux, le 2^d^, la 1re puissance du moindre divisée par la 2de du plus grand, le 3me terme, la 2de puissance du moindre divisée par la 3me du plus grand, & toujours ainsi à l'infini, cette Suite est une progression géométrique, dont la somme est $= 1$.

Ainsi $\frac{1}{14} . \frac{13}{\overline{14}^{2}} . \frac{\overline{13}^{2}}{\overline{14}^{3}}$, &c. $= 1$.

393. Sans donner à *a* aucune autre valeur que 1, on peut avoir les expressions de chaque nombre entier ou rompu en progressions géométriques infinies, & l'expression de chaque nombre en une infinité de différentes progressions. Car pour avoir l'expression de 2, de 3, &c. il n'y a qu'à multiplier par 2, ou par 3, &c. tous les numérateurs d'une

progreſſion dont la ſomme ſoit $= 1$, & de ces progreſſions il y en a une infinité (388 & 389). De même pour avoir l'expreſſion de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. il n'y a qu'à multiplier par 2, ou par 3, &c. tous les dénominateurs d'une progreſſion dont la ſomme ſoit $= 1$. Ainſi la progreſſion $\frac{1}{b} . \frac{\overline{b-1}^{1}}{b^{2}} . \frac{\overline{b-1}^{2}}{b^{3}}$, &c. ſuffit pour tout.

394. Toutes ces progreſſions ayant un nombre de termes $= \infty$, & une ſomme finie, elles n'ont donc qu'un nombre fini de termes finis, & un infini d'infiniment petits. Donc telle eſt la progreſſion $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, &c. $\frac{1}{2^{\infty}}$. Or cette progreſſion eſt celle des puiſſances conſécutives de 2, que l'on a changées en fractions, en donnant à toutes 1 pour numérateur, ce qui a laiſſé fini tout ce qui étoit fini, & changé en infiniment petit tout ce qui étoit infiniment grand. Donc il n'y avoit qu'un nombre fini, mais indéterminable, de puiſſances de 2 qui fuſſent finies, & il y en avoit un nombre infini d'infinies. Et cela confirme par le calcul, & *à poſteriori*, ce qui avoit été conclu *à priori* dans l'art. 228.

395. Il y a dans la Suite naturelle un nombre infini de termes finis, qui ſont ſucceſſivement les expoſans de 2. Donc puiſque 2 n'a qu'un nombre fini de puiſſances finies, il devient infini lorſqu'il n'a encore pour expoſant qu'un nombre fini, mais indéterminable. Donc il eſt poſſible réciproquement qu'un nombre fini beaucoup plus grand que 2, mais indéterminable, devienne infini, lorſqu'il n'aura pour expoſant qu'un nombre fini déterminable, comme 2, ou 3, &c. & ce qu'on trouve ici poſſible par une ſuite du calcul, & *à poſteriori*, on a prouvé *à priori* dans les art. 197. 198, &c. qu'il exiſtoit.

396. Dans la progreſſion $\frac{1}{b} . \frac{\overline{b-1}^{1}}{b^{2}}$, &c. plus b eſt grand, plus le 1[er] terme eſt petit, & en même temps moins les autres ſont décroiſſans. Car $\frac{b-1}{b}$ étant le multiplicateur

perpétuel de la progreſſion, & une fraction plus petite que 1, & d'autant plus approchante de 1, que 1 eſt plus petit par rapport à b, ou b plus grand, cette fraction approche d'autant plus de ne point changer, non plus que 1, ce qu'elle multiplie, qu'elle approche plus de 1, ou que b eſt plus grand. Donc plus b eſt grand, plus les termes de la progreſſion ſont petits, & en même temps moins décroiſſans, ou moins inégaux entr'eux. Ainſi la progreſſion $\frac{1}{14} . \frac{13}{\overline{14}^2}$, &c. de l'art. 392, eſt de toutes celles qu'on a vûes, celle dont les termes ſont les plus petits & les moins décroiſſans. Réciproquement, &c.

397. Donc ſi $b = \infty$, les termes ſeront infiniment petits, & infiniment peu décroiſſans, ou égaux. Et en effet la Formule donne $\frac{1}{\infty} . \frac{\infty - 1}{\infty^2} = \frac{\infty}{\infty^2} = \frac{1}{\infty} . \frac{\infty^2}{\infty^3} = \frac{1}{\infty}$, &c. & la ſomme en eſt $= 1$, comme doit être celle d'une infinité d'Infiniment petits du 1er ordre égaux. Cette progreſſion n'eſt plus progreſſion, ou ne l'eſt que le moins qu'il ſe puiſſe (53), & cela vient de ce qu'elle eſt la derniere d'une infinité de progreſſions pareilles, dont les termes étoient toujours d'autant moins décroiſſans, ou plus approchans d'être égaux entr'eux, que b étoit plus grand.

398. La progreſſion générale $\frac{1}{b}$, $\frac{\overline{b-1}^2}{b^2}$, &c. aboutit toujours à $\frac{\overline{b-1}^\infty}{b^\infty}$, c'eſt-à-dire, à la puiſſance infinie d'un nombre quelconque, diviſée par la puiſſance infinie d'un nombre plus grand d'une unité. Or tant que b eſt fini, ces deux puiſſances different d'un nombre infini d'ordres, mais toujours décroiſſant à meſure que b eſt plus grand (241). D'où il ſuit qu'à meſure que b eſt plus grand, chaque progreſſion finit toujours par un infiniment petit d'un ordre moins bas, ce qui convient avec ce qu'on a déja vû, qu'à meſure que b eſt plus grand, les termes ſont moins décroiſſans, & que quand $b = \infty$, le dernier terme eſt $\frac{1}{\infty}$, le moins bas de tous les Infiniment petits.

399. Si entre toutes ces progreſſions qui ont une ſomme égale, on vouloit choiſir celle dont les 4 premiers termes, par ex. approcheroient plus de faire la ſomme entiere que les 4 premiers de toute autre, il eſt clair qu'il faudroit prendre celle où b eſt le moindre, & par conſéquent $= 2$, car c'eſt celle dont les termes ſont les plus décroiſſans & les plus inégaux entr'eux (396), & par conſéquent tous les termes qui ſuivent les 4 premiers, étant plus petits, peuvent être négligés avec moins d'erreur, ou, ce qui revient au même, les 4 premiers approchent plus de faire la ſomme entiere qu'en toute autre progreſſion. Ainſi dans la progreſſion $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$; dès qu'on a pris ces 4 premiers termes, on a $\frac{15}{16}$, & il n'y a point de progreſſion pareille dont les 4 premiers termes approchent tant de faire 1.

400. Quoique dans ces progreſſions, dont la ſomme eſt $= 1$, ou en général $= a$, il puiſſe y avoir une infinité d'Infiniment petits d'ordres différens, inutiles à la ſomme, il faut prendre tous les termes de la progreſſion pour avoir a, parce que le nombre fini des termes finis qui ſeroient ſeuls utiles à la ſomme eſt indéterminable, & abſolument inconnu.

401. Il n'eſt pas beſoin qu'une Suite infinie, pour avoir une ſomme finie $= a$, ſoit une progreſſion géométrique: car il eſt clair qu'il peut y avoir une infinité d'autres manieres de diviſer a telles que quelques termes étant moindres ou plus grands que les correſpondans d'une progreſſion géométrique, d'autres ſeront en récompenſe plus grands ou plus petits, de ſorte que tout reviendra au même. J'appelle ces Suites *équivalentes à des progreſſions géométriques*.

Maniere dont une grandeur finie peut recevoir une infinité d'accroiſſemens ſans ceſſer d'être finie.

402. Je puis ajouter tout d'un coup a à a, ce qui donnera $2a$, de ſorte que a, par un ſeul accroiſſement, ſera devenu $2a$. Je puis auſſi ajouter à a d'abord $\frac{1}{10} a$, enſuite encore $\frac{1}{10} a$, &c. ou en général $\frac{1}{n} a$, n étant un nombre fini; & a ne deviendra $2a$, qu'après avoir reçu le nombre n d'accroiſſemens égaux. Mais ſi j'ajoute à a d'abord $\frac{a}{b}$, enſuite à a ainſi accrû $\frac{\overline{b-1} \times a}{b^2}$, enſuite à a encore accrû

$\frac{\overline{b-1}^{2}\times a}{b^{3}}$, & toujours ainſi de ſuite, a ne deviendra $2a$, qu'après avoir reçu une infinité d'accroiſſemens : mais ces accroiſſemens ſeront décroiſſans ſelon une progreſſion géométrique, & ce ſeroit la même choſe, s'ils l'étoient ſelon quelqu'autre Suite équivalente (401). Or alors a devenu $2a$, ne ſort point de ſon ordre, qui eſt celui du Fini. Donc une grandeur finie qui reçoit une infinité d'accroiſſemens, mais décroiſſans ſelon une progreſſion géométrique, ou équivalente, demeure finie, ou dans ſon ordre.

403. A plus forte raiſon a demeureroit-il dans ſon ordre, s'il recevoit une infinité d'accroiſſemens plus décroiſſans que ſelon une progreſſion géométrique, tels que ceux de l'article 380. Alors a ainſi accrû, ſeroit moindre que $2a$, & moindre ſelon telle raiſon qu'on voudroit.

404. Il eſt clair que a ſortiroit de ſon ordre, & deviendroit infini, s'il recevoit une infinité d'accroiſſemens finis égaux, à plus forte raiſon s'ils étoient croiſſans. Donc la ſeule maniere dont a puiſſe recevoir une infinité d'accroiſſemens, & demeurer dans ſon ordre, eſt de les recevoir décroiſſans ſelon une progreſſion géométrique, ou équivalente, ou plus décroiſſans.

405. Réciproquement ſi une grandeur finie demeure dans ſon ordre après avoir reçu une infinité d'accroiſſemens, ils étoient décroiſſans ſelon une progreſſion géométrique, ou équivalente, ou plus décroiſſans.

406. Ce qui ſe dit ici de la grandeur finie eſt également vrai de l'infiniment grande, ou petite, car cela naît de l'eſſence de la grandeur, & de ſa diviſibilité infinie.

407. Soit x une grandeur variable & croiſſante qui eſt d'abord $\frac{a}{b}$, enſuite $\frac{a}{b}+\frac{\overline{b-1}\times a}{b^{2}}$, enſuite $\frac{a}{b}+\frac{\overline{b-1}\times a}{b^{2}}+\frac{\overline{b-1}^{2}\times a}{b^{3}}$, & toujours ainſi de ſuite, il eſt clair que x ne ſera $= a$ qu'après avoir reçu une infinité d'accroiſſemens.

Si je retranche toujours de a, x ainsi croissant, je n'aurai donc $a - x = a - a = 0$, qu'après une infinité d'autres $a - x$, où x aura passé par une infinité de degrés, au lieu que j'aurois eu $a - a = 0$, en retranchant tout d'un coup a de a, ou par un nombre fini de degrés selon l'idée de l'art. 382. Donc une grandeur finie, & en général (406) toute grandeur peut n'être anéantie que par une infinité de décroissemens.

408. Lorsque x, en croissant toujours selon la progression décroissante $\frac{a}{b} \cdot \frac{\overline{b-1} \times a}{b^2}$, &c. a passé l'endroit de cette progression où finissent les termes finis, il ne prend plus que des accroissemens infiniment petits, & enfin ne differe de a qu'infiniment peu. Donc alors la différence de a & de x, ou $a - x$, est une grandeur infiniment petite, ou $= \frac{1}{\infty}$.

409. Puisqu'alors $x + \frac{1}{\infty} = a$, x est $= a$, & $a - x = a - a = 0$. Mais cet $a - a = 0$ n'est pas le même que si on avoit retranché a de a tout d'un coup, ou par un nombre fini de degrés, ce qui auroit aussi donné $a - a = 0$. Dans ces deux derniers cas, $0 = a - a$ est absolu, parce qu'on a absolument retranché a de a. Mais dans le cas de $a - x = a - a = 0$, on prend x dans un état où il ne differe qu'infiniment peu de a, & où $a - x = \frac{1}{\infty} = a - a = 0$. Donc alors 0 est relatif.

410. Si l'on a une grandeur croissante $\frac{1}{a-x}$, qui soit telle, parce que a étant constant, x croît toujours, & tend à devenir $= a$, & si à la fin l'étant devenu, il donne $\frac{1}{a-a} = \frac{1}{0}$, cette grandeur $\frac{1}{0}$ sera infinie, pourvu que x ait passé par une infinité de degrés d'accroissement. Car alors $a - a = \frac{1}{\infty}$ (409), donc $\frac{1}{0}$ est 1 divisé par $\frac{1}{\infty}$, ou ∞.

411. Réciproquement si on a une Suite de $\frac{1}{a-x}$ terminée

par

par $\frac{1}{a-a} = \frac{1}{0} = \infty$, il faut entendre que x a passé par une infinité de degrés d'accroissement.

412. Jusqu'ici nous n'avons considéré les différens ordres d'Infiniment grands, ou d'Infiniment petits, que comme formés par des puissances, ou par des racines ; mais il y a encore une autre maniere dont il peut se former des ordres.

Maniere dont se peuvent former les différens ordres d'Infiniment grand ou petit, différente des précédentes.

Un nombre quarré, ou cubique, &c. peut être conçu comme formé *linéairement*. 4, par ex. ou 8, &c. peuvent être conçus, non comme le quarré, ou le cube de 2, mais comme une simple Suite linéaire de 4 ou de 8 unités, & alors au lieu que 2 étoit leur racine, 1 est leur Elément, c'est-à-dire, la moindre grandeur de leur *espece*, ou le moindre nombre entier dont ces nombres puissent être formés.

Selon cette idée, 1 est l'Elément commun de tous les nombres, & même de ∞, & si l'on veut, de ∞^2, ∞^3, &c. Mais si, lorsqu'il s'agira d'Infinis, on veut avoir l'Elément *de même espece*, c'est-à-dire, la moindre grandeur infinie, qui répétée un nombre de fois infini, ait pû former un certain Infini ; alors 1 n'est l'Elément que de ∞, quoiqu'il ne soit pas de même espece, mais il ne sera plus l'Elément de ∞^2, ∞^3, &c. ce ne sera pas même ∞ qui sera l'Elément de ∞^2, quoiqu'une Suite infinie de ∞ forment ∞^2, car il y a un moindre nombre infini qui étant infiniment répété, le peut former.

Soit $\propto\ < \infty$, & du même ordre. Le 3me proportionnel géométrique à $\propto$ & ∞ sera plus grand que ∞ & du même ordre ; donc $\propto$ multiplié par ce nombre, ou répété ce nombre de fois infini, donnera ∞^2. Donc $\propto$, & non pas ∞, sera l'Elément de ∞^2, & un Elément de même espece, au lieu que 1 étoit fini, ou, ce qui revient au même, $\propto$ sera l'Elément *immédiat* de ∞^2.

De même un $\propto^2$ sera l'Elément immédiat de ∞^3, car le 3me proportionnel à $\propto^2$ & à $\infty^{\frac{3}{2}}$ sera le nombre infini par lequel $\propto^2 < \infty^2$ étant multiplié, formera $\infty^{\frac{2\times 3}{2}} = \infty^3$.

Donc en général tout ∞^n a un Elément immédiat dans l'ordre $n - 1$. Ainsi ∞^1 a pour le sien $\infty^{1-1} = \infty^0 = 1$, ∞^2 pour le sien un ∞ de l'ordre de ∞, &c. & de plus si $n > 1$, ∞^n a dans l'ordre de ∞^{n-1} un Elément immédiat moindre que ∞^{n-1}.

413. Si on éleve ∞^n & son Elément immédiat à la même puissance x, l'Infini sera ∞^{nx}, & son Elément montera à l'ordre $\overline{n - 1} \times x$. Par ex. si $n = 3$, & $x = 2$, l'Infini étant ∞^3, & son Elément immédiat de l'ordre de ∞^2, le 1er étant quarré sera ∞^6, & le 2^d^ sera de l'ordre de ∞^4. Si n étant toujours $= 3$, $x = 3$, le cube de l'Infini sera ∞^9, & celui de l'Elément sera de l'ordre de ∞^6, &c.

414. Si on tire la $\sqrt[x]{}$ quelconque d'un ∞^n & de son Elément immédiat, l'un sera $\infty^{\frac{n}{x}}$, & l'autre de l'ordre de $\infty^{\frac{n-1}{x}}$.

Tout cela s'applique de soi-même aux Infiniment petits, qui ne sont que des Infinis renversés. Ce n'est que par rapport à ces Infiniment petits que cette considération des Elémens est de quelque utilité.



SECTION V.

Des grandeurs Incommenſurables.

Formation d'une infinité de nombres finis inexprimables dans des Suites infinies compriſes entre deux termes finis.

415. SI l'on introduit entre 1 & 2 une infinité de moyens proportionnels arithmétiques, ou, ce qui eſt la même choſe, ſi l'on diviſe l'intervalle qui eſt entre 1 & 2, en une infinité de parties égales; il eſt clair que l'intervalle étant fini, & diviſé en un nombre infini de parties, ces parties, ou les différences des termes de la progreſſion qui ſe formera ſeront infiniment petites. Et en effet on aura $\div$ 1. $1+\frac{1}{\infty}$. $1+\frac{2}{\infty}$. $1+\frac{3}{\infty}$, &c. $1+\frac{\infty}{\infty}=1+1=2$.

416. Ici il ne faut pas prendre le 2[d] terme $1+\frac{1}{\infty}$, $=1$. Car ſi cela étoit, les deux 1[ers] termes de la progreſſion étant égaux, tous les autres le ſeroient, & elle ne ſeroit point croiſſante comme elle doit l'être, ou n'arriveroit point à 2 comme elle y doit arriver. $1+\frac{1}{\infty}$ eſt donc 1 augmenté ſeulement d'une quantité infiniment petite, & telle que quand il aura reçu une infinité d'augmentations pareilles, il ſera $=2$; c'eſt 1 que l'on conſidere comme commençant à être, pour ainſi dire, dans un mouvement d'accroiſſement, dont il reçoit déja le premier degré infiniment petit, & il ſeroit contradictoire à cette idée, de prendre $1+\frac{1}{\infty}=1$. Que ſi l'on ne conſidere pas $1+\frac{1}{\infty}$ préciſément comme 1 étant dans ce mouvement d'accroiſſement; mais comme 1 accrû déterminément, & *à demeure*, de $\frac{1}{\infty}$, & qu'en cet état on le compare à 1, il eſt certain que $1+\frac{1}{\infty}=1$, parce que 1 n'eſt accrû de rien, en comparaiſon de ce qu'il eſt. Cela revient encore à la différence qu'on a fait ſentir en pluſieurs endroits entre la grandeur qui eſt dans le paſſage du Fini à l'Infini, & celle qui a

franchi ce paſſage. Car de même qu'entre les Infinis de la Suite naturelle qui précedent ∞, il faut qu'il y ait des différences toujours $= 1$, & qui font l'accroiſſement perpétuel de ces Infinis, quoique nous n'en ayons aucune idée nette, ainſi entre les termes de la progreſſion arithmétique infinie dont 1 & 2 ſont les extremes, il faut qu'il y ait des différences $= \frac{1}{\infty}$ qui faſſent l'accroiſſement perpétuel de ces termes, quoique nous ne concevions point nettement comment ces différences peuvent être des accroiſſemens, ſi ce n'eſt lorſqu'elles ſont parvenues à être en nombre infini. En un mot, le paſſage du Fini à l'Infini, ou, ce qui revient au même, de l'Infiniment petit au Fini, nous échappe toujours, mais il n'en eſt pas moins réel.

417. Il eſt eſſentiel à cette progreſſion arithmétique infinie, compriſe entre 1 & 2, que chaque terme ſoit 1 plus une fraction moindre que 1, que chaque fraction ait ∞ pour dénominateur, & que les numérateurs des fractions ſoient la Suite des nombres naturels depuis 1 juſqu'à ∞.

418. Tant que les numérateurs des fractions ſont des nombres finis, ſoit déterminables, ſoit indéterminables, les fractions ſont infiniment petites, quoique toujours croiſſantes. Mais enfin après les termes finis indéterminables, viennent dans la Suite naturelle les $\propto$, & alors on a dans la progreſſion propoſée des $1 + \frac{\propto}{\infty}$, c'eſt-à-dire, 1 affecté de fractions finies (190), & ces fractions ſont toujours croiſſantes juſqu'à celle du dernier terme qui eſt $\frac{\infty}{\infty} = 1$.

419. Toutes ces fractions, tant les $\frac{n}{\infty}$, n étant un nombre fini quelconque, que les $\frac{\propto}{\infty}$, ſont inexprimables, parce qu'elles ont toutes ∞ pour dénominateur. On peut même dire que les $\frac{\propto}{\infty}$ ſont les plus inexprimables, parce qu'elles ont auſſi un Infini pour numérateur; mais enfin elles le ſont

toutes, & par conséquent aussi tous les termes où elles entrent, & dont elles sont une partie nécessaire. Donc tous les termes moyens de la progression sont inexprimables.

420. ∞ est un nombre premier à l'égard de tous les nombres finis (94). Donc (61 & 62) quand on introduit entre 1 & 2 un nombre de moyens arithmétiques $= \infty$, on doit avoir des termes tout différens de ceux qu'on auroit eus, en introduisant entre ces mêmes extremes un nombre fini quelconque de moyens arithmétiques. Et l'on voit en effet qu'au lieu que si ce nombre avoit été fini, on auroit eu des termes exprimables & connus, on n'en a ici que d'inexprimables & d'inconnus.

421. Tant que les fractions qui affectent les termes de la progression proposée sont des $\frac{n}{\infty}$, on peut concevoir que les termes se confondent avec 1, dont ils ne different que d'une différence infiniment petite. Mais cela ne se peut plus absolument, quand les fractions sont devenues des $\frac{\propto}{\infty}$; car alors elles sont finies, & les $1 + \frac{\propto}{\infty}$ different de 1 d'une différence finie. Donc il y a des nombres finis plus grands que 1, qui en different d'une différence finie, & qui sont inexprimables.

422. Et puisqu'il y a dans la Suite naturelle une infinité de $\propto$ avant ∞, il y a dans la progression comprise entre 1 & 2, une infinité de nombres inexprimables finis, dont la différence à 1 est finie.

423. De ce qu'ils sont inexprimables, il suit que leur rapport à 1, ou à tout nombre exprimable, l'est aussi.

424. Si l'on conçoit que l'intervalle qui est entre 1 & 2 ait été divisé en un nombre de parties, non pas $= \infty$, mais $= \propto$, & tel que $\infty > \propto$ ait été nombre premier à son égard, il sera entré dans cet intervalle un nombre $= \propto$ d'inexprimables tous différens de ceux que nous avons considérés jusqu'ici; & il y aura autant d'infinités de ces inexprimables tous différens les uns des autres dans chaque progression, & différens de tous les exprimables, qu'il y aura de $\propto$ à l'égard desquels ∞ sera nombre premier.

425. Mais parce que nous ne pouvons pas distinguer ces nombres produits entre 1 & 2 par des divisions $= \propto$ de ceux qui sont produits par la division $= \infty$, il vaut autant prendre tous ces inexprimables comme produits par la seule division $= \infty$, en sousentendant néantmoins qu'ils peuvent avoir été produits par différentes divisions infinies.

426. Si un nombre fini est possible, & s'il doit être entre 1 & 2, il est certainement un des exprimables ou des inexprimables, c'est-à-dire, produit par une division quelconque, ou finie, ou infinie.

427. S'il y a une grandeur dont le quarré soit $= 2$, elle est entre 1 & 2, & par conséquent est $1 + \frac{n}{m}$, n & m étant deux grandeurs inconnues, & $n < m$. Or $\overline{1 + \frac{n}{m}}^2 = 2$ donne l'équation $nn + 2nm = mm$, ou $nn + 2nm - mm = 0$, qui selon les regles de l'Algebre ne peut être imaginaire, & par conséquent il y a quelque grandeur dont le quarré $= 2$.

Mais il est impossible que deux nombres finis exprimables soient tels que le quarré nn du plus petit, plus $2nm$ soit égal au quarré mm du plus grand, ce que je prouve ainsi.

Tout nombre plus grand que n sera $n + x$. Il faut par la supposition que $n^2 + 2n \times \overline{n + x}$ soit $= \overline{n + x}^2$, c'est-à-dire $3n^2 + 2nx = n^2 + 2nx + xx$, ou $2n^2 = x^2$. Or il est impossible que le double d'un nombre quarré fini exprimable soit quarré.

Donc (426) c'est parmi les nombres finis inexprimables, ou produits par une division infinie, qu'il faut chercher le nombre dont le quarré $= 2$.

428. Donc dans $1 + \frac{n}{m}$, expression de la grandeur cherchée, il faut poser $m = \infty$, ce qui donne l'équation $nn + 2n\infty = \infty^2$, qui ne peut être imaginaire, & où l'on voit que n est nécessairement une grandeur infinie, car autrement l'équation se réduiroit à $\infty^2 = 0$, ce qui est absurde.

De plus n eſt, & par la ſuppoſition, & par la nature de la choſe, moindre que m. Et ſi $n = m = \infty$, l'équation donneroit $3\infty^2 = \infty^2$. Donc $n = \propto$. Et $1 + \frac{\propto}{\infty}$ eſt la grandeur cherchée. Donc $1 + \frac{\propto}{\infty} = \sqrt[2]{2}$. Donc $\sqrt[2]{2}$ eſt un nombre inexprimable.

429. $1 + \frac{\propto}{\infty}$ eſt une expreſſion indéterminée de tout inexprimable compris entre 1 & 2, & qui de plus a une différence finie à 1 (422). Et $\sqrt[2]{2}$ eſt une expreſſion déterminée d'un certain inexprimable particulier dont le quarré $= 2$. Mais malgré cela $\sqrt[2]{2}$ eſt toujours un nombre auſſi inexprimable que $1 + \frac{\propto}{\infty}$, ce qui fait voir que l'inexprimable & l'indéterminable peuvent être différens.

430. On prouvera par les mêmes raiſonnemens qu'on a faits dans les art. 427 & 428, qu'il n'y a entre 1 & 2 aucun nombre fini exprimable ou produit par une diviſion finie, dont le cube ſoit $= 2$, mais qu'il y en a un produit par une diviſion infinie, & qui ſe détermine par l'expreſſion $\sqrt[3]{2}$, ſans cependant s'exprimer, qu'il y en a un autre qui eſt $\sqrt[4]{2}$, un autre $\sqrt[5]{2}$, &c. enfin tant que l'expoſant de la $\sqrt{}$ ſera fini.

431. Donc 2 eſt réellement & ſans fiction une puiſſance finie quelconque, pourvû qu'on le conſidere dans une Suite infinie où il aura toutes ſes $\sqrt{}$ finies quelconques, mais non pas dans une Suite finie, quelle qu'elle ſoit, car alors il ne ſera aucune puiſſance.

432. On fera les mêmes raiſonnemens ſur 3, dont toutes les $\sqrt{}$ ſont compriſes entre 1 & 2, & inexprimables.

433. 4 a toutes ſes $\sqrt{}$ finies entre 1 & 2, excepté la $\sqrt[2]{}$, qui eſt 2. De même 5, 6, 7, juſqu'à 8 excluſivement, ont toutes leurs $\sqrt{}$ finies entre 1 & 2, excepté la $\sqrt[2]{}$, car 8 n'a

par sa $\sqrt[3]{}$ entre 1 & 2, puisque $\sqrt[3]{8} = 2$. Et en général tout nombre a toutes ses $\sqrt{}$ finies entre 1 & 2, excepté un nombre de ces $\sqrt{}$ égal au nombre des puissances de 2 qu'il a au dessous de lui, à commencer par 4, ce qui revient à l'art. 261. Ainsi 31 a toutes ses $\sqrt{}$ entre 1 & 2, excepté 3, qui sont par conséquent la $\sqrt[2]{}$, la $\sqrt[3]{}$, & la $\sqrt[4]{}$, parce qu'il a au dessous de lui trois puissances de 2, qui sont 4, 8, & 16. Et il est clair que selon les raisonnemens qu'on a faits, toutes ces $\sqrt{}$ quelconques de nombres quelconques comprises entre 1 & 2 sont inexprimables.

434. Au lieu de supposer, comme nous avons toujours fait jusqu'ici, que c'est l'intervalle entre 1 & 2 qui a été infiniment divisé, on peut concevoir également que c'est l'intervalle entre 1 & 3, entre 1 & 4, &c. Et il est clair que les divisions infinies quelconques, c'est-à-dire, soit par ∞, soit par les $\propto$, feront entrer dans ces nouveaux intervalles de nouvelles infinités d'inexprimables.

435. D'un autre côté il y a dans la Suite naturelle une infinité de nombres qui ne sont aucune puissance, c'est-à-dire, ni quarrés, ni cubiques, &c. Et ce sont, 1° tous les nombres premiers qui ne sont aucun produit, 2° tous les nombres qui ne peuvent être un produit que de nombres différens entre eux; de sorte qu'il en reste peu qui soient un produit de quelque nombre par lui-même, ou une puissance quelconque, & qui par conséquent aient au dessous d'eux dans la Suite naturelle la $\sqrt{}$ correspondante à cette puissance. De plus les nombres, qui sont plusieurs puissances à la fois, ne sont pas toutes les puissances qui sont au dessous de la plus élevée. Ainsi 64, qui est une puissance 2, une puissance 3, & une puissance 6, n'est pas une puissance 4 ni 5, & par conséquent il n'a dans la Suite naturelle qu'une $\sqrt[2]{}$, une $\sqrt[3]{}$, & une $\sqrt[6]{}$, mais non une $\sqrt[4]{}$, ni une $\sqrt[5]{}$. Enfin tout nombre fini n ayant sa $\sqrt[\infty]{} = 1$, puisque $n^{\frac{1}{\infty}} = 1$, il a depuis lui jusqu'à 1 une infinité

infinité de √ tant d'un expoſant fini, que d'un expoſant infini; & comme depuis lui juſqu'à 1, il n'y a dans la Suite naturelle qu'un nombre fini déterminable de termes $= n$, & que ſes √ d'un expoſant fini déterminable ſont en nombre fini indéterminable, il faut que s'il a quelques-unes de ces √ dans la Suite naturelle, & quelque grand nombre qu'il en ait, il en ait encore un nombre fini indéterminable qui ne ſoient point dans cette Suite. Donc toutes ces √ ne ſe trouveront que dans la Suite naturelle infiniment diviſée, & ſeront quelques-uns des inexprimables produits par les diviſions infinies.

436. Toutes ces √ inexprimables ſont les nombres que l'on appelle *incommenſurables*, ou *irrationels*, ou *ſourds*, parce qu'on a toujours bien reconnu qu'ils n'avoient aux autres nombres ordinaires aucun rapport qui ſe pût déterminer préciſément. Mais quoique l'exiſtence de ces nombres fût bien certaine, il devoit toujours paroître étrange qu'il y en eût; car d'où peut venir que des grandeurs finies, ou leurs rapports à d'autres grandeurs finies, ſoient inexprimables? Cette merveille ne doit point ceſſer tant qu'on ne regarde les incommenſurables que comme des grandeurs finies: mais elle ceſſe abſolument dès qu'on voit le mélange d'Infini qui y entre. Tout incommenſurable eſt $a + \frac{\propto}{\infty}$. Le Fini eſt par lui-même exprimable, & l'Infini inexprimable; & puiſque $a + \frac{\propto}{\infty}$ eſt une grandeur finie dans laquelle entre la fraction $\frac{\propto}{\infty}$ qui ne ſe peut exprimer autrement, l'Infini communique à cette grandeur finie ſon *inexprimabilité*, de la même maniere dont le Fini communique ſon *exprimabilité* aux rapports de l'Infini, lorſqu'il y entre, comme dans 1∞ & 2∞. *Que ces nombres inexprimables ſont les Incommenſurables.*

437. On voit auſſi la raiſon eſſentielle pour laquelle tous les incommenſurables ſont exprimés par des √. C'eſt qu'étant inexprimables, ils ne peuvent être déterminés que par quelque rapport à des nombres exprimables & déterminés: or ils n'y peuvent avoir de rapport que par en être les √ qui *Pourquoi tout Incommenſurable eſt une Racine.*

leur manquent en nombres exprimables, car d'ailleurs rien ne manque à ces nombres. Mais du nombre infini d'inexprimables que les divisions infinies introduisent entre 1 & n, nombre quelconque, il en reste une infinité qui ne sont point $\sqrt{}$ de quelque nombre exprimable, & qui faute d'être susceptibles de cette détermination, ne sont point au rang des incommensurables, quoiqu'ils soient absolument de la même nature. Ainsi les inexprimables finis sont une *espece*, dont les incommensurables ne sont qu'une petite partie.

Que tout nombre fini est réellement une puissance quelconque.

438. Tout nombre fini n est réellement & sans fiction une puissance finie ou infinie quelconque, qui a toutes les $\sqrt{}$ correspondantes dans l'intervalle qui est entre n & 1, & ces $\sqrt{}$ sont, ou dans la Suite naturelle entre n & 1, auquel cas elles sont commensurables, ou dans cette même Suite infiniment divisée, auquel cas elles sont incommensurables.

439. En supposant que $\sqrt[n]{a}$ exprime tout incommensurable en général, il y a nécessairement quelque progression géométrique d'un nombre fini de termes compris entre a & 1 qui donnera ce $\sqrt[n]{a}$; par ex. $\sqrt[2]{2}$ est le moyen géométrique proportionnel entre 2 & 1. Mais cela n'est nullement contraire à ce qui a été dit, que tout incommensurable étoit produit par une division ou progression infinie. Car $\sqrt[n]{a}$ n'est pas une valeur, ce n'est qu'une détermination d'un incommensurable entre une infinité d'autres, & une détermination qui n'en apprend point précisément la valeur, & cette valeur précise n'est que dans une progression infinie.

Parce que $\sqrt[n]{a}$ entre nécessairement dans quelque progression géométrique finie, elle n'entrera point dans la progression géométrique infinie que l'on pourra faire entre a & 1 (62 & 94), & on a vû que $\sqrt[n]{a}$ entre toujours dans une progression arithmétique infinie. Ce n'est donc que dans cette progression qu'est $\sqrt[n]{a}$ avec sa valeur.

440. Mais comme tous les termes de cette progreſſion nous ſont inconnus, à cauſe de ∞ qui s'y mêle, cette valeur ne peut jamais être connue.

Seulement comme $\sqrt[n]{a}$ eſt plus grande que 1, & moindre que a, limites entre leſquelles $\sqrt[n]{a}$ eſt compriſe, on peut, en introduiſant entre a & 1 un nombre de moyens arithmétiques toujours plus grand, trouver des limites toujours moins éloignées que a & 1, entre leſquelles $\sqrt[n]{a}$ ſera compriſe, & par-là on aura toujours un nombre moins au deſſous d'elle que 1, & moins au deſſus que a, & on approchera toujours de plus en plus de la valeur préciſe de $\sqrt[n]{a}$. De-là vient la Méthode des approximations. On a toujours des nombres commenſurables moins au deſſous, & moins au deſſus de $\sqrt[n]{a}$; parce qu'on fait toujours des diviſions finies plus grandes; mais on ne peut arriver à la valeur préciſe de $\sqrt[n]{a}$, parce qu'on ne fait que des diviſions finies, & quand même on en feroit une infinie, cette valeur ſeroit toujours inconnue à cauſe du mélange de ∞ (436).

441. De cette Théorie réſulte une méthode facile pour trouver deux nombres commenſurables, dont l'un ſoit plus petit, & l'autre plus grand qu'un incommenſurable quelconque de moins que d'une différence donnée, & cela ſans faire différentes approximations comme à l'ordinaire.

Méthode pour trouver les Incommenſurables ſi approchés qu'on voudra.

L'incommenſurable propoſé ſera en général $\sqrt[n]{a}$, & la différence donnée $\frac{1}{d}$. Je conçois entre 1 & a une progreſſion.

$$\div 1 . 1 + \frac{1}{d} . 1 + \frac{2}{d} . 1 + \frac{3}{d}, \&c. \ 1 + \frac{m}{d} = a.$$

$\sqrt[n]{a}$ étant un incommenſurable, & appartenant à une diviſion ou progreſſion infinie, il ne ſera aucun des termes de cette progreſſion finie, mais il ſera entre deux de ſes termes conſécutifs, & par conſéquent ſera plus grand que l'un, &

moindre que l'autre de moins que $\frac{1}{d}$ qui eſt leur différence. Il s'agit donc de trouver les deux termes de la progreſſion finie, entre leſquels eſt $\sqrt[n]{a}$.

Si je ſuppoſe $\sqrt[n]{a} = 1 + \frac{x}{d}$, x étant un numérateur inconnu, il eſt certain que parce que $\sqrt[n]{a} = 1 + \frac{\infty}{\infty}$, & que cette fraction eſt inexprimable, $\frac{x}{d}$ le ſera auſſi, & par conſéquent d étant exprimable ou commenſurable, ce ſera x qui ſera incommenſurable, & par conſéquent il ne ſera aucun des numérateurs de la progreſſion finie, mais entre deux de ces numérateurs, qui tous different entr'eux d'une unité. Donc le numérateur de cette progreſſion que x ſurpaſſera de moins que d'une unité, ſera le numérateur du terme cherché de la progreſſion finie qui ſera immédiatement au deſſous de $\sqrt[n]{a}$, & ce numérateur étant trouvé, donnera celui du terme qui ſera immédiatement au deſſus de $\sqrt[n]{a}$. Donc tout ſe réduit à trouver la valeur de x.

Puiſque $1 + \frac{x}{d} = \sqrt[n]{a}$, $\overline{1 + \frac{x}{d}}^{n} = a$, cette équation ſera toujours du degré n, & il n'y a qu'à la réſoudre pour avoir la valeur de x.

Si $n = 2$, ce qui rend l'équation du 2[d] degré, on a

$$\left.\begin{matrix} xx + 2xd + dd \\ - add \end{matrix}\right\} = 0, \text{ \& } x = -d + \sqrt[2]{add}.$$

En ce cas, ſi $a = 2$, & $d = 96$, c'eſt-à-dire, ſi on cherche deux nombres commenſurables qui different de $\sqrt[2]{2}$ de moins que de $\frac{1}{96}$, l'un en deſſous, l'autre en deſſus, on trouve $\sqrt[2]{2dd}$ plus grande de moins qu'une unité que 135, & par conſéquent le numérateur du terme qui eſt immédiatement au deſſous de $\sqrt[2]{2}$ eſt $135 - 96 = 39$. Donc ce terme eſt

$1 + \frac{39}{96}$, & celui qui eſt immédiatement au deſſus, eſt $1 + \frac{40}{96} = 1 + \frac{5}{12}$. D'où l'on voit que $1 + \frac{5}{12}$ eſt plus grand que $\sqrt[2]{2}$ de moins que $\frac{1}{96}$.

Si $a = 5$, le reſte étant le même, on trouveroit que $\sqrt[2]{5dd}$ eſt plus grande de moins qu'une unité que 214; que par conſéquent le numérateur du terme, qui eſt au deſſous de $\sqrt[2]{5}$, eſt $214 - 96 + 118$, que ce terme eſt donc $1 + \frac{118}{96} = 2 + \frac{22}{96}$, & que le terme qui eſt immédiatement au deſſus, eſt $2 + \frac{23}{96}$. D'où l'on voit que $\sqrt[2]{5}$ eſt plus grande que $2 + \frac{11}{48}$ de moins que $\frac{1}{96}$.

On voit par cet exemple, que quand $\sqrt{a}$ eſt au deſſus de 2, la fraction qui s'ajoute à 1, contient un entier, ou des entiers, ainſi qu'il le faut, & que la méthode l'emporte néceſſairement.

Si $n = 3$, ce qui donne l'équation du 3me degré

$$\left.\begin{matrix} x^3 + 3x^2 d + 3x d^2 + d^3 \\ - a d^3 \end{matrix}\right\} = 0,$$

on trouvera qu'en faiſant évanouir le 2^d^ terme par la ſuppoſition de $x = y - d$, le 3me terme s'évanouit auſſi dans la transformée, qui ſe réduit à $y^3 = ad^3$. Donc $y = \sqrt[3]{ad^3}$. Donc $x = \sqrt[3]{ad^3} - d$.

En ce cas, ſi $a = 2$, & $d = 96$, $\sqrt[3]{2}$ eſt entre $1 + \frac{24}{96}$, & $1 + \frac{25}{96}$.

Si $n = 4$, on trouvera qu'en faiſant évanouir le ſecond terme de l'équation du quatrieme degré, le 3me & le 4me s'évanouiront auſſi, & qu'il viendra $x = \sqrt[4]{ad^4} - d$. De ſorte que pour $\sqrt[n]{a}$ en général, on a $x = \sqrt[n]{ad^n} - d$.

Il pourroit ſembler ici que $\sqrt[n]{ad^n}$ étant $= d\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{a}$

entre toujours dans l'expreſſion de $1 + \frac{x}{d} = \sqrt[n]{a}$; que par conſéquent on fait un cercle vicieux, & que l'on n'avance point. Il eſt même vrai, & cela doit être, que $1 + \frac{x}{d}$, par la valeur que nous donnons à x, ne ſe trouve que $\sqrt[n]{a}$; car $1 + \frac{x}{d} = 1 + \frac{d\sqrt[n]{a} - d}{d} = 1 + \frac{\sqrt[n]{a} - 1 \times d}{d} = 1 + \sqrt[n]{a} - 1 = \sqrt[n]{a}$. Mais il faut remarquer que ce n'eſt pas $\sqrt[n]{a}$ que l'on cherche, on ne doit & on ne peut jamais la trouver autrement exprimée par $\sqrt[n]{a}$. On cherche deux nombres commenſurables entre leſquels elle eſt. Il eſt vrai que pour les trouver, il faut laiſſer $\sqrt[n]{ad^n} - d$ ſous cette forme, & ne la pas prendre ſous l'équivalente $d\sqrt[n]{a} - d$. La raiſon en eſt claire.

Conſidération des Racines quelconques des nombres.

442. Si l'on conçoit toutes les $\sqrt{2}$, qui ſont autant d'incommenſurables, diſpoſées de ſuite entre 2 & 1, elles formeront la Suite $2^{\frac{1}{2}}$, $2^{\frac{1}{3}}$, &c. $2^{\frac{1}{\infty}}$, dont les termes auront toujours un rapport géométrique décroiſſant, & par conſéquent tendront à l'égalité. Donc l'intervalle entre 2 & 1 ſera diviſé en une infinité de parties décroiſſantes, & comme il eſt Fini, cette infinité de parties ne pourront pas être Finies, mais elles ſeront, ou toutes Infiniment petites, ou les unes en nombre fini Finies, & les autres en nombre infini Infiniment petites. Or il eſt bien clair que $2^{\frac{1}{2}}$, $2^{\frac{1}{3}}$, $2^{\frac{1}{4}}$, &c. ont des différences finies, & par conſéquent diviſent l'intervalle en parties finies, donc l'intervalle eſt diviſé d'abord en un nombre ſeulement fini de parties Finies, & enſuite en un nombre infini d'Infiniment petites.

443. Donc il y a un nombre infini de $\sqrt{2}$ qui n'ont de l'une à celle qui la ſuit, que des différences infiniment petites, & même toujours décroiſſantes.

444. Donc le nombre fini de $\sqrt{}2$, qui ont des différences finies, doivent être celles dont les exposans sont Finis déterminables, & celles dont les exposans sont Finis indéterminables ou ∞, auront les différences infiniment petites. Cela est visible.

445. Puisque c'est l'intervalle entre 2 & 1 qui a été ainsi divisé, la derniere partie de cet intervalle est infiniment petite. Donc à la fin de la Suite, $2^{\frac{1}{\infty}} = 1$, ce que l'on savoit déja d'ailleurs.

Et même toutes les $\sqrt{}$ infinies de 2, ou les $2^{\frac{1}{\infty}}$ qui ne sont éloignés de 1 que d'un nombre fini de termes de cette Suite, sont encore confondus avec 1, puisqu'ils n'en different que d'un nombre fini de différences infiniment petites.

446. On en doit dire autant des $\sqrt{}3$ toutes comprises entre 2 & 1, & même des $\sqrt{}$ de tout nombre n, quoiqu'elles ne soient pas toutes entre 2 & 1, car elles seront toujours entre n & 1, & cet intervalle étant fini, le raisonnement sera toujours le même, seulement cet intervalle sera divisé en parties plus grandes, tant Finies qu'Infiniment petites, ce qui rendra toujours $n^{\frac{1}{\infty}} = 1$.

447. Toutes les $\sqrt{}2$ étant disposées entre 2 & 1, si l'on conçoit les $\sqrt{}3$ disposées dans ce même intervalle, elles ne peuvent, parce qu'elles sont toutes différentes des $\sqrt{}2$, se placer que dans les intervalles que les $\sqrt{}2$ laissent entr'elles, & par-là on voit que tant que les $\sqrt{}2$ & les $\sqrt{}3$ ont des exposans finis déterminables, les unes se placent dans des intervalles finis que les autres laissent entr'elles, & que par conséquent elles ont les unes aux autres des différences finies, après quoi elles n'en ont plus que d'infiniment petites, & que toutes les $\sqrt{}2$ & $\sqrt{}3$ se confondent dès qu'elles n'ont plus des exposans finis déterminables.

448. Donc aussi à mesure que leurs exposans Finis déterminables augmentent, elles approchent davantage de se

confondre, ou d'être égales. Par exemple, $\sqrt[5]{2}$ & $\sqrt[5]{3}$ approchent plus de l'égalité que $\sqrt[4]{2}$ & $\sqrt[4]{3}$, & moins que $\sqrt[6]{2}$ & $\sqrt[6]{3}$.

449. Il en ira de même des incommensurables qui ne seront pas tous compris entre 2 & 1, tels que sont les $\sqrt{4}$ & les $\sqrt{5}$, & en général des $\sqrt{n}$ & $\sqrt{n+1}$, n étant un nombre fini quelconque; car les intervalles entre n ou $n+1$ & 1 seront toujours divisés de la même maniere, mais seulement en parties plus grandes (446). Donc en général les $\sqrt{n}$ & $\sqrt{n+1}$ approchent d'autant plus de l'égalité, que l'exposant de la $\sqrt{}$ étant le même de part & d'autre, est plus grand.

450. D'un autre côté, plus n est grand, plus n & $n+1$ approchent de l'égalité, & par conséquent aussi leurs $\sqrt{}$ d'un même exposant. Donc $\sqrt{n}$ & $\sqrt{n+1}$ approchent d'autant plus de l'égalité, 1° que leur exposant étant le même est plus grand, 2° que n est plus grand. Par exemple, $\sqrt[6]{2}$ & $\sqrt[6]{3}$ approchent plus de l'égalité que $\sqrt[5]{2}$ & $\sqrt[5]{3}$, mais moins que $\sqrt[6]{3}$ & $\sqrt[6]{4}$.

Cela vient évidemment de ce que, quoique l'intervalle entre n ou $n+1$ & 1 soit divisé en de plus grandes parties à mesure que n est plus grand, les $\sqrt{n}$ & les $\sqrt{n+1}$ sont plus proches chacune de celle du même nom à mesure que n est plus grand; & par conséquent le plus de grandeur de l'intervalle qui est entre n ou $n+1$ & 1 n'empêche nullement le plus de proximité des $\sqrt{n}$ & $\sqrt{n+1}$ du même nom.

Nous n'avons comparé que des $\sqrt{}$ de même nom de nombres consécutifs, parce qu'on ne pourroit comparer que beaucoup moins exactement des $\sqrt{}$ de différens noms, & de

nombres

nombres non consécutifs, & de plus cela seroit inutile au dessein présent.

451. De tout ce qui a été dit, il suit que tous les Incommensurables ont entr'eux des différences finies, tant que les $\sqrt{}$ qui les expriment ont des exposans finis déterminables, ce qui est la seule forme sous laquelle nous les connoissions, qu'ensuite quand ces exposans sont des Finis indéterminables, ils n'ont plus que des différences infiniment petites décroissantes, & qu'enfin quand l'exposant est infini, ils n'ont plus à 1 qu'une différence encore plus petite que toutes les précédentes, ou sont 1.

452. Donc l'incommensurabilité s'anéantit par le décroissement infini de la grandeur incommensurable quelconque, qui cependant ne s'anéantit pas, puisqu'elle devient 1, & par ce décroissement infini l'incommensurable devient commensurable. En effet, tout Incommensurable étant, ou pouvant être devenu $1 + \frac{\propto}{\infty}$, il décroît à l'infini par le seul décroissement de la fraction $\frac{\propto}{\infty}$, dans laquelle ∞ étant constant & $\propto$ variable, $\propto$ décroît jusqu'à ce qu'il soit enfin $= 1$, ce qui donne $1 + \frac{1}{\infty} = 1$, & alors l'incommensurabilité cesse.

453. L'incommensurabilité est attachée au rapport $\frac{\propto}{\infty}$ qui dans toutes ses variations est toujours également inexprimable & inconnu, & par conséquent quoique la grandeur $1 + \frac{\propto}{\infty}$, qui est incommensurable, décroisse, & tende à devenir commensurable, & à la fin le devienne effectivement, elle est cependant toujours également incommensurable. *A quoi est attachée l'incommensurabilité; qu'elle vient de l'Infini.*

454. Donc l'incommensurabilité n'a point de plus & de moins, quoique la grandeur $\frac{\propto}{\infty}$, d'où dépend l'incommensurabilité, en ait.

455. Puisque l'incommensurabilité d'un nombre vient de l'Infini qui y entre nécessairement, il faut regarder deux

Incommensurables comparés entr'eux comme deux Infinis ; & leur rapport comme celui de deux Infinis. Donc deux Incommensurables auront entr'eux un rapport exprimable, ou inexprimable, quand deux Infinis en auroient un. Or deux Infinis n'ont un rapport exprimable que quand ils sont le même Infini affecté de deux coëfficiens finis, donc pareillement deux Incommensurables n'ont un rapport exprimable que quand ils sont le même Incommensurable affecté de deux différens coëfficiens, comme $\sqrt[n]{a}$ & $m\sqrt[n]{a}$, ou $\sqrt[n]{a}$ & $\frac{\sqrt[n]{a}}{m}$; donc en ce cas leur rapport est exprimable, ou, ce qui est le même, ils sont commensurables entr'eux, c'est-à-dire, $::$ 1. m. ou $::$ m. 1. Mais par la raison contraire, $\sqrt[n]{a}$ & $\sqrt[n]{b}$, ou $\sqrt[n]{a}$ & $\sqrt[m]{a}$, quelques coëfficiens qu'ils puissent avoir, n'ont aucun rapport exprimable, ou sont incommensurables à l'égard l'un de l'autre, aussi bien qu'à l'égard de tous les autres nombres, car dans $\sqrt[n]{a} = 1 + \frac{\propto}{\infty}$, & dans $\sqrt[m]{a} = 1 + \frac{\propto}{\infty}$, $\propto$ est différent, & de même dans $\sqrt[n]{a}$ & $\sqrt[n]{b}$. En un mot $\propto$ qui entre dans $\sqrt[n]{a}$ est unique, & n'est le même dans aucun autre Incommensurable, & de-là tout le reste s'ensuit.

Comparaison des Finis indéterminables, & des Incommensurables.

456. Les Finis indéterminables sont tels qu'étant élevés à quelque puissance finie, ils deviennent Infinis, & par conséquent ils sont $\sqrt{}$ finies de quelque Infini. Les Incommensurables sont des $\sqrt{}$ finies de quelque nombre fini, mais tels que l'Infini entreroit nécessairement dans leur valeur précise. Donc les Incommensurables & les Finis indéterminables sont également inexprimables, parce qu'ils tiennent de l'Infini les uns & les autres. Mais les Incommensurables sont déterminables, parce qu'ils sont $\sqrt{}$ de quelque nombre fini qui se détermine, & les Finis indéterminables sont indéterminables, parce qu'ils sont $\sqrt{}$ de quelque Infini.

457. Nous n'avons considéré jusqu'ici que des Incommensurables, qui étoient des √ finies de quelque nombre fini, & ce sont aussi les seuls que les Géometres aient considérés, mais il y en a d'autres especes.

Nouvelles especes d'Incommensurables. 2de espece.

Au lieu d'introduire dans l'art. 415. un nombre infini de moyens arithmétiques entre 1 & 2, on y auroit pu introduire ce même nombre de moyens géométriques, ce qui donne $\div\div 1 : 2^{\frac{1}{\infty}} . 2^{\frac{2}{\infty}} : 2^{\frac{3}{\infty}}$, &c. $2^{\frac{\infty}{\infty}} = 2$.

Parce que $2^{\frac{1}{\infty}} = 1$, comme $1 + \frac{1}{\infty} = 1$, il faut appliquer ici le raisonnement de l'art. 416, & ne pas prendre $2^{\frac{1}{\infty}}$ comme précisément $= 1$, de même qu'on n'a pas pris $1 + \frac{1}{\infty}$ comme précisément $= 1$. Il faut donc nécessairement regarder la progression $\div\div 1 . 2^{\frac{1}{\infty}} . 2^{\frac{2}{\infty}}$, &c. comme croissante, quoiqu'elle le soit infiniment peu dans tout son cours, aussi-bien que l'arithmétique correspondante: mais les différences infiniment petites de l'arithmétique étoient égales, & celles de la géométrique sont croissantes.

Il y a dans la géométrique des $2^{\frac{\propto}{\infty}}$, mais en nombre fini seulement, qui ont à 1 une différence finie. Car la progression arithmétique correspondante a une infinité de termes qui ont à 1 une différence finie (421 & 422), donc la géométrique qui divise le même intervalle le plus inégalement qu'il soit possible, & de la maniere la plus opposée à la progression arithmétique, n'a qu'un nombre fini de ces termes. Or ils sont nécessairement des $2^{\frac{\propto}{\infty}}$. Et en effet, comme dans *A* le nombre des termes finis, ou qui ont une différence finie à 1, & le nombre des termes qui y ont une différence infinie, étant tous deux infinis, le nombre seul des termes qui ont des différences finies à 1 est infini dans *G*, de même il faut pour les deux progressions dont il s'agit ici,

que le nombre des termes qui ont une différence infiniment petite à 1, & le nombre des termes qui y ont une différence finie, étant tous deux infinis dans l'arithmétique, le nombre seul des termes qui y ont une différence infiniment petite à 1, soit infini dans la géométrique. Or les $2^{\frac{\infty}{\infty}}$ étant des nombres finis finiment différens de 1, ils sont cependant inexprimables, & par conséquent ont tous les caracteres d'Incommensurables.

458. Ces Incommensurables ne sont pas comme les $\sqrt{2}$ des $\sqrt{}$ finies de 2, mais des $\sqrt{}$ infinies de 2 élevé à quelque puissance infinie moindre que la $\sqrt{}$. Ils sont déterminables en ce que, comme les $\sqrt{2}$, ils appartiennent au nombre déterminé 2 : mais ni la dénomination de la $\sqrt{}$ qui les exprime n'est déterminée comme dans les $\sqrt{2}$, ni la puissance dont on tire cette $\sqrt{}$ ne l'est; & par tout cela ils sont d'une espece différente des $\sqrt{2}$.

459. On peut remarquer ici en passant, que la somme de la progression arithmétique infinie comprise entre 1 & 2 sera (77) $2 + \frac{1}{\infty} \times \infty \times \frac{\infty}{2} = 2 + \frac{\infty}{\infty} \times \frac{\infty}{2} = \frac{3\infty}{2}$, & que par conséquent elle sera à la somme de la Suite infinie des Unités, qui est $= \infty$: : 3. 2. Ce qui vient de ce que cette progression a une infinité de termes plus grands que 1, & plus grands d'une différence finie (457).

La somme de la progression géométrique correspondante sera $\frac{2^{\frac{\infty}{\infty}} - 1}{2^{\frac{1}{\infty}} - 1} = \frac{2 - 1}{2^{\frac{1}{\infty}} - 1} = \frac{1}{2^{\frac{1}{\infty}} - 1}$. Or $2^{\frac{1}{\infty}} - 1$ est une grandeur infiniment petite (351), ou 0 relatif. Donc $\frac{1}{2^{\frac{1}{\infty}} - 1} = \frac{1}{0}$, grandeur infinie (338). Cet $\frac{1}{0}$ n'est pas absolument $= \infty$, car la progression géométrique ayant tous

ſes termes plus grands que 1, & entr'eux un nombre fini indéterminable, qui ſont plus grands que 1 d'une différence finie (457.), ſa ſomme eſt plus grande que celle de la Suite infinie des Unités qui eſt $= \infty$. Donc cet $\frac{1}{0} > \infty$, mais ſeulement d'une différence finie, & ſi on la compte, cette ſomme de la progreſſion géométrique ne peut être comparée à celle de l'arithmétique, qui eſt $\frac{3\infty}{2}$, ou ces ſommes ſont incommenſurables entr'elles. Seulement on ſait que celle de l'arithmétique doit être la plus grande, & par conſéquent elle auroit à celle de la géométrique un moindre rapport que celui de 3 à 2.

460. Tout ce qui a été dit de la progreſſion géométrique infinie dont 1 & 2 ſont les extremes, s'applique de ſoi-même à celles dont 1 & 3, ou 1 & 4, &c. ſeroient les extremes, & l'on voit naître une infinité de $3^{\frac{\infty}{\infty}}$, de $4^{\frac{\infty}{\infty}}$ &c. qui ſeront autant de nombres finis incommenſurables d'une 2de *eſpece*.

461. Que ſi enfin on établit la progreſſion géométrique dont 1 & ∞ ſoient les extremes, ce qu'on a déja vû pluſieurs fois, tous les termes $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, $\infty^{\frac{2}{\infty}}$, $\infty^{\frac{3}{\infty}}$, &c. enfin tant que le numérateur des expoſans ſera fini, ſeront finis, & ce ſont de nouveaux Incommenſurables d'une 3me *eſpece*, parce qu'ils n'appartiennent plus à aucun nombre fini, mais à l'Infini élevé à quelque puiſſance finie dont ils ſont $\sqrt{}$ infinies. 3me *eſpece.*

462. Et comme dans cette progreſſion il y a des $\infty^{\frac{\infty}{\infty}}$ qui ſont encore finis (321), ce ſont encore des Incommenſurables d'une 4me *eſpece*, parce qu il n'entre abſolument rien de fini dans leur expreſſion, non pas même le numérateur de leur expoſant, ou, ce qui revient au même, qu'ils ſont $\sqrt{}$ infinies d'un Infini élevé à une puiſſance infinie. 4me *eſpece.*

463. On voit assez que passé cela, il ne doit plus être possible de trouver des Incommensurables, c'est-à-dire, des nombres finis inexprimables; & même ces derniers, qui sont les $\infty^{\frac{\infty}{\infty}}$, manquent absolument d'un caractere qui les fasse reconnoître pour finis, car il y en a aussi de pareils ou pris dans la même progression qui sont infinis. A mesure que les Incommensurables ont plus de rapport à l'Infini, ils deviennent plus indéterminables.

464. Donc il y a des nombres finis de deux especes principales : les uns purement Finis, les autres qui tiennent de l'Infini. Les premiers sont les Commensurables, tous exprimables & déterminables, dont nous avons une idée parfaite. Les seconds sont les Incommensurables, tous inexprimables, & dont nous n'avons qu'une idée obscure. Ils se subdivisent en quatre especes, & deviennent d'autant moins déterminables, & l'idée que nous en avons d'autant plus obscure, qu'ils tiennent plus de l'Infini, & enfin dans la derniere espece ils deviennent absolument indéterminables, & nous n'en avons plus d'idée.

465. Il suit de l'art. 435, que chaque nombre commensurable produit une infinité d'Incommensurables, & ils ne sont que de la 1re espece. Donc il y a autant d'Infinités d'Incommensurables de cette espece qu'il y a de commensurables, & il ne faut pas être surpris que dans les recherches Algébriques on en rencontre tant.

466. Que si on rencontre aussi des grandeurs qui soient certainement finies, & ne soient cependant point $\sqrt{}$ de quelque nombre fini exprimable, ce seront des Incommensurables de quelqu'une des trois dernieres especes : ainsi les sommes de $\frac{1}{A^2}$, $\frac{1}{A^3}$, &c. sont des grandeurs finies (363 & 365), mais qui ne se peuvent exprimer par aucun nombre fini, ni par aucune $\sqrt{}$ d'un nombre fini. Elles seront de ces nouveaux Incommensurables.

467. A plus forte raison deux grandeurs de cette espece auront-elles un rapport fini qui ne se pourra jamais exprimer ni déterminer. Tel sera le rapport de la somme de $\frac{1}{A^2}$ à la somme de $\frac{1}{A^3}$. C'est peut-être celui de $3\frac{\propto}{\infty}$ à $2\frac{\propto}{\infty}$, $\propto$ étant le même de part & d'autre. Il suffit de voir par-là qu'il peut y avoir une infinité de rapports finis de grandeurs finies, qui par leur nature seront éternellement hors de la portée de l'Esprit humain.



SECTION VI.

Des Grandeurs Positives & Négatives, Réelles & Imaginaires.

468. ON appelle grandeurs *positives*, celles qui ont le signe +, ou qui n'en ont point; car alors + est sousentendu, & en effet toute grandeur que l'on considere est pour cela seul posée. Et on appelle *negatives*, celles qui ont le signe —.

Il paroît que dans l'usage commun on confond assez les grandeurs positives avec celles qui sont ajoutées à quelqu'autre, & les négatives avec celles qui sont retranchées de quelqu'autre; & il est si vrai qu'on les confond, que l'on ne tire les Regles du calcul des grandeurs positives & négatives que des seules idées de l'addition & de la soustraction. De-là vient encore que quand les grandeurs négatives ont un — absolu, comme — 1, — 2, — 3, &c. c'est-à-dire, qu'elles ont le signe — sans être précédées d'aucune grandeur dont elles soient réellement retranchées, on est réduit à imaginer qu'elles sont retranchées de 0. Mais on tombe par-là dans quelque chose d'entierement inconcevable, qui est une grandeur moindre que rien.

On dit, pour justifier cette idée, qu'un homme qui a, par exemple, plus de dettes que de bien, a moins que rien. Mais il faut prendre garde que ce *moins que rien* n'est pas une idée géométrique, ni physique, mais seulement morale, & qu'on entend par-là que selon les loix de la Société la condition de cet homme est plus mauvaise, que s'il n'avoit précisément rien, c'est-à-dire, ni bien, ni dettes. Si — 1 est moins que rien, j'entens que ce — soit absolu, comment son quarré est-il 1? Et si — 2 est moindre que — 1, parce qu'il est plus au-dessous de 0, comment son quarré 4 est-il au-dessus de celui de — 1?

On

On dit aussi que — *a* est la négation de *a*, mais cela ne porte pas une idée nette : car dès que l'on considere une grandeur, on l'affirme, ou on la pose, & on n'entend pas ce que c'est que de la nier, à moins que ce ne soit la retrancher de quelque autre. Or le — étant absolu, il n'y a point de retranchement, ou si l'on en suppose un, on retombe dans les embarras qui viennent d'être représentés.

Enfin les exposans négatifs des puissances ne sont négatifs par aucune soustraction, ni par aucune négation. Quand je dis $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, je ne puis concevoir ni que *n* soit retranché d'aucune grandeur, ni que — *n* soit la négation de la puissance *n*, puisque je retrouve cette puissance *n* dans $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$.

De tout cela je conclus que les grandeurs positives & négatives le sont par elles-mêmes, & indépendamment de toute addition, ou soustraction, ou négation, & que dans ce qui les rend positives ou négatives, il y a quelque idée peu développée, qu'il est bon de démêler.

Ce que c'est que le Positif & le Négatif. Que le Négatif ne consiste pas dans un retranchement, mais dans une certaine opposition.

469. Si on veut qu'une Suite de nombres représente le cours du Soleil au dessus de l'Horison, 0, 1, 2, &c. 90, 89, &c. 2, 1, 0, 0 marquera que le Soleil est à l'Horison, soit qu'il se leve, ou se couche. Si on veut suivre son cours au dessous de l'Horison, on ne peut avoir que les mêmes nombres 0, 1, 2, &c. 90, 89, &c. 2, 1, 0, où l'on voit qu'ils représentent également & les élevations du Soleil au dessous de l'Horison, & ses abaissemens au dessous. L'expression par les nombres seuls est donc douteuse & équivoque. Pour la déterminer, on affecte du signe — les nombres qui représentent les abaissemens, en donnant le signe + à ceux qui représentent les élevations, ou en le leur laissant sousentendu, puisque tous les nombres l'ont naturellement & par eux-mêmes. Par-là l'équivoque est entierement levée.

De même, si étant toujours tourné du même côté, je voulois représenter par une Suite de nombres les arcs ou degrés d'un demi-Cercle que parcourroit le Soleil d'abord à ma

droite, ensuite à ma gauche, j'aurois 0, 1, 2, &c. j'usqu'à 90 pour les arcs qu'il parcourroit à ma droite, 0 étant le point où le demi-Cercle couperoit l'Horison, après quoi j'aurois pour les arcs à ma gauche — 89, &c. — 2, — 1, 0, car sans cela les deux especes d'arcs n'auroient nulle distinction.

De-là il suit que l'idée du positif & du négatif ajoute à celle des grandeurs qu'elles soient *contraires* en quelque chose, comme dans les deux exemples rapportés les nombres sont contraires par la position des grandeurs qu'ils représentent.

470. Toute *contrariété* ou opposition suffit pour l'idée du positif & du négatif. Si, par ex. 4, 3, 2, 1, représentent le Bien ou le Fonds d'un Homme qui diminue toujours, — 1, — 2, &c. représenteront ses Dettes qui augmenteront. Et en général, si *a* est un Fonds, une élevation du Soleil, &c. — *a* est une Dette, ou un abaissement du Soleil, &c.

471. Donc toute grandeur positive ou négative n'a pas seulement son être *numérique*, par lequel elle est un certain nombre, une certaine quantité, mais elle a de plus son être *spécifique*, par lequel elle est une certaine *Chose* opposée à une autre.

Je dis *opposée à une autre*, car ce n'est que par cette opposition qu'elle prend un être spécifique; & si on lui en donnoit un qui ne lui apportât aucune opposition à une autre grandeur, elle ne conserveroit aucun caractere d'être spécifique, & ne seroit considérée que selon le numérique. Ainsi quoique des degrés de Vitesse appartiennent à une certaine chose, qui est une Vitesse, ils ne sont point susceptibles de l'idée du positif & du négatif, parce que la Vitesse, entant que Vitesse précisément, n'a rien qui lui soit opposé, non pas même la Lenteur, qui n'est qu'une moindre Vitesse, ni le Repos, qui n'est qu'une Vitesse devenue nulle, ou infiniment petite.

472. Donc toute grandeur n'est pas susceptible de l'idée du positif & du négatif, & celles qui le sont peuvent être aisément reconnues par l'opposition spécifique qu'elles auront à d'autres.

473. Quand deux grandeurs ſont oppoſées, l'une exclut ou nie l'autre, & par conſéquent eſt négative à l'égard de l'autre qui ſera poſitive. Ainſi l'abaiſſement du Soleil nie l'élévation, une Dette nie un Fonds, &c. Et comme deux grandeurs oppoſées ſe nient également l'une l'autre, & que l'élevation nie autant l'abaiſſement que l'abaiſſement nie l'élevation, &c. il eſt indifférent laquelle des deux on prenne pour poſitive ou pour négative. Cependant on prend ordinairement pour poſitive celle qui ſe préſente la premiere dans la recherche dont il s'agit, & qu'il eſt le plus naturel de conſidérer. Un Fonds ſera plutôt la grandeur poſitive qu'une Dette.

474. Quoiqu'une grandeur ait une oppoſée, il n'eſt nullement néceſſaire de conſidérer cette oppoſée. Ainſi quoique je conſidere un Fonds que j'appelle a, je puis ne conſidérer a que numériquement, par ſes accroiſſemens ou décroiſſemens numériques quelconques, & ſans aucun rapport à la grandeur ſpécifique oppoſée, qui eſt une Dette : mais ſi je dis $-a$, cette grandeur n'eſt ce qu'elle eſt, & affectée du ſigne $-$, que parce qu'elle eſt oppoſée à a, ou $+a$, qui eſt un Fonds. La grandeur négative, quoique priſe à part, renferme donc néceſſairement dans ſon idée l'être ſpécifique : mais la poſitive, priſe de même, ne le renferme pas néceſſairement, & alors elle n'eſt poſitive qu'*improprement*, & parce qu'elle eſt conſidérée ou poſée, mais non pas *proprement*, & par rapport à une grandeur oppoſée. Elle n'eſt plus qu'un nombre.

475. Donc $-a$ n'eſt point un pur nombre, & à moins que d'y attacher une idée ſpécifique, on n'en a plus d'idée.

476. Zero n'eſt point ſuſceptible de l'idée du poſitif & du négatif, puiſqu'il n'eſt point grandeur, & que loin de pouvoir avoir un être ſpécifique, il n'en a ſeulement pas un numérique.

477. Par la raiſon contraire, l'Infini eſt ſuſceptible de cette idée, ce qui eſt évident de ſoi-même.

478. Les entiers & les fractions ne ſont point des

grandeurs ſpécifiquement oppoſées. Par exemple, 3 ne l'eſt point à $\frac{1}{3}$, car 3 eſt $\frac{1}{3}$ à l'égard de 9, & $\frac{1}{3}$ eſt 3 à l'égard de $\frac{1}{9}$. Donc l'idée de poſitif & de négatif ne peut tomber ſur les entiers entant qu'oppoſés aux fractions, ni réciproquement.

En quoi conſiſte le Négatif des Puiſſances & des Racines.

479. De même les puiſſances & les racines ne ſont point des grandeurs oppoſées. Car il n'y a point de nombre qui ne ſoit en même temps & une puiſſance quelconque (438) & une racine quelconque. Cela ſe voit encore, parce que les puiſſances ſont n, & les racines $\frac{1}{n}$, entiers & fractions, qui ne ſont point oppoſés (478).

480. Mais les puiſſances peuvent avoir entr'elles-mêmes, & les racines de même entr'elles une oppoſition ſpécifique. Une puiſſance éleve ou abaiſſe la grandeur qu'elle affecte, ſelon que cette grandeur eſt un entier ou une fraction. Donc les puiſſances qui élevent & celles qui abaiſſent ſont ſpécifiquement oppoſées entr'elles. Donc ſi n eſt une puiſſance qui éleve, $-n$ eſt une puiſſance qui abaiſſe, ou, ce qui eſt le même, ſi a eſt élevé par la puiſſance n, il eſt abaiſſé par la puiſſance $-n$. Or il n'y a qu'une fraction qui puiſſe être abaiſſée par une puiſſance, donc a abaiſſé par la puiſſance $-n$ eſt devenu fraction, ou $\frac{1}{a}$. Donc $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. De même une racine abaiſſe ou éleve une grandeur ſelon que cette grandeur eſt un entier, ou une fraction. Donc ſi $\frac{1}{n}$ eſt une racine qui abaiſſe, $-\frac{1}{n}$ eſt une racine qui éleve. Or une racine ne peut élever qu'une fraction. Donc $a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}$.

On voit par l'article précédent pourquoi a^{-n} n'eſt pas $= a^{\frac{1}{n}}$, ou $a^{-\frac{1}{n}} = a^n$, & par celui-ci pourquoi $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, & $a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}$. Et peut-être tout cela ſeroit-il

plus difficile à démontrer *à priori* par d'autres principes que ceux qui ont été établis.

La même chose se trouve aisément par le calcul. Car $a^n \times a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1$. Donc $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. De même $a^{\frac{1}{n}} \times a^{-\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n}} = a^0 = 1$. Donc $a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}$.

481. Dans les exemples des élévations ou abaissemens du Soleil, des Fonds ou Dettes, l'opposition spécifique ne touche point à l'être numérique des grandeurs qui demeure toujours le même, c'est-à-dire, que 2 degrés d'élévation du Soleil, par ex. ou 2 degrés d'abaissement sont toujours le même nombre 2. Mais l'opposition spécifique des puissances ou des racines positives ou négatives entr'elles change l'être numérique de la grandeur à laquelle elles sont appliquées, puisque ce qui dans a^n & dans $a^{\frac{1}{n}}$ étoit a, devient $\frac{1}{a}$ dans a^{-n} & dans $a^{-\frac{1}{n}}$.

482. Du raisonnement de l'art. 480, & du précédent il suit que si une puissance éleve infiniment a, la même puissance affectée de $-$ l'abaisse infiniment. Donc puisque a^∞ est infiniment grand, $a^{-\infty}$ est infiniment petit. Et en effet $a^{-\infty} = \frac{1}{a^\infty}$ (480).

483. Pareillement si une puissance ou une racine a rendu une grandeur telle qu'elle ne puisse plus être ni élevée ni abaissée par les puissances ou par les racines, la même puissance ou racine affectée de $-$ ne rendra point la grandeur différente de ce qu'elle étoit, quand la puissance ou racine étoit affectée de $+$, car les puissances ou racines auront perdu l'opposition spécifique qu'elles avoient entr'elles. Donc puisque $a^0 = 1$, a^{-0} est de même $= 1$, car la puissance o

ayant rendu $a = 1$, l'a rendu incapable d'être élevé ou abaissé par des puissances. De même puisque $a^{\frac{1}{\infty}} = 1$, $a^{-\frac{1}{\infty}}$ est aussi $= 1$. Et en effet $a^{-\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{\infty}}} = \frac{1}{1} = 1$.

284. Donc $a^{-0} = a^{0} = 1$, soit que o soit absolu ou relatif. S'il est absolu, on vient de le voir dans l'art. précédent, & si o est relatif, $a^{-0} = a^{-\frac{1}{\infty}} = 1$.

Comment une Suite devient de positive négative.

485. On voit suffisamment par le 1er exemple de l'art. 469, qu'une Suite de grandeurs peut devenir de positive négative, & qu'elle passeroit du positif au négatif par o, que de même dans le 2d exemple elle passeroit du positif au négatif par 90, c'est-à-dire, que dans le 1er exemple, o étant le point de l'Horison où le Soleil seroit dans le plan de ce Cercle, il ne seroit ni au dessus, ni au dessous, & par conséquent sa position ne seroit ni positive ni négative, & dans le 2d exemple elle ne seroit non plus ni l'un ni l'autre, parce que le Soleil étant à 90, ne seroit ni à ma droite ni à ma gauche, mais sur ma tête. D'où l'on voit en général que dans les Suites qui deviennent de positives négatives, le passage du positif au négatif se fait par quelque *terme* qui n'est ni l'un ni l'autre, ou si l'on veut, qui est l'un & l'autre en même temps. Car o n'est ni positif ni négatif (476). mais on peut bien concevoir que 90 soit la derniere des grandeurs positives, & la premiere des négatives en même temps. Ces deux idées, *quant à présent*, reviennent au même.

486. Il est clair que ce que 90 est dans l'exemple qu'on avoit pris, tout autre nombre le sera dans d'autres exemples ou d'autres cas, & que l'Infini même le pourra être. Donc en général zero, tous les nombres Finis & l'Infini sont des termes par où des Suites de grandeurs peuvent passer du positif au négatif.

Calcul des grandeurs négatives.

487. Il se trouve par le calcul, que les opérations que l'on fait sur les grandeurs négatives sont les mêmes qu'on

seroit sur des grandeurs simplement retranchées, parce qu'en effet on peut ramener en quelque sorte l'idée de grandeurs négatives à celle de grandeurs simplement retranchées. Mais comme cette maniere de les y ramener est un peu forcée, qu'elle ne va point assez au fond de la nature des choses, & qu'elle ne peut s'étendre à tout, par ex. aux puissances négatives qui ne sont telles par aucun retranchement, il vaut mieux prouver les opérations sur les grandeurs négatives, en les prenant simplement comme négatives, & de-là naîtront quelques idées qui éclairciront peut-être un peu une partie assez obscure de l'Algebre. Je suppose donc les grandeurs négatives affectées du signe $-$ absolu, ou négatives par elles-mêmes.

Ajouter une grandeur négative à une négative, une Dette à une Dette, c'est l'augmenter. Donc $-a$, auquel on ajoute $-a$, ou $-a + -a = -2a$.

Ajouter à une grandeur négative une positive, un Fonds à une Dette, c'est diminuer la Dette. Donc $-2a + a = -a$. De même ajouter une Dette à un Fonds, c'est diminuer le Fonds. $2a + -a = a$.

Oter d'une grandeur négative une négative, une Dette d'une Dette, c'est la diminuer. Donc $-2a - -a = -a$. Et l'on voit par conséquent que $- -a = +a$.

Oter d'une grandeur négative une positive, un Fonds d'une Dette, c'est augmenter la négative. Donc $-2a - +a = -2a - a = -3a$. De même ôter une Dette d'un Fonds, c'est augmenter le Fonds. Donc $2a - -a = 2a + a = 3a$. Et l'on voit toujours que $- - = +$.

Il est clair que tout cela naît ou de la seule nature de la grandeur, lorsqu'on n'opere que sur des grandeurs négatives, ou de l'opposition spécifique, lorsqu'on opere sur des grandeurs positives & négatives.

488. Il n'y a point d'idée plus claire que celle de la multiplication d'un Fonds a, ou d'une Dette $-a$, par un nombre b, ce n'est que doubler, tripler, &c. le Fonds ou la Dette. Le 1[er] produit est donc ab, & le 2[d] $-ab$; car il est

évident que si le produit des deux nombres purs a & b est $= c$, le 1[er] produit est un plus grand Fonds c, & le 2[d] une plus grande Dette $-c$.

Il est bon de remarquer que dans ab, produit du Fonds a par le pur nombre b, l'idée de l'être spécifique de a disparoît entierement, & que ce produit n'est en rien différent de celui du pur nombre a par le pur nombre b. Mais dans le produit $-ab$, l'idée de l'être spécifique subsiste, & en effet c'est proprement aux grandeurs négatives que cette idée est attachée (474).

Autant qu'il est clair qu'un Fonds peut être doublé, par exemple, ou multiplié par 2, autant il est inconcevable qu'un Fonds puisse être multiplié par 2 Fonds. Car que fait l'idée de Fonds dans les 2 Fonds qui multiplieroient ? Il faut nécessairement l'en détacher, si l'on veut ramener cela à quelque chose d'intelligible, & réduire les 2 Fonds à n'être que le nombre 2, auquel cas, selon qu'on vient de le remarquer, l'idée d'être spécifique disparoît entierement dans le produit quelconque ab, qui n'est plus que purement numérique.

Cela est ainsi, non parce que a est un Fonds, mais parce que c'est une grandeur qu'on avoit revêtue d'une idée spécifique. Donc il en ira de même du produit de $-a$ Dette, par $-b$ Dette. Donc ce produit sera purement numérique, donc $= ab$.

Ce qui a été dit de la multiplication des grandeurs négatives se doit appliquer à la division. Donc $\frac{-a}{b}$ ou $\frac{a}{-b} = -x$, & $\frac{-a}{-b} = x$.

489. Si, dans quelque recherche que l'on fait, les grandeurs ont pû être revêtues d'une idée spécifique, ab est un produit *équivoque*, c'est-à-dire, qu'il peut être également le produit de deux grandeurs auxquelles on avoit attaché à toutes deux ou l'idée de Fonds, par ex. ou celle de Dette, & qui en ont été dépouillées toutes deux par la multiplication. Mais $-ab$ n'est point un produit équivoque, il ne peut être que celui d'une Dette par un nombre.

490.

490. L'idée de puiſſance ajoute à celle de produit l'égalité, ou *identité* de la grandeur multipliée. Je ne puis, ſelon le raiſonnement de l'art. 488, concevoir le quarré d'un Fonds, ou d'une Dette, mais ſeulement le quarré du nombre qui exprimoit le Fonds ou la Dette, c'eſt-à-dire, que ce nombre revêtu de l'idée de Fonds ou de Dette, je l'en ai dépouillé pour en faire un quarré. Mais il eſt vrai auſſi que j'ai fait un quarré d'un nombre primitivement revêtu de l'une ou de l'autre idée, & que puiſqu'il a été dépouillé ou de l'une ou de l'autre, il demeure douteux, lorſqu'il eſt quarré, de laquelle des deux il avoit été d'abord revêtu. Donc *aa* eſt un quarré équivoque, comme le produit *ab* (489).

491. Mais — *aa* n'eſt point équivoque, non plus que — *ab*. Il ne peut être que le produit de — *a* Dette par *a* nombre pur.

492. De-là il ſuit que — *aa* n'eſt point un quarré, mais il y a deux manieres ſelon leſquelles il ne l'eſt point. 1°. Ce n'eſt point un quarré purement numérique, car *a* étant un pur nombre, — *a* n'en eſt point un (475). 2°. Ce n'eſt point un quarré ſpécifique, ou de — *a* Dette, ſelon le ſens de l'art. 490, car — *a* n'a point été dépouillé de ſon idée ſpécifique.

Il faut remarquer que ſi on ne diſtinguoit pas l'être numérique d'avec le ſpécifique, ce ne ſeroit que numériquement que — *aa* ne ſeroit point quarré, car on pourroit ſeulement dire que *a* & — *a*, quoiqu'égaux, ne ſeroient pas préciſément le même nombre. Mais il eſt néceſſaire, & tous les Géometres en conviendront qu'il y ait deux manieres ſelon leſquelles — *aa* ne ſeroit point quarré, & par conſéquent la diſtinction de l'être numérique & du ſpécifique eſt néceſſaire.

493. — a^2 pour n'être point quarré, ne laiſſe pas d'être un véritable plan.

494. Si je prends — a^2 pour un quarré, je le prends donc pour ce qu'il ne peut être. On appelle *Imaginaires*, les grandeurs qui ne peuvent être ce qu'on ſuppoſe qu'elles ſont, ou ce qu'elles devroient être, & qui par conſéquent enferment *Ce que c'eſt que les Imaginaires.*

contradiction, & on les oppose à toutes les autres qui sont *Réelles*. Donc $-a^2$ pris pour quarré est imaginaire, mais pris pour plan il est réel (493). Donc il peut devenir réel ou imaginaire selon le sens où il sera pris.

495. Si l'on dit $\sqrt[2]{-a^2}$, on détermine nécessairement $-a^2$ à être pris pour un quarré, puisqu'on lui suppose une $\sqrt[2]{}$. Donc $\sqrt[2]{-a^2}$ est une grandeur entierement déterminée à être imaginaire, & ce sont celles-là seules auxquelles on donne ce nom absolu, parce qu'elles ne peuvent être réelles en aucun sens.

496. Il y a deux manieres selon lesquelles $-a^2$ n'est point quarré (492) ou est quarré imaginaire. Donc il a deux $\sqrt[2]{}$ imaginaires, dont chacune répond à chaque maniere dont il peut être formé sans être quarré.

797. Toute grandeur qu'on affecte de $\sqrt[2]{}$ est prise pour un quarré. Donc si cette même grandeur est affectée du signe $-$, comme $\sqrt[2]{-a}$, ou $\sqrt[2]{-a^n}$, n étant un nombre indéterminé, c'est une grandeur imaginaire.

498. Toute $\sqrt{}$ dont l'exposant est pair est une $\sqrt[2]{}$. Ainsi $\sqrt[6]{}$ est la $\sqrt[2]{}$ de $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[8]{}$ de $\sqrt[4]{}$, &c. Donc toute $\sqrt{}$ paire d'une grandeur quelconque négative est imaginaire.

499. Il y a deux manieres selon lesquelles a^2 est quarré (490) comme il y en a deux selon lesquelles $-a^2$ ne l'est point. Donc comme $-a^2$ a deux $\sqrt[2]{}$ imaginaires (496), a^2 en a deux réelles, qui sont a & $-a$.

D'où viennent les Racines réelles mêlées avec les Imaginaires.

500. Quoique l'on eût formé le quarré a^2, en ne prenant a que pour un pur nombre, auquel cas il semble qu'il ne devroit avoir que a pour $\sqrt{}$, la seule possibilité d'une autre formation qui auroit été faite sur $-a$, donne un quarré a^2 une 2^{de} $\sqrt{}$. Et de même les deux manieres selon lesquelles

— a^2 peut être formé, dont il est impossible qu'aucune fasse un quarré, lui donnent deux √ imaginaires. D'où l'on voit en général que ce ne sont pas seulement les formations actuelles qu'on a faites, mais encore toutes les autres formations possibles, qui produisent des √ réelles ou imaginaires.

501. a^3 est un cube numérique, & c'est aussi un cube spécifique devenu numérique, parce que le cube d'un Fonds étant aussi inconcevable que son quarré, ce sera le cube du nombre a, auquel j'avois attaché l'idée spécifique de Fonds, & que j'ai été obligé d'en dépouiller pour faire un cube. Selon cette formation, a^3 n'auroit que a pour $\sqrt[3]{}$. Mais a^3 peut être aussi le produit de $-a$ par $-a^2$. Or il faut que toute grandeur de deux dimensions qui entre dans la formation d'un cube soit un quarré. $-a^2$ est cette grandeur de deux dimensions, mais il n'est point quarré, & il y a deux manieres dont il ne l'est point. Donc il y a deux manieres dont $-a \times -a^2 = a^3$ n'est point cube. Donc a^3 est cube imaginaire en deux sens, & a deux $\sqrt[3]{}$ imaginaires; mais il y a un sens dans lequel il est cube réel, & a une $\sqrt[3]{}$ réelle.

502. Si je veux avoir le cube de $-a$, je trouve cette grandeur dépouillée de son idée spécifique, ou, ce qui revient au même, du signe $-$, dès son quarré a^2. Pour la cuber, il faut donc que je la multiplie par elle-même dépouillée de son signe dans son quarré, c'est-à-dire, que je multiplie $-a$ par a^2, ce qui donne $-a^3$, dont la $\sqrt[3]{}$ est $-a$, & réelle. Mais $-a^3$ peut être aussi le produit de $-a^2$ par a, ce qui fait entrer dans cette formation $-a^2$, & par conséquent deux $\sqrt[3]{}$ imaginaires dans $-a^3$.

On voit par-là pourquoi le calcul algébrique donne plusieurs racines pour une puissance qui n'a été formée que par une seule racine, & en même-temps pourquoi il donne des racines imaginaires pour une puissance qui n'a été formée que

par une racine réelle, peut-être ne voyoit-on pas trop d'où tout cela pouvoit sortir. Il suffit presentement d'avoir pris cette idée générale de ce que c'est que l'Imaginaire.

Comment l'Imaginaire devient réel.

503. La qualité d'Imaginaire tient, pour ainsi dire, à peu de chose, & peut être aisément effacée. $-a^2$ n'est imaginaire que comme quarré, & non comme plan (493). Or un plan multiplié par lui-même est un véritable quarré, donc $-a^2 \times -a^2$ en deviendra un, qui est en effet a^4, quarré réel. De même $\sqrt[2]{-a^2} \times \sqrt[2]{-a^2} = -a^2$, plan réel. Ainsi la racine d'un quarré imaginaire est imaginaire, parce que c'est cette racine même qui rend le quarré imaginaire, en le déterminant à être quarré & non pas plan, & le quarré d'une racine imaginaire est réel, parce qu'alors la racine qui faisoit tout l'Imaginaire, disparoît.

504. Ce sera le même raisonnement, si une grandeur imaginaire en multiplie une autre différente d'elle ; car ce sera une $\sqrt[2]{}$ qui déterminoit un plan à être pris pour quarré qu'il ne pouvoit être, & cette $\sqrt[2]{}$, en multipliant une autre pareillement conditionnée, les deux plans qu'elles affectoient deviendront un plan réel. Ainsi $\sqrt[2]{-a^2} \times \sqrt[2]{-b^2} = \sqrt[2]{a^2 b^2} = ab$. Il en est de même de $\sqrt[2]{-a^n} \times \sqrt[2]{-b^m} = \sqrt[2]{a^n b^m}$.

505. Le produit de l'Imaginaire par le Réel doit être imaginaire, car l'Imaginaire doublé, par ex. triplé, &c. enfin multiplié par n, n'en est pas moins imaginaire.

506. Donc le produit de l'Imaginaire par lui-même étant réel (503), si on multiplie encore ce produit par l'Imaginaire, le 2d produit sera imaginaire (505), un 3me pareil réel, un 4me imaginaire, & toujours ainsi de suite.

507. Tout cela s'applique de soi-même à la division, & l'on voit à l'égard de ces deux opérations, l'analogie parfaite du positif & du Réel, du négatif & de l'Imaginaire. Aussi l'Imaginaire n'est-il imaginaire qu'en ce qu'il tient du négatif.

508. Il eſt aiſé de voir auſſi le rapport de l'Incommenſurable & de l'Imaginaire. Il ſont tous deux néceſſairement exprimés par une $\sqrt{}$, l'un par une $\sqrt{}$ quelconque, l'autre par une $\sqrt[2]{}$, ou plus généralement par une $\sqrt{}$ paire (498). L'un ſuppoſe qu'une grandeur eſt une puiſſance qu'elle n'eſt pas dans le Fini, l'autre qu'elle eſt une puiſſance qu'elle ne peut abſolument être. Une ſimple élevation à une puiſſance les fait tous deux changer de nature, & rend l'un commenſurable, l'autre réel. *Comparaiſon de l'Incommenſurable, & de l'Imaginaire.*

509. L'Imaginaire n'eſt pas zero; car quoiqu'il ne puiſſe être, il ne tient preſque à rien qu'il ne ſoit, & un léger changement le rendra réel & exiſtant, ce qui ne convient pas à zero.

510. L'Imaginaire a même une grandeur déterminée, & l'on voit par ſon expreſſion quelle ſeroit cette grandeur qui ne peut être, en cas qu'elle fût. Si $\sqrt[2]{-a^n}$ étoit poſſible, elle ſeroit $a^{\frac{n}{2}}$, & cette propriété ne convient pas non plus à zero. *Que l'Imaginaire ne laiſſe pas d'avoir une grandeur.*

511. $\sqrt[2]{-a^n + b}$ n'eſt pas $= b$, puiſque $\sqrt{-a^n}$ n'eſt pas $= 0$ (509). Qu'eſt-ce donc que cette ſomme?

Il faut conſidérer que mettre pluſieurs grandeurs enſemble, c'eſt les concevoir comme exiſtant enſemble. Mettre b avec 0, ou avec $\frac{1}{\infty}$, c'eſt concevoir b comme exiſtant ſeul, ou avec une grandeur qui à cauſe de ſon infinie petiteſſe ne l'augmente point. Mais mettre b avec une grandeur qui ne peut exiſter, c'eſt ſe réduire à l'impoſſibilité de concevoir b comme exiſtant, puiſqu'on le lie à l'Impoſſible. Donc $\sqrt[2]{-a^n}$ $+ b$ eſt une ſomme imaginaire. Il en faut dire autant de la ſouſtraction, ou d'une différence.

512. Puiſque l'Imaginaire a une grandeur (510), on peut concevoir qu'il croiſſe ou décroiſſe. Ainſi x étant une grandeur variable, $\sqrt[2]{-x}$ formera une Suite croiſſante de

grandeurs imaginaires, si x croît, & au contraire, si x décroît.

513. x peut même croître jusqu'à l'infini, ou décroître jusqu'à zero, ce qui donnera $\sqrt[2]{-\infty}$, ou $\sqrt[2]{-0}$, grandeurs encore imaginaires.

514. On peut même concevoir qu'à l'exemple de la Suite 2, 1, 0, —1, —2, &c. $\sqrt[2]{-0}$ étant posé pour terme commun, il y aura d'un côté des $\sqrt[2]{-x}$ positives décroissantes, qui y aboutiront, & de l'autre des $-\sqrt[2]{-x}$ négatives & croissantes, qui en partiront, de sorte que les grandeurs imaginaires qui ne sont telles que par l'impossibilité de l'être spécifique qu'elles renferment, prendront elles-mêmes un être spécifique, mais cela ne laisse pas d'être aisé à concevoir.

515. On a pris souvent dans cette Section pour exemple de grandeurs spécifiquement opposées, des Fonds & des Dettes, à cause de la briéveté de l'expression. Mais on voit assez que les mêmes choses s'appliqueroient aux élevations, ou abaissemens du Soleil par rapport à un Terme commun, & comme ces grandeurs n'ont d'autre être spécifique que leur position par rapport à ce Terme, il faut comprendre dans tout ce qui a été dit, les grandeurs qui n'auroient que cette sorte d'être spécifique, & plus généralement encore, toutes celles qui en auroient un, quel qu'il fût.

516. De plus, pour ne considérer que des grandeurs véritablement négatives, nous avons supposé qu'elles eussent le signe — absolu, ou par elles-mêmes, originairement, & sans aucune soustraction, comme des abaissemens du Soleil sous l'Horison, comparés aux élévations. Cependant si de 2 degrés d'élévation du Soleil, j'en ôtois 3, j'aurois —1 qui seroit un degré d'abaissement, & ce —1 me seroit venu par une soustraction. Mais il est clair que cette soustraction n'est pas nécessaire pour donner à un degré d'abaissement le signe —, & qu'il l'auroit eu par lui-même, & par son opposition spécifique à un degré d'élévation. C'est cela même, c'est-à-dire,

cette souſtraction, non pas néceſſaire, mais poſſible, qui a fait confondre les grandeurs négatives avec les retranchées.

517. De-là il ſuit que — 1 ne ſeroit plus une grandeur véritablement négative, s'il venoit néceſſairement de quelque souſtraction ou opération équivalente, quoiqu'il eût le — abſolu. Ainſi ſi on diviſe 3 par — 3, on a — 1, qui n'eſt plus une grandeur véritablement négative, ou qui renferme dans ſon idée quelque être ſpécifique, & le — abſolu ſignifie ſeulement que cette grandeur vient de la diviſion d'une grandeur poſitive par une négative. Alors — 1 n'eſt plus qu'un pur nombre qui n'eſt que 1, & le — qui ne ſignifie rien, ne doit plus être d'aucune conſidération, à moins que — 1 ne doive entrer dans quelque calcul, auquel cas le — doit être conſervé ; parce que dans le calcul le + & le — ſe traitent différemment, & que — 1 doit porter le caractere du calcul qui l'a produit.

518. Donc pour juger ſi une grandeur qui a le — abſolu eſt véritablement négative, il faut avoir égard & à ſa nature, & au calcul qui peut l'avoir produite.



SECTION VII.

Sur les Suites infinies de Grandeurs quelconques.

519. LORSQUE plusieurs grandeurs consécutives sont telles que chacune est déterminée à être ce qu'elle est par quelque ordre, ou quelque Loi commune à toutes, elles sont une *Suite* ou *Série*. Il est visible que toute Progression est une Suite, mais il y en a une infinité d'autres especes: parce qu'il peut y avoir une infinité d'autres sortes de Loix qui reglent des grandeurs. Ainsi ces nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60, sont une Suite, parce que la Loi commune est que les produits du 1[er] terme par le dernier, du 2[d] par le penultieme, du 3[me] par l'ante-penultieme, &c. sont toujours = 60. Les nombres Naturels sont une Suite, parce que leur Loi est que leurs différences soient la Suite des Unités, ou toujours 1, & en même-temps cette Suite est une progression arithmétique. La Loi des nombres Triangulaires est que leurs différences soient la Suite des nombres Naturels. La Loi des Pyramidaux, que leurs différences soient la Suite des Triangulaires, & toujours ainsi à l'infini d'un ordre de nombres Figurés à l'autre. De même la Loi générale des Polygones est que leurs différences soient des progressions arithmétiques, dont la différence croisse toujours de 1, d'un ordre de Polygones à l'autre. Ainsi les Triangulaires ont les nombres Naturels pour différences, les Quarrés ont les nombres impairs, &c.

Les grandeurs d'une Suite *varient*, lorsqu'elles croissent ou décroissent, & leur *variation* est cette espece de mouvement reglé par la Loi qui les fait croître ou décroître. Elles varient *continuement*, quand elles vont toujours en croissant ou en décroissant, & je suppose, quant à présent, qu'elles ne varient que continuement.

Je n'appelle à present Suite *infinie*, que celle qui a un nombre

nombre des termes $= \infty$, il n'importe quelle en soit la Loi.

Je suppose les Suites infinies formées de termes finis, du moins à leur origine. Ce sont celles qu'il nous importe le plus de connoître, & que toute cette Section aura en vûe.

Je suppose les Suites toujours croissantes, à moins que le contraire ne soit dit, & si elles ne le sont pas, il n'y a qu'à les renverser.

Nous allons considérer les sommes de ces Suites.

520. Il n'y a nulle difficulté sur les sommes des Suites infinies, dont tous les termes sont du même ordre; car ces sommes sont toujours de l'ordre immédiatement supérieur à celui des termes, quel qu'il soit. En voici cependant des Exemples que l'on apporte, parce qu'ils donneront lieu à des remarques particulieres, & auront leur usage dans la suite. *Sommes des Suites infinies qui n'ont des termes que d'un même ordre.*

EXEMPLE I.

521. La Suite $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. Et en général $\frac{n}{n+1}$, n étant successivement tous les nombres naturels, est terminée par $\frac{\infty}{\infty+1} = \frac{\infty}{\infty}$ 1, & par conséquent a une somme de l'ordre de ∞, mais moindre que ∞, puisque tous ses termes, excepté le dernier, sont moindre que 1.

522. Il est bon de remarquer que cette Suite, quoique toujours croissante, & infinie, & composée de termes Finis déterminables, du moins à son origine, ne sort point d'un même ordre, qui est celui du Fini, & même qu'elle est toute comprise dans un très-petit intervalle, qui est celui de $\frac{1}{2}$ à 1. Cela seroit impossible, si toutes ces différences étoient de l'ordre de celles de son origine, c'est-à-dire finies; car une infinité de différences finies, soit égales, soit croissantes, soit décroissantes, feroient une somme infinie, & par conséquent un dernier terme infini. Cette Suite qui a un dernier terme fini, & des différences finies à son origine, n'a donc qu'un nombre fini de ces différences, & un nombre infini de différences infiniment petites, & le dernier terme moins le premier *Suite infinie croissante dans le seul ordre du Fini.*

ou $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ eſt la ſomme de cette infinité totale de différences de ces deux ordres.

523. Deux termes conſécutifs quelconques de cette Suite étant $\frac{n}{n+1}$ & $\frac{n+1}{n+1}$, la différence en général eſt $\frac{1}{nn+3n+2}$ $= \frac{1}{n+1 \times n+1}$. Par exemple, ſi $n = 4$, la différence entre $\frac{4}{5}$ & $\frac{5}{6}$ eſt $\frac{1}{16+12+2} = \frac{1}{30} = \frac{1}{5 \times 6}$. Or il n'y a (522) qu'un nombre fini de $\frac{1}{nn+3n+2}$ finies, & une infinité d'infiniment petites, & d'un autre côté il y a une infinité de valeurs de n finies, puiſqu'il y a dans la Suite naturelle une infinité de nombres finis. Donc $\frac{1}{nn+3n+2}$ devient infiniment petite, lorſque n a encore des valeurs finies, & même lorſqu'il en doit encore avoir une infinité. Or cela ne ſe peut, à moins que n étant fini, nn ne ſoit infini, ce qui revient aux Finis indéterminables, qu'on a déja tant vûs, & les confirme.

524. En ce cas la Formule des différences devient $\frac{1}{nn}$ $= \frac{1}{\infty}$. Et quand $n = \infty$, elle eſt $\frac{1}{\infty^2}$. Donc la Suite propoſée a des différences de trois ordres, du Fini, de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, celles du 1[er] n'étant qu'en nombre fini, mais indéterminable, & celles des deux autres ordres en nombre infini.

EXEMPLE II.

Suite pareillement renfermée dans le Fini, & croiſſante.

525. Si on prend la Suite infinie des puiſſances n^0, n^1, n^2, &c. n^∞ d'un nombre fini quelconque n, & que de chaque terme de cette progreſſion géométrique on en tire la $\sqrt[\infty]{}$, ce qui donnera la nouvelle progreſſion $\div\!\div\, n^{\frac{0}{\infty}} = 1^{\frac{1}{\infty}} = 1$, $n^{\frac{1}{\infty}}$, $n^{\frac{2}{\infty}}$, &c. $n^{\frac{\infty}{\infty}} = n$, il eſt clair que tous ſes termes étant finis, ſa ſomme ſera de l'ordre de ∞.

526. Puisque cette Suite est une progression géométrique, ses différences sont aussi en progression, & en même progression. Donc les termes de la progression principale étant croissans, & tous du même ordre, les différences de ces termes sont croissantes, & toutes du même ordre. Et puisque la somme de ces différences est $n - 1$, c'est-à-dire 1, si $n = 2$, 2, si $n = 3$, &c. cette somme ne peut être que celle d'une infinité de différences toutes de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, mais en même-tems, parce que les différences de ces suites sont croissantes, & que par conséquent la différence de $n^{\frac{3}{\infty}}$ à $n^{\frac{2}{\infty}}$, par ex. est plus grande que celle de $n^{\frac{2}{\infty}}$ à $n^{\frac{1}{\infty}}$, $n^{\frac{3}{\infty}}$ infiniment peu différent de $n^{\frac{2}{\infty}}$, en est plus différent que $n^{\frac{2}{\infty}}$ de $n^{\frac{1}{\infty}}$, & à plus forte raison $n^{\frac{3}{\infty}} = 1$ est plus différent de 1. que $n^{\frac{2}{\infty}} = 1$ n'en est différent, ce qui revient à l'art. 263.

527. Si on donne à n les différentes valeurs successives 2, 3, 4, &c. on voit que dans les progressions 1, $2^{\frac{1}{\infty}}$, $2^{\frac{2}{\infty}} = 4^{\frac{1}{\infty}}$, &c. 1, $3^{\frac{1}{\infty}}$, $3^{\frac{2}{\infty}} = 9^{\frac{1}{\infty}}$, &c. 1, $4^{\frac{1}{\infty}}$, $4^{\frac{2}{\infty}} = 16^{\frac{1}{\infty}}$, &c. les différences toujours infiniment petites, & de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ dans chaque progression, sont toujours plus grandes d'une progression à l'autre, & en effet la somme en est toujours plus grande, puisque dans la 1re elle est $2 - 1$, dans la 2de $3 - 1$, dans la 3me $4 - 1$, &c. Donc à mesure que n est plus grand, les différences d'une progression à l'autre sont plus grandes. Donc si enfin $n = \infty$, les différences deviendront infiniment plus grandes qu'elles n'étoient, c'est-à-dire finies. Or alors on a ÷ 1. $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, $\infty^{\frac{2}{\infty}}$, &c. $\infty^{\frac{\infty}{\infty}} = \infty$. Donc la différence de $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ à 1 est finie, comme on l'a toujours trouvée.

528. Quoique cette derniere progreſſion n'appartienne pas à la conſidération préſente, parce qu'elle a des termes de deux ordres, elle y eſt amenée par l'analogie qu'elle a avec toutes les précédentes où n étoit fini, & on y peut remarquer que comme elle a des termes de deux ordres, au lieu que les autres n'en avoient que d'un, auſſi a-t-elle des différences de deux ordres, de Finies, & d'Infinies (310). Il eſt même impoſſible que la progreſſion des différences ait des termes de plus de deux ordres, puiſque la progreſſion principale n'en a que de deux ordres. De plus la progreſſion des différences doit avoir à ſon origine des différences finies (527), & par conſéquent les autres ſeront infinies.

529. La Formule de la ſomme de la progreſſion géométrique donnera pour toutes ces progreſſions, où $a = 1$, m ou le multiplicateur perpétuel $= n^{\frac{1}{\infty}}$, le nombre des termes $= \infty$, la ſomme $\frac{n-1}{n^{\frac{1}{\infty}}-1}$. Par exemple, ſi $n = 2$, c'eſt-à-dire, ſi la progreſſion eſt 1, $2^{\frac{1}{\infty}}$, $2^{\frac{2}{\infty}}$, &c. 2, la ſomme eſt $\frac{1}{2^{\frac{1}{\infty}}-1}$ Or $2^{\frac{1}{\infty}} - 1 = \frac{1}{\infty}$ (351). Donc la ſomme eſt $1 \times \infty = \infty$. Si $n = 3$, la ſomme eſt $\frac{2}{3^{\frac{1}{\infty}}-1} = 2 \times \infty$, & ainſi des autres, d'où il ſuit que les ſommes augmentent toujours par les coëfficiens 1, 2, &c. qui multiplient ∞. Mais il faut prendre garde que dans ces deux exemples, & par conſéquent dans les autres, ∞ affecté des coëfficiens 1, 2, &c. n'eſt pas le même. Car la différence de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ qui eſt entre $3^{\frac{1}{\infty}}$ & 1 eſt plus grande que celle du même ordre qui eſt entre $2^{\frac{1}{\infty}}$ & 1 (351), & par conſéquent elles ne doivent pas être exprimées par le même $\frac{1}{\infty}$, mais la plus grande par $\frac{1}{\propto}$, & l'autre par $\frac{1}{\infty}$, d'où il ſuit que la ſomme de la progreſſion où $n = 2$, étant $1 \times \infty$,

celle de la progreſſion où $n = 3$, ſera $2 \times \infty$, & que ſi ces ſommes croiſſent par les coëfficiens des Infinis qui y entrent, elles décroiſſent par les Infinis mêmes, de ſorte qu'elles ſe tiennent à peu près dans l'égalité, ou du moins ne doivent point ſortir de l'ordre de ∞. Et en effet quand $n = \infty$, la ſomme n'eſt encore que de cet ordre (313).

EXEMPLE III.

530. On a déja vû dans les art. 260, &c. 267, que la ſomme de la Suite $1^{\frac{1}{\infty}} = 1, 2^{\frac{1}{\infty}}, 3^{\frac{1}{\infty}}$, &c. $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, eſt $= \infty$. *Suite pareille.*

Deux de ſes termes conſécutifs quelconques ſont $n^{\frac{1}{\infty}}$ & $\overline{n+1}^{\frac{1}{\infty}}$, n étant ſucceſſivement tous les nombres naturels. La différence des deux 1ers termes 1 & $2^{\frac{1}{\infty}}$ eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ (351), & cette différence doit toujours enſuite aller en décroiſſant, parce que n & $n+1$ dont on tire la $\sqrt[\infty]{}$, different d'autant moins ou approchent d'autant plus de l'égalité, que n eſt plus grand. Donc la différence décroiſſante de $n^{\frac{1}{\infty}}$ & de $\overline{n+1}^{\frac{1}{\infty}}$ tend à devenir de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$. Il eſt clair que comme elle ſuit le décroiſſement du rapport de 1 à n, elle ne doit changer d'ordre & tomber dans l'ordre inférieur, que quand 1 change d'ordre & devient infiniment petit par rapport à n. Or cela arrive dès que n eſt le moindre Infini poſſible, donc alors la différence de $n^{\frac{1}{\infty}}$ & de $\overline{n+1}^{\frac{1}{\infty}}$ devient infiniment petite par rapport à ce qu'elle étoit, ou de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$. Et comme n n'eſt jamais infini que du 1er ordre, la différence ne tombe point au-deſſous de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$.

531. Donc il y a dans cette Suite une infinité de différences de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & une autre infinité beaucoup plus

grande de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, toutes décroiſſantes, dont la ſomme eſt $\infty^{\frac{1}{\infty}} - 1$, eſt finie, comme on l'a toujours trouvée, mais très-petite.

532. Je ſuppoſe les différences continuement croiſſantes, ou décroiſſantes, comme j'ai ſuppoſé les Suites continuement croiſſantes. Il ſuit en général de tout ce qui a été dit, que les Suites originairement formées de termes Finis, ne ſortent point de l'ordre du Fini, ſi elles n'ont que des différences infiniment petites, ſoit croiſſantes, comme celle de l'Ex. 2, ſoit décroiſſantes, comme celle de l'Ex. 3, ou ſi, comme celle de l'Ex. 1, elles n'ont qu'un nombre Fini de différences finies, ſoit croiſſantes, ſoit décroiſſantes, car dans tous ces cas la ſomme des différences ne peut être d'un ordre plus élevé que le Fini, & par conſéquent le dernier terme, qui moins le premier eſt cette ſomme, ne peut être que Fini.

533. Et comme l'art. précédent comprend toutes les manieres poſſibles, dont une infinité de grandeurs peuvent ne faire qu'une ſomme finie, toute Suite qui ne ſort point de l'ordre du Fini eſt dans quelqu'un de ces cas, & réciproquement.

Théorie générale pour l'ordre des ſommes des Suites croiſſantes, qui s'élevent du Fini à un Infini quelconque.

534. Mais quand des Suites infinies s'élevent de 1 à ∞, ou en général à ∞^n, il n'eſt plus vrai que leurs ſommes ſoient toujours de l'ordre ſupérieur à celui de leur dernier terme, & il s'agit de ſavoir de quel ordre elles ſeront.

Une Suite croiſſante ne peut jamais avoir une ſomme moindre, quant à l'ordre & à la grandeur, que lorſque ſon dernier terme ſeul eſt ſa ſomme, & elle n'en peut jamais avoir une plus grande, quant à l'ordre, que quand elle eſt de l'ordre de ∞^{n+1}, mais alors cette ſomme eſt moindre, quant à la grandeur, que ∞^{n+1}, ou, ce qui eſt le même, elle eſt ∞^{n+1} affecté de quelque coëfficient qui le diminue, car pour être ∞^{n+1} ſans coëfficient qui le diminuât, il faudroit que la Suite ne fût formée que d'un nombre ∞ & de ∞^n, ce qui eſt contre la ſuppoſition.

535. Afin qu'une Suite ait la plus grande ſomme poſſible, c'eſt-à-dire, qu'elle l'ait plus grande que toutes les Suites qui auront les mêmes extremes, & le même nombre ∞ de termes, ce qu'on ſouſentendra toujours, il faut que ſa ſomme ſoit ∞^{n+1} affecté d'un coëfficient le plus approchant de 1 qu'il ſoit poſſible, ou qui diminue le moins de grandeur ∞^{n+1}. Pour cela il faut que la Suite ait eu un nombre infini de ∞^n, & le plus grand poſſible, & de plus des Infinis d'ordres inférieurs dans le plus grand nombre infini poſſible, enfin le plus grand nombre poſſible de termes tous utiles à la ſomme. Or cela demande qu'elle ſéjourne infiniment, s'il ſe peut, dans chacun de ſes ordres, ou que du moins elle ſéjourne infiniment dans les derniers qui ſont les principaux pour la ſomme. Ces ſéjours infinis demandent que la Suite croiſſe lentement, ou, ce qui eſt le même, qu'elle n'ait que de petites différences, & de plus, comme les derniers ordres ſont les plus importans pour la ſomme, les différences y doivent être moindres, c'eſt-à-dire, qu'elles doivent être décroiſſantes, & le plus lentement décroiſſantes qu'il ſera poſſible, ſur-tout vers la fin.

536. Il eſt clair & par la raiſon des contraires, & par la nature même de la choſe, que les Suites à différences croiſſantes auront de moindres ſommes, & que celle qui les aura les plus croiſſantes vers la fin aura la moindre ſomme poſſible.

537. Le même ∞^n étant le dernier terme des Suites que l'on compare, & en même-temps la ſomme conſtante de leurs différences qui ſont en même nombre, plus des différences ſont croiſſantes, & par conſéquent plus elles ſont grandes à l'extrémité de la Suite, plus elles ſont petites à ſon origine, & réciproquement. De même plus des différences ſont lentement décroiſſantes vers l'extrémité, plus elles ſont grandes à l'origine, & réciproquement.

538. Les différences croiſſantes ſont de deux eſpeces, elles le ſont ou *abſolument* & en même-temps *relativement* aux termes dont elles ſont différences, ou abſolument, & non relativement.

Soient les quatre nombres 1, 2, 5, 13, dont les différences font 1, 3, 8. Non-feulement elles font abfolument croiffantes, mais elles le font relativement, ou felon une plus grande raifon que les termes, car 3, la 2de de ces différences, a un plus grand rapport à 1 qui en eft la 1re, que 2, le 2^d^ des termes à 1 qui en eft le 1er. De même 8 a un plus grand rapport à 3, que 5 à 2. Ces différences font abfolument & relativement croiffantes.

Soient les quatre termes 1, 3, 6, 10, dont les différences font 2, 3, 4. Il eft vifible qu'elles font croiffantes felon une moindre raifon que les termes. Elles font abfolument croiffantes, & relativement décroiffantes.

539. Puifqu'il y a des différences abfolument croiffantes & relativement décroiffantes, à plus forte raifon y en a-t-il qui foient abfolument conftantes & relativement décroiffantes. Telles font celles de toutes les progreffions arithmétiques croiffantes.

540. De même, puifqu'il y a des différences abfolument croiffantes & relativement décroiffantes, à plus forte raifon y en a-t-il qui foient abfolument croiffantes, & relativement conftantes. Telles font celles de toutes les progreffions géométriques croiffantes, car elles font toujours en même raifon que les termes.

541. Il eft certain que les Suites à différences abfolument décroiffantes auront de plus grandes fommes que celles à différences abfolument & relativement croiffantes, & que ce feront là les deux *genres* extremes de Suites par rapport à la grandeur des fommes. Ainfi entre ces deux genres il s'en placera un moyen qui fera des Suites à différences abfolument croiffantes & relativement décroiffantes. Elles auront des fommes moindres que celles du 1er genre, & plus grandes que celles du 3me. Car par rapport à la grandeur des fommes, le décroiffement relatif des différences doit faire moins d'effet que le décroiffement abfolu, & plus que l'accroiffement abfolu. Il eft aifé de s'imaginer ces trois genres ainfi rangés. 1, Suites à différences abfolument décroiffantes. 2, Suites à différences

différences relativement décroiſſantes, & abſolument croiſſantes. 3, Suites à différences abſolument & relativement croiſſantes. Les ſommes vont toujours diminuant.

542. La derniere Suite du 1er genre eſt celle dont les différences ceſſent d'être abſolument décroiſſantes, & commencent à l'être relativement, & en même temps ne ſont pas encore abſolument croiſſantes comme ſeront celles de la Suite qui viendra après elle. C'eſt donc une progreſſion arithmétique. Elle eſt la derniere du 1er genre, & la 1re du 2^d^, & le paſſage de l'un à l'autre.

543. De même la derniere du 2^d^ genre & la 1re du 3me ceſſera d'avoir des différences relativement décroiſſantes, & ne les aura pas encore relativement croiſſantes, quoiqu'elle les ait abſolument croiſſantes, comme celles du 2^d^ & 3me genre. Elle ne les aura donc ni relativement décroiſſantes, ni relativement croiſſantes, quoiqu'abſolument croiſſantes, & par conſéquent elle les aura abſolument croiſſantes, & relativement conſtantes; & ſera une progreſſion géométrique (540) qui fera le paſſage du 2^d^ genre au 3me.

544. La progreſſion arithmétique & la géométrique ſont chacune le paſſage d'un genre à un autre, parce qu'elles ſont d'une nature unique & ſinguliere entre toutes les Suites, & qu'elles participent toujours également de deux genres conſécutifs, ce qui les met à l'extrémité de l'un & à la tête de l'autre. Par la même raiſon elles doivent faire les autres paſſages qui ſont à faire. Il s'en fait un des ſommes de l'ordre de ∞^{n+1} à des ſommes de l'ordre de ∞^n. Ce paſſage, qui eſt infini, ne doit ſe faire que dans le genre de Suites les plus oppoſées à celles dont les ſommes ſont de l'ordre de ∞^{n+1}. Or ſelon l'arrangement que nous ſuppoſons ici, les plus oppoſées à celles du 1er genre, qui ont certainement des ſommes de l'ordre de ∞^{n+1}, ſont les Suites du 3me genre. Donc ce paſſage ſe fait par une Suite de ce genre, & de plus par la progreſſion géométrique qui en eſt la 1re, c'eſt-à-dire, que

toutes les Suites au deſſus de la progreſſion géométrique ont des ſommes de l'ordre de ∞^{n+1}, & que cette progreſſion & toutes les Suites au deſſous n'ont que des ſommes de l'ordre de ∞^n.

545. Il ſuit de-là que de toutes les Suites qui n'ont des ſommes que de l'ordre de ∞^n, la progreſſion géométrique eſt celle qui a la plus grande ſomme, & qu'après elle les ſommes vont toujours en décroiſſant, juſqu'à une derniere $= \infty^n$, la moindre poſſible.

546. La progreſſion arithmétique eſt auſſi placée dans un paſſage, mais qui n'a rapport qu'à la grandeur de ſommes toutes de l'ordre de ∞^{n+1}. La ſomme de cette progreſſion eſt toujours $\frac{\infty^{n+1}}{2}$, ou, ce qui eſt le même, $\frac{1}{2}$ eſt un coëfficient conſtant qui affecte la ſomme de toute progreſſion arithmétique compriſe entre 1 & ∞^n, ce qu'il eſt très-aiſé de voir. Toute Suite qui ſera au deſſus d'elle, aura le ∞^{n+1} de ſa ſomme affecté d'un coëfficient plus grand que $\frac{1}{2}$, mais toujours moindre que 1, & toute Suite au deſſous de la progreſſion arithmétique & au deſſus de la géométrique aura le ∞^{n+1} de ſa ſomme, affecté d'un coëfficient moindre que $\frac{1}{2}$.

547. Pour ſavoir ſi une Suite a une ſomme de l'ordre de ∞^n ou de ∞^{n+1}, il ne faut donc que ſavoir ſi elle eſt au deſſous ou au deſſus de la progreſſion géométrique, & ſi elle eſt au deſſous, on ſait que ſa ſomme de l'ordre de ∞^n eſt moindre que celle de cette progreſſion (544). Si elle eſt au deſſus, on ſait que ſa ſomme de l'ordre de ∞^{n+1} eſt plus grande ou moindre que $\frac{\infty^{n+1}}{2}$ ſelon que la Suite eſt au deſſus ou au deſſous de la progreſſion arithmétique. Il ne s'agit donc que de juger quelle eſt la ſituation d'une Suite donnée à l'égard de l'arithmétique & de la géométrique correſpondantes, que l'on aura toujours par les Regles connues. C'eſt ce

que nous allons faire, en donnant à n, exposant de ∞^n, ses différentes valeurs qui étoient demeurées indéterminées.

Nous avons toujours supposé que ∞^n étoit sans coëfficient, c'est-à-dire, qu'il n'étoit ni $m\infty^n$, ni $\frac{\infty^n}{m}$. Cependant il est certain que des Suites peuvent s'élever à ∞^n ainsi affecté, mais ce coëfficient devant être fini, puisqu'autrement ∞^n changeroit d'ordre, il est clair que cela ne change rien à l'ordre des sommes, & que pour leur grandeur, il sera aisé d'y avoir égard. Mais il va être question principalement de l'ordre des sommes.

548. Comme les Suites que la Géométrie considere ne sont que celles qui sont originairement formées de termes Finis déterminables, & que si nous en avons considéré d'autres, ce n'a été que pour en venir à celles-là, nous allons y réduire toute cette Théorie, qui n'étoit que trop générale. *Ordre des sommes des Suites comprises entre 1 & ∞.*

Lorsqu'une Suite est comprise entre 1 & ∞, on a déja les deux progressions *A* & *G* que l'on a tant vues, auxquelles on la comparera. *A* est originairement toute formée de termes Finis déterminables, & *G* de termes Finis non déterminables : car quoique $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, $\infty^{\frac{2}{\infty}}$, &c. soient finis, & aient entr'eux des différences finies (527 & 528), on ne peut connoître leur valeur précise, parce que *G* n'ayant une somme que de l'ordre de ∞, & ses différences vers son extrémité fort croissantes, quoique relativement constantes, elle a les différences de son origine si petites, que la premiere qui est $\infty^{\frac{1}{\infty}} - 1$, est indéterminable en petitesse (357), ce qui emporte que les suivantes soient de même nature. Donc les Suites qui seront au dessus de *G*, & qui par conséquent auront des sommes de l'ordre de ∞^2, auront à leur origine des différences finies plus grandes que des indéterminables en petitesse, donc ces différences seront déterminables, & les termes aussi dont elles seront différences, & réciproquement les Suites comprises entre 1 & ∞, & originairement

formées de termes Finis déterminables feront au deffus de G, & auront des fommes de l'ordre de ∞^2.

549. Et comme les Suites au deffus de G peuvent être tant au deffus qu'au deffous de A, c'eft-à-dire, avoir des différences ou décroiffantes, ou croiffantes, il fuit que pourvu qu'elles foient originairement formées de termes Finis déterminables, elles ont toutes des fommes de l'ordre de ∞^2.

550. Il peut y avoir au deffus de A quelque Suite à différences abfolument décroiffantes, telle que feroit $\frac{nn+2n}{n+1}$, n étant fucceffivement tous les nombres naturels, de forte que pour $n = 1$, on auroit $\frac{3}{2}$, 1er terme, pour $n = 2$, $\frac{8}{3}$, enfuite $\frac{15}{4}$, $\frac{24}{5}$, &c. & la Suite, quoique commençant par un terme un peu plus grand que 1, fe termineroit comme A par ∞, car on auroit $\frac{nn+2n}{n+1} = \frac{\infty^2+2\infty}{\infty+1} = \frac{\infty^2}{\infty} = \infty$.
L'expreffion générale de la différence feroit $\frac{n^2+3n+3}{n^2+3n+2}$, qui donneroit pour les différences confécutives à l'origine de la Suite, $\frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$, $\frac{13}{12} = 1\frac{1}{12}$, $\frac{21}{20} = 1\frac{1}{20}$, &c. différences décroiffantes. Il femble donc que la fomme devroit être plus grande que celle de A. Mais il faut prendre garde que cette Suite vient bien-tôt à n'avoir que la même différence que A, car dès que n eft un nombre naturel fi grand, qu'étant quarré il devient infini, $\frac{n^2+3n+3}{n^2+3n+2}$ fe réduit à $\frac{n^2}{n^2} = 1$. Or afin que les Suites aient de plus grandes fommes en vertu de leurs différences abfolument décroiffantes, il faut, comme on a vû, que ces différences abfolument décroiffantes, le foient jufqu'au bout, parce que c'eft principalement à l'extrémité qu'il en réfulte un plus grand nombre de grands termes & de l'ordre fupérieur. Ici il eft vifible que les grandeurs $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{20}$, &c. dont les différences de cette Suite excedent 1, ne peuvent faire qu'une fomme finie, parce qu'elles ne regnent que dans une étendue finie, ou jufqu'aux Finis indéterminables. De plus cette fomme ne peut être que fort petite, & elle difparoît devant la fomme infinie des Unités.

551. Par le même raisonnement, mais renversé, si l'on fait la Suite $\frac{n^2+1}{n+1}$ qui sera $1, \frac{5}{3}, \frac{10}{4}, \frac{17}{5}$, &c. terminée par ∞, & dont les différences à l'origine seront $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{9}{10}$, &c. & par conséquent croissantes, elle sera, si l'on veut, au dessous de *A*, mais elle n'en aura pas une moindre somme, car $\frac{n^2+n-1}{n^2+n}$, expression générale de la différence, deviendra $=1$ dès les premiers Finis indéterminables.

552. *A* est la seule Suite originairement formée de nombres entiers déterminables, comprise entre 1 & ∞, & nulle autre pareille, quoique fractionnaire, ne peut avoir une plus grande, ou une moindre somme, de sorte qu'il n'y a proprement aucune Suite pareille, qui soit au dessus, ni au dessous de *A*.

553. Il n'en va pas de même de *G*, qui lui est toujours opposée, & pour voir qu'il y a quelque Suite au dessous de *G*, & dont la somme est moindre, il n'y a qu'à se souvenir de $A^{\frac{a}{\infty}}$ des art. 292 & 293, qui est $1^{\frac{1}{\infty}}=1$, $2^{\frac{2}{\infty}}$, $3^{\frac{3}{\infty}}$ &c. $\infty^{\frac{\infty}{\infty}}=\infty$. Les différences de son origine sont infiniment petites (350 & 351) & fort croissantes, puisqu'elles commencent par $\frac{1}{\infty}$, & font une somme $=\infty$. De plus elles sont, selon que le demande la Théorie présente, croissantes selon une plus grande raison que les termes, car les termes de l'origine, qui sont finis, ne prennent des accroissemens que de l'ordre qui leur est inférieur, & les différences en prennent de leur ordre. Aussi la somme de $A^{\frac{a}{\infty}}$ est-elle moindre que celle de *G*, ce qu'on peut voir ainsi.

$\infty^{\frac{1}{\infty}}$, 2d terme de *G*, est plus grand que $2^{\frac{2}{\infty}}=4^{\frac{1}{\infty}}$, 2d terme de $A^{\frac{a}{\infty}}$, ce qui est clair de soi-même, & de plus $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ differe finiment de 1, & $4^{\frac{1}{\infty}}$ infiniment peu. De

même $\infty^{\frac{2}{\infty}} > 3^{\frac{3}{\infty}}$, &c. Enfin le penultieme terme de G eſt $\infty^{\frac{\infty - 1}{\infty}}$, car le dernier terme ∞ eſt à ce penultieme $:: = ^{\frac{1}{\infty}} . 1$, ce qui donne pour ce penultieme $\frac{\infty}{\infty^{\frac{1}{\infty}}} = \infty^{\frac{\infty - 1}{\infty}}$. Le penultieme terme de $A^{\frac{a}{\infty}}$ eſt $\infty - 1^{\frac{\infty - 1}{\infty}}$; donc il eſt moindre que le penultieme de G, ou tout au plus égal. Donc juſque-là tous les termes moyens de $A^{\frac{a}{\infty}}$ ſont moindres que ceux de G, donc la ſomme de $A^{\frac{a}{\infty}}$ moindre que celle de G.

554. Toutes nos connoiſſances exactes & completes ne roulent qu'autour de A, & tout ce qui eſt analogue à G nous échappe pour la plus grande partie.

Ordre des ſommes des Suites compriſes entre 1 & ∞^2.

555. Conſidérons maintenant toutes les Suites poſſibles compriſes entre 1 & ∞^2, & toujours compoſées d'un nombre de termes $= \infty$. Selon la Théorie préſente, il y aura une progreſſion arithmétique qui aura une ſomme de l'ordre de ∞^3, & la plus grande ſomme poſſible entre toutes les Suites à différences croiſſantes; & il y aura au deſſous d'elle, dans cette même eſpece de Suites à différences croiſſantes, une progreſſion géométrique qui n'aura une ſomme que de l'ordre de ∞^2, mais la plus grande de toutes celles de cet ordre.

La progreſſion arithmétique eſt $\div$ 1. $1 + \infty = \infty$. 2∞. 3∞, &c. $\infty \times \infty = \infty^2$. La géométrique eſt $\div\!\div$ 1. $\infty^{\frac{2}{\infty}} = \infty^{\frac{2 \times 1}{\infty}} . \infty^{\frac{2 \times 2}{\infty}} . \infty^{\frac{2 \times 3}{\infty}}$, &c. $\infty^{\frac{2\infty}{\infty}} = \infty^2$. La ſomme de l'arithmétique eſt $\frac{\infty^3}{2}$, & celle de la géométrique $\frac{\infty^2}{\infty^{\frac{2}{\infty}} - 1}$.

Puiſque $\infty^{\frac{1}{\infty}} = 1 + \frac{1}{x}$, x étant un Fini indéterminable

en grandeur (357), on a $\infty^{\frac{2}{\infty}} = \frac{xx+2x+1}{xx}$, & $\infty^{\frac{2}{\infty}} - 1 = \frac{2x+1}{xx}$. Donc $\frac{\infty^2}{\infty^{\frac{2}{\infty}} - 1} = \frac{xx\,\infty^2}{2x+1} = \frac{x\,\infty^2}{2}$ à très-peu près. Donc cette ſomme n'eſt que de l'ordre de ∞^3.

556. En même temps $\infty^{\frac{2}{\infty}} - 1$, premiere différence de la progreſſion géométrique, eſt un Fini indéterminable en petiteſſe, dont le quarré $1 - 2\infty^{\frac{2}{\infty}} + \infty^{\frac{4}{\infty}}$ eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$. Car en procédant comme dans l'art. 357, on trouvera que $2\infty^{\frac{2}{\infty}} - \infty^{\frac{4}{\infty}} = \overline{1+\frac{1}{x}}^{2} \times 2 - \overline{1+\frac{1}{x}}^{4}$ eſt $= 1 - \frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^3} - \frac{1}{x^4} = 1 - \frac{4}{x^2}$, car $\frac{1}{x^4}$ diſparoît devant $\frac{4}{x^2}$, puiſque x^4 eſt x^2 infini du 1er ordre multiplié par lui-même, & $\frac{4}{x^3}$ où x^3 eſt x^2 infini multiplié par x fini, eſt quelque Infiniment petit radical moyen entre $\frac{1}{\infty}$ & $\frac{1}{\infty^2}$, & qui diſparoît devant $\frac{1}{\infty}$. Donc $1 - 2\infty^{\frac{2}{\infty}} + \infty^{\frac{4}{\infty}} = 1 - 1 + \frac{4}{x^2} = \frac{4}{x^2} = \frac{4}{\infty}$.

557. S'il y a des Suites qui aient dans l'ordre de ∞^3, de plus grandes ſommes que la progreſſion arithmétique, compriſe entre 1 & ∞^2, car elles ne peuvent jamais avoir des ſommes d'un ordre plus élevé, elles ſeront au deſſus de cette progreſſion arithmétique, & auront des différences décroiſſantes, & par conſéquent de plus grandes différences à leur origine que cette progreſſion, dont la différence conſtante eſt ∞. Elles ne ſeroient donc pas originairement formées de termes Finis déterminables. Donc toutes celles qui ſeront originairement formées de termes de cette nature, ſeront au deſſous de la progreſſion arithmétique. En même temps elles ſeront au deſſus de la géométrique, dont les différences de l'origine ſont Finies indéterminables en petiteſſe,

puiſque $\infty^{\frac{2}{\infty}} - 1$, premiere différence de cette progreſſion (556), eſt indéterminable en petiteſſe. Donc toutes les Suites compriſes entre 1 & ∞^2, & originairement formées de termes Finis déterminables, ont des ſommes de l'ordre de ∞^3, mais moindres que celle de la progreſſion arithmétique.

558. En effet, on a vu que A^2, qui eſt 1, 4, 9, 16, &c. ∞^2, a une ſomme qui eſt ∞^3 diviſé par un plus grand nombre que 2 (212). Or la ſomme de la progreſſion arithmétique eſt $\frac{\infty^3}{2}$. On peut remarquer pour confirmation de cette Théorie, que les différences de A^2, qui ſont les nombres impairs, 3, 5, 7, &c. ſont croiſſantes ſelon une moindre raiſon que les termes, ce qui la place entre la progreſſion arithmétique & la géométrique.

559. Quoique la progreſſion arithmétique n'ait, horſmis ſon 1er terme, que des Infinis, qui par conſéquent ſont tous inexprimables ou indéterminables, les rapports de ces Infinis, du moins à l'origine, ſont tous Finis & exprimables, ou déterminables, & au contraire la progreſſion géométrique n'a que des termes tous inexprimables & indéterminables, lors même qu'ils ſont Finis, & dont les rapports le ſont pareillement. Cela met encore une différence d'eſpece entre les deux progreſſions, & de-là vient que les Suites originairement formées de termes Finis déterminables n'ont d'analogie ou d'affinité qu'avec les progreſſions arithmétiques correſpondantes, c'eſt-à-dire, compriſes entre les mêmes extremes, & compoſées du même nombre de termes, & non avec les géométriques pareillement correſpondantes.

560. La ſomme de la progreſſion géométrique compriſe entre 1 & ∞, étant $x\infty$, & celle de la progreſſion compriſe entre 1 & ∞^2, étant $x\infty^2$ diviſé par 2, ou par un nombre de très-peu plus grand (555), celle de la 2de n'eſt pas tout-à-fait une moitié de ſon Infini, au lieu que celle de la 1re eſt ſon Infini entier.

Ordre des 561. Il en ira de même des Suites compriſes entre 1 & ∞^3.

∞^3. La différence constante de la progression arithmétique sera ∞^2, le multiplicateur perpétuel de la géométrique $\infty^{\frac{3}{\infty}}$, la somme de l'arithmétique $\frac{\infty^4}{2}$, & celle de la géométrique $\frac{\infty^3}{\infty^{\frac{3}{\infty}}-1}$, d'où l'on voit d'abord que la somme de la 1re étant toujours $\frac{1}{2}$ de son Infini, celle de la 2de sera toujours une moindre partie du sien, car $\infty^{\frac{3}{\infty}} - 1 > \infty^{\frac{2}{\infty}} - 1$, ce qui donnera pour la somme de la géométrique $x\ \infty^3$ divisé par quelque nombre plus grand que 2. On voit aussi, par tout ce qui a été dit, que les Suites originairement formées de termes Finis déterminables, comme A^3 (214), seront entre ces deux progressions, & auront des sommes de l'ordre de ∞^4, mais moindres que $\frac{\infty^4}{2}$, selon ce qui a été dit de A^3 (223). *sommes des Suites comprises entre 1 & ∞3.*

562. Il est assez clair, & on peut s'en assurer encore plus en détail, que ce sera toujours la même chose de toutes les Suites comprises entre 1 & ∞^n, n étant fini. Donc toutes les Suites originairement formées de termes Finis déterminables, & comprises entre 1 ∞^n, n étant fini, auront des sommes de l'ordre de ∞^{n+1}. *Ordre des sommes des Suites comprises entre 1 & ∞n.*

563. La différence constante, & par conséquent celle des deux 1ers termes de la progression arithmétique quelconque, comprise entre 1 & ∞^n, est ∞^{n-1}, ce qui subsiste, lors même que $n = 1$, car alors $\infty^{n-1} = \infty^{1-1} = \infty^0 = 1$. Et dès que $n = 2$, la différence de la progression arithmétique est $= \infty$. La différence des deux 1ers termes de la progression géométrique correspondante est $\infty^{\frac{n}{\infty}} - 1$. Or on a trouvé (310) qu'en donnant à n toutes ses différentes valeurs successives, il y a une infinité de $\infty^{\frac{n}{\infty}}$ finis, & à

plus forte raison, de $\infty^{\frac{n}{\infty}} - 1$. De plus le premier des $\infty^{\frac{n}{\infty}} - 1$ est $\infty^{\frac{1}{\infty}} - 1$, quantité finie, mais indéterminable en petitesse, ce qui détermine l'accroissement des $\infty^{\frac{n}{\infty}} - 1$ à être fort lent. Enfin, on a vû (285) que $3^{\frac{n}{3}} > \infty^{\frac{n}{\infty}}$, ce qui tient toujours les $\infty^{\frac{n}{\infty}}$ dans une assez grande petitesse, & encore plus les $\infty^{\frac{n}{\infty}} - 1$; car si, par ex. $n = 3$, on a $3 > \infty^{\frac{3}{\infty}}$, si $n = 6$, $9 > \infty^{\frac{6}{\infty}}$, &c. & par conséquent $2 > \infty^{\frac{3}{\infty}} - 1$, $8 > \infty^{\frac{6}{\infty}} - 1$, &c. D'un autre côté les Suites originairement formées de termes Finis déterminables ont les différences de leurs deux 1ers termes beaucoup plus grandes que ces $\infty^{\frac{n}{\infty}} - 1$; par ex. si $n = 3$, la différence des deux 1ers termes de A^3 est 7, beaucoup plus grand que 2, si $n = 6$, la différence des deux 1ers termes de A^6 est 63, beaucoup plus grand que 8, &c. Or les Suites comprises entre 1 & ∞^n, étant rangées selon la grandeur de leurs sommes décroissantes, & par conséquent les différences d'une Suite étant plus croissantes que celles de la précédente, ou, ce qui revient au même, les différences de l'origine étant plus petites dans une Suite que dans la précédente, il suit de tout ce qui vient d'être dit, que dès que $n = 2$, les différences de l'origine des Suites originairement formées de termes Finis déterminables, sont plus petites que celles de la progression arithmétique, & plus grandes que celles de la progression géométrique, que par conséquent ces Suites sont placées entre ces deux progressions, & que cela dure au moins tant que n est fini. Mais quand $n = \infty$, la différence de la progression arithmétique est $\infty^{\infty - 1}$, & la 1re différence de la géométrique est $\infty^{\frac{\infty}{\infty}} - 1 = \infty$, & par conséquent

il n'y a aucune Suite à différences finies, ou originairement formée de termes Finis déterminables, qui puisse se placer entre ces deux progressions. Donc s'il y a quelque Suite de cette nature comprise entre 1 & ∞^{∞}, elle est au-dessous de la progression géométrique.

564. La progression arithmétique est $\div$ 1. $1 + \infty^{\infty - 1} = \infty^{\infty - 1}$. $2\infty^{\infty - 1}$, &c. $\infty \times \infty^{\infty - 1} = \infty^{\infty}$, dont la somme est $\frac{\infty^{\infty + 1}}{2}$, & la géométrique est $\div\div$ 1. ∞. ∞^2, &c. ∞^{∞}, dont la somme est ∞^{∞}. Entre les mêmes extremes est A^a originairement formée de termes Finis déterminables, qui est 1^1, 2^2, 3^3, &c. ∞^{∞} (282). Selon l'art. précédent, A^a est au-dessous de la progression géométrique, & par conséquent elle devroit avoir une moindre somme, cependant elle a précisément la même (283). Mais cela vient de ce que la progression géométrique ayant la moindre somme possible, puisque ce n'est que son dernier terme, A^a n'en peut jamais avoir une moindre. En ce cas-là le dernier terme seul faisant la somme, & étant le même en deux Suites, tous les termes qui le précedent dans l'une & dans l'autre, quelque différens qu'ils soient, ne sont plus à considérer, ainsi qu'ils l'étoient lorsque *n* étoit fini. Et ce qui marque bien que si ce n'étoit cela, la somme de A^a seroit moindre que celle de la progression géométrique, c'est qu'en prenant un nombre fini quelconque de termes de A^a, on en trouvera la somme moindre, & même infiniment moindre que celle d'un même nombre de termes de la progression, ou plutôt que le dernier de ce nombre de termes qui fera seul la somme. Ainsi 32, somme des trois 1ers termes de A^a, est infiniment moindre que ∞^2, somme des trois 1ers termes, ou 3me terme de la progression.

565. On voit par-là que les sommes de Suites comprises entre 1 & ∞^n, & originairement formées de termes Finis

déterminables, se sont toujours d'autant plus approchées de la somme de la progression géométrique que n fini a été plus grand, jusqu'à ce qu'enfin n étant $= \infty$, ces sommes soient devenues égales à celle de cette progression. En effet on a vû dans les A^n qu'à mesure que n étoit plus grand, les sommes étoient ∞^{n+1} divisé par un plus grand nombre (227), ce qui approchoit toujours de plus en plus ∞^{n+1} de ∞^n.

566. D'un autre côté les sommes des progressions géométriques comprises entre 1 & ∞^n, ayant été pour $n = 1$, $x\infty$, pour $n = 2$, $\frac{x\infty^2}{2}$, & enfin pour $n = \infty$, ∞^∞, on voit qu'elles ont toujours dû être le dernier terme de la progression multiplié par un même nombre, & divisé d'abord par un nombre beaucoup plus petit que ce multiplicateur, mais croissant, de sorte que le diviseur est enfin devenu égal au multiplicateur. Ainsi ces sommes ont toujours été des Infinis plus élevés, mais décroissans chacun dans son ordre. Tous ces décroissemens de sommes dans leurs ordres viennent, selon ce qui a été dit ici assez souvent, de ce qu'il y a eu toujours moins de termes utiles à la somme.

567. Entre 1 & ∞^∞ est encore la Suite A^∞, 1^∞, 2^∞, 3^∞, &c. ∞^∞ (228). Il saute aux yeux que les différences de son origine qui sont les termes mêmes, 2^∞, 3^∞, &c. étant plus grandes que ∞, ∞^2, &c. (235, 239), différences correspondantes de la progression géométrique, A^∞ doit être au-dessus de cette progression, & sa somme plus grande, & c'est aussi ce qu'on a trouvé (245).

Ordre des sommes des Suites comprises entre 1 & $\infty^{\frac{1}{n}}$.

268. Soient maintenant les Suites infinies comprises entre 1 & $\infty^{\frac{1}{n}}$. Si $n = 2$, ce qui est ici sa moindre valeur possible, on a la ÷ 1. $1 + \frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$. $1 + \frac{2}{\infty^{\frac{1}{2}}}$. $1 + \frac{3}{\infty^{\frac{1}{2}}}$; &c. $1 + \frac{\infty}{\infty^{\frac{1}{2}}} = 1 + \infty^{\frac{1}{2}} = \infty^{\frac{1}{2}}$. Et la ∺ 1. $\infty^{\frac{1}{2\infty}}$.

$\infty^{\frac{2}{2\infty}} = \infty^{\frac{1}{\infty}} . \infty^{\frac{3}{2\infty}}$, &c. $\infty^{\frac{\infty}{2\infty}} = \infty^{\frac{1}{2}}$. La somme de la 1re est $\frac{\infty^{\frac{3}{2}}}{2}$, & la somme de la 2de $\frac{\infty^{\frac{1}{3}}}{\infty^{\frac{1}{2\infty}} - 1}$. La somme de la 1re est de l'ordre le plus élevé qu'elle puisse être ; car elle est de l'ordre de $\infty^{\frac{3}{2}} = \infty^{\frac{1}{2}+1}$; or nulle Suite ne peut avoir une somme d'un ordre plus élevé que celui qui est immédiatement supérieur à son dernier terme.

La différence constante de la progression arithmétique est infiniment petite, puisqu'elle est $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$, & la 1re différence de la progression géométrique est encore plus petite par la nature de ces deux progressions. Donc il n'y a entr'elles aucune Suite originairement formée de termes Finis déterminables, & qui par conséquent auroit des différences finies. Donc toute Suite de cette nature est au-dessus de la progression arithmétique, & a une plus grande somme. Or elle n'en peut avoir une d'un ordre plus élevé, donc elle l'a seulement plus grande dans l'ordre de $\infty^{\frac{3}{2}}$.

En effet on a trouvé (258) que $A^{\frac{1}{2}}$, qui est $1^{\frac{1}{2}}$, $2^{\frac{1}{2}}$, &c. $\infty^{\frac{1}{2}}$, & qui a des différences finies, a une somme plus grande que $\frac{\infty^{\frac{3}{2}}}{2}$. Aussi $A^{\frac{1}{2}}$ a-t-elle des différences absolument décroissantes, comme l'on verra aisément, car les $\surd$ commensurables consécutives, telles que $\surd 1$, $\surd 4$, $\surd 9$, &c. n'ayant toutes que 1 pour différence, cet intervalle est toujours partagé en un plus grand nombre de parties par les $\surd$ incommensurables intermédiaires.

569. Il en ira de même des Suites comprises entre 1 & $\infty^{\frac{1}{3}}$, dont la ÷ est 1. $1 + \frac{1}{\infty^{\frac{2}{3}}}$. $1 + \frac{2}{\infty^{\frac{2}{3}}}$, &c. $1 + \frac{\infty}{\infty^{\frac{2}{3}}} = \infty^{\frac{1}{3}}$. Et la ∺ est 1. $\infty^{\frac{1}{3\infty}}$. $\infty^{\frac{2}{3\infty}}$, &c. $\infty^{\frac{\infty}{3\infty}}$

$= \infty^{\frac{1}{3}}$. La ſomme de la 1re eſt $\frac{\infty^{\frac{4}{3}}}{2}$, & celle de la 2^de^ $\frac{\infty^{\frac{1}{3}}}{\infty^{\frac{1}{3\infty}}-1}$. Il eſt aiſé de voir que la différence de la progreſſion arithmétique étant infiniment petite, & même infiniment plus petite que celle de la progreſſion arithmétique compriſe entre 1 & $\infty^{\frac{1}{2}}$, & la 1re différence de la progreſſion géométrique encore plus petite que celle de l'arithmétique, il n'y aura point de Suites telles que $A^{\frac{1}{3}}$ (259) originairement formées de termes Finis déterminables, qui n'aient une plus grande ſomme que $\frac{\infty^{\frac{4}{3}}}{2}$, quoique du même ordre.

570. Il en ira toujours de même, & à plus forte raiſon des Suites originairement formées de termes Finis déterminables, compriſes entre 1 & $\infty^{\frac{1}{n}}$, à meſure que n croîtra, & tant qu'il ſera fini. Donc toutes ces Suites ont des ſommes de l'ordre de $\infty^{\frac{1}{n}+1} = \infty^{\frac{n+1}{n}}$.

On pourroit ſuivre cette Théorie juſqu'à $n = \infty$, ce qui feroit voir l'analogie des Suites décroiſſantes depuis celles qui feroient compriſes entre 1 & $\infty^{\frac{1}{2}}$, juſqu'à celles qui feroient entre 1 & $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, & produiroit quelques remarques particulieres, mais ce feroit une curioſité inutile, quant à preſent.

Ordre des ſommes des Suites compriſes entre 1 & $\infty^{\frac{m}{n}}$ où $m > n$.

571. Il eſt clair que toutes les Suites compriſes entre 1 & $\infty^{\frac{3}{2}}$ ou $\infty^{\frac{4}{3}}$, &c. & en général entre 1 & $\infty^{\frac{m}{n}}$, m étant plus grand que n, ſont de l'eſpece de celles qui ſont entre 1 & ∞^2 ou ∞^3, &c. comme toutes celles qui ſont entre 1 & $\infty^{\frac{2}{3}}$, ou $\infty^{\frac{3}{4}}$, &c. & en général entre 1 & $\infty^{\frac{n}{m}}$ ſont de l'eſpece de celles qui ſont entre 1 & $\infty^{\frac{1}{2}}$ ou $\infty^{\frac{1}{3}}$, &c.

Donc toutes les Suites originairement formées de termes Finis déterminables, & comprises entre 1 & ∞ élevé à quelque puissance finie que ce soit, parfaite ou imparfaite, & dont les différences sont continuement croissantes ou décroissantes, ont une forme de l'ordre immédiatement supérieur à celui de leur dernier terme, ou de l'ordre de ∞^{n+1}; n étant un nombre fini quelconque entier ou rompu, & ∞^n leur dernier terme.

572. Toutes les $\overset{n}{A}$ dont on a vû dans la Sect. III, que la somme étoit de l'ordre de ∞^{n+1}, n étant fini, sont autant d'exemples de cette Théorie, mais comme elle est devenue plus générale, il sera bon d'en donner encore quelques autres nouveaux. *Application de la Théorie aux nombres Polygones.*

EXEMPLE I.

Il est démontré sur les nombres Polygones que n étant un nombre naturel quelconque,

le n^{me} Triangulaire est . . . . . . $\frac{nn+n}{2}$.

Quarré . . . . nn.

Pentagone . . . . $\frac{3nn-1n}{2}$.

Exagone . . . . $\frac{4nn-2n}{2}$.

Eptagone . . . . $\frac{5nn-3n}{2}$, &c.

D'où il suit que le dernier des Naturels étant ∞,

le dernier des Triangulaires est . . . . $\frac{\infty^2}{2} = \frac{1\infty^2}{2}$.

des Quarrés . . . . $\infty^2 = \frac{2\infty^2}{2}$.

des Pentagones . . . . $\frac{3\infty^2}{2}$.

des Exagones . . . . $\frac{4\infty^2}{2}$.

des Eptagones . . . . $\frac{5\infty^2}{2}$, &c.

Et par conséquent selon la Théorie présente, la somme d'une Suite infinie de Polygones quelconques sera de l'ordre de ∞^3.

En effet, il est démontré dans l'art. 10, de la 2de Edit. de l'*Essai d'Analyse sur les Jeux de Hasard*, que la somme d'un nombre quelconque de nombres Polygones quelconques est $\frac{\overline{n^3 - n \times a}}{6} + \frac{\overline{n^2 + n}}{2}$, en prenant $a = 1$, s'il s'agit des Triangulaires, $a = 2$ pour les quarrés, $a = 3$ pour les Pentagones, &c. & n étant le nombre des termes, dont on cherche la somme.

D'où il suit que si $n = \infty$,

La somme infinie des Triangulaires est . . . $\frac{1 \infty^3}{6}$.

des Quarrés . . . . $\frac{2 \infty^3}{6}$.

des Pentagones . . . . . . $\frac{3 \infty^3}{6}$, &c.

573. Toutes ces sommes sont en progression arithmétique, aussi-bien que les derniers termes des différens ordres consécutifs de Polygones rangés de suite, & même que tous leurs n^{mes} termes, comme il sera aisé de le voir.

574. Les multiplicateurs des sommes, toutes de l'ordre de ∞^3, des Polygones finis, augmentent toujours, leur diviseur demeurant le même, parce qu'à mesure que ces Polygones sont plus grands, les Suites ont un moindre nombre de termes Finis, & un plus grand d'Infinis. Et comme ces Polygones ne passent point ∞^2, ils n'ont des Infinis que de deux ordres, & tous utiles à la somme.

575. Si entre les deux extremes d'une Suite de Polygones finis quelconques, on fait une progression arithmétique d'un même nombre de termes, on trouvera toujours sa somme plus grande que celle de la Suite de Polygones, & même dans le rapport constant de 3 à 2. Aussi les Suites de Polygones ont-elles des différences absolument croissantes, qui ne sont que relativement décroissantes. Et pareillement une progression

ſion géométrique aura toujours une ſomme de l'ordre de ∞^2, ſelon que le demande la Théorie préſente.

EXEMPLE II.

576. On a dans l'art. 126, les derniers termes de toutes les Suites des Nombres Figurés. Or c'eſt une propriété de ces nombres, que le n^{me} terme d'un ordre de Figurés quelconque eſt égal à la ſomme des n premiers termes de l'ordre immédiatement inférieur. Par exemple, 10, 4me terme des Triangulaires, eſt égal à la ſomme des 4 premiers Naturels. *Application aux Figurés.*

Donc n étant $= \infty$,

La ſomme des Triangulaires eſt . . . . . . $\frac{\infty^3}{6}$.

des Pyramidaux . . . . $\frac{\infty^4}{24}$.

des Triang. pyramidaux . . . $\frac{\infty^5}{120}$, &c.

D'où l'on voit que ces ſommes ſont toujours de l'ordre ſupérieur au dernier terme de la Suite.

577. En même temps que d'un ordre de Figurés au ſuivant ces ſommes s'élevent toujours d'un ordre d'Infini, elles ſont de moindres Infinis dans leur ordre. Cela vient 1° de ce que ces Suites terminées par des Infinis toujours d'ordres ſupérieurs, le ſont par de moindres Infinis dans ces ordres : mais 2° elles ont toujours un plus grand nombre de différens ordres, & par conſéquent moins d'Infinis de leur dernier ordre, qui ſont les principaux pour la ſomme, & d'ailleurs elles ont auſſi plus de termes inutiles à la ſomme. C'eſt par cette raiſon que l'Infini de leur ſomme a un plus grand diviſeur que l'Infini, qui eſt leur dernier terme.

578. D'une Suite à l'autre les Poligones ſe terminent toujours à un Infini du même ordre & croiſſant de grandeur, & les Figurés à des Infinis croiſſans d'ordre & décroiſſans de grandeur. Les ſommes ſont de même, & en partie parce que tels ſont les derniers termes : mais de plus les

ſommes des Figurés ſont décroiſſantes de grandeur, parce que le nombre de leurs différens ordres eſt croiſſant.

579. Par la formation des Poligones & des Figurés, les différences des uns & des autres ſont croiſſantes dans chaque Suite, & plus croiſſantes dans une Suite que dans l'inférieure, mais beaucoup plus croiſſante dans une Suite de Figurés que dans une Suite correſpondante de Poligones, excepté la Suite des Triangulaires, qui eſt en même temps Suite de Poligones & de Figurés. Cette conſidération des différences pouſſée plus loin, s'accordera avec tout ce qu'on a établi dans la Théorie générale.

Détermination précise de la somme de toutes les Suites A^n.

580. Il eſt démontré dans l'art. 13 de l'*Analyſe des Jeux de Haſard*, qu'un nombre quelconque de Nombres naturels étant n, la ſomme de ces nombres depuis 1 juſqu'à n incluſivement élevés au quarré eſt .... $\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$.

au cube .... $\frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$.

au quarré-quarré $\frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$, &c.

D'où il ſuit que n étant $= \infty$, la ſomme des nombres Naturels

élevés au quarré eſt .... $\frac{2\infty^3}{6} = \frac{\infty^3}{3}$.

au cube .... $\frac{\infty^4}{4}$.

à la 4me puiſſance ...... $\frac{6\infty^5}{30} = \frac{\infty^5}{5}$.

à la 5me .... $\frac{\infty^6}{6}$, &c.

Et en général n étant une puiſſance parfaite, la ſomme des nombres Naturels élevés à n eſt $\frac{\infty^{n+1}}{n+1}$, ce qui donne, outre l'ordre que l'on avoit déja, une valeur préciſe que l'on n'avoit pas.

En attendant cette détermination préciſe, on avoit prouvé *à priori*, dans les art. 212, 223, 226, 227, que la ſomme

de A^2 étoit une partie de son Infini moindre que $\frac{1}{2}$, & en effet elle en est $\frac{1}{3}$; que celle de A^3 étoit une partie de son Infini moindre que $\frac{1}{3}$, & en effet elle en est $\frac{1}{4}$, &c.

581. La somme des nombres Naturels non élevés est aussi comprise dans la Formule $\frac{\infty^{n+1}}{n+1}$, car alors étant élevés à 1, leur somme $\frac{\infty^2}{2} = \frac{\infty^{1+1}}{1+1}$. Et même la somme des mêmes nombres élevés à 0 y est comprise aussi, car elle est $\frac{\infty^{0+1}}{0+1} = \frac{\infty^1}{1} = \infty$, somme des Unités. Et tous les nombres naturels ne sont alors que des Unités.

582. La somme de toute A^n où n est un entier, étant donc $\frac{\infty^{n+1}}{n+1}$, il s'agit de savoir si cela aura encore lieu, quand n sera une fraction ou $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire, si la somme de $A^{\frac{1}{n}}$ sera $\frac{\infty^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} = \frac{n\infty^{\frac{n+1}{n}}}{n+1}$. *Détermination de la somme des* $A^{\frac{1}{n}}$, *& en général des* $A^{\frac{n}{m}}$, *ou* $A^{\frac{m}{n}}$.

En donnant à n, dénominateur de $\frac{1}{n}$, ses deux valeurs extremes 1 & ∞, la premiere des $A^{\frac{1}{n}}$ est $A^{\frac{1}{1}} = A$, dont la somme est $\frac{\infty^2}{2} = \frac{1\infty^{\frac{1+1}{1}}}{1+1}$. Et la derniere des $A^{\frac{1}{n}}$ est $A^{\frac{1}{\infty}}$, dont la somme, si la Formule présente lui convient, sera $\frac{\infty \times \infty^{\frac{\infty+1}{\infty}}}{\infty+1} = \frac{\infty^2}{\infty} = \infty$. Or c'est là effectivement la somme de $A^{\frac{1}{\infty}}$ (267). Donc, puisque la Formule convient aux deux extremes des $A^{\frac{1}{n}}$, elle convient à toutes les moyennes, selon l'art. 123; car on a vû dans toute la Sect. III, que le cours des $A^{\frac{1}{n}}$, comparées les unes aux autres, aussi-

bien que celui des A^n, étoit très-uniforme, & que toutes leurs autres propriétés croissantes ou décroissantes ne faisoient que croître ou décroître toujours des unes aux autres.

583. On peut prouver encore ainsi la même chose. n entier est $= \frac{n}{1}$. Donc la Formule de la somme des A^n est $\infty^{\frac{n+1}{1}}$ divisé par $\frac{n+1}{1}$, ou multiplié par $\frac{1}{n+1}$, c'est-à-dire $\frac{1\infty^{\frac{n+1}{1}}}{n+1}$. Donc quand n sera une vraie fraction, ou $\frac{1}{n}$, il faudra faire la même opération, & on aura $\frac{n\infty^{\frac{n+1}{n}}}{n+1}$.

Et en effet, si n entier est, par ex. 3, il peut être exprimé par $\frac{6}{2}$, & alors on a pour la somme de A^3, $\frac{\infty^{\frac{6}{2}+1}}{\frac{6}{2}+1} = \frac{2\infty^{\frac{8}{2}}}{8} = \frac{\infty^4}{4}$; d'où l'on voit que quand l'Infini, qui exprime l'ordre d'une somme, a un exposant fractionnaire, il faut, pour la valeur précise de la somme, multiplier l'Infini par cet exposant reversé. Or il n'est pas possible que cela soit vrai des exposans fractionnaires qui valent des entiers, & non de ceux qui sont de pures fractions.

584. Donc en général la somme de toute $A^{\frac{n}{m}}$, quelques nombres que soient n & m, est $\frac{m\infty^{\frac{n+m}{m}}}{n+m}$.

Quand $m = 1$, ce sont les sommes des A^n. Quand $n = 1$, ce sont celles des $A^{\frac{1}{m}}$, dont l'exposant est une pure fraction. Hors de ces deux cas $\frac{n}{m}$ est une fraction ou pure ou mixte.

Ainsi la somme de $A^{\frac{1}{2}}$ est $\frac{2\infty^{\frac{3}{2}}}{3}$, celle de $A^{\frac{1}{3}}$ est $\frac{3\infty^{\frac{4}{3}}}{4}$, &c.

celle de $A^{\frac{2}{3}}$ eſt $\frac{3\infty^{\frac{5}{3}}}{5}$, celle de $A^{\frac{3}{2}}$ eſt $\frac{2\infty^{\frac{5}{2}}}{5}$, &c.

On pourra voir combien ces déterminations préciſes s'accordent avec ce qui avoit été trouvé *à priori* ſur ces ſommes dans la Sect. III.

Quand les Suites infinies compriſes entre 1 *&* ∞^{n}, *ou* $\infty^{\frac{m}{n}}$ *ou* $\infty^{\frac{n}{m}}$ *ont un nombre infini ou fini de termes finis.*

585. Il ne ſuffit pas de ſavoir de quel ordre ſont les ſommes des Suites originairement formées de termes Finis déterminables, & compriſes entre 1 & ∞^{n}, ce qui fait voir en même temps ſi les Infinis de leur dernier ordre ſont en nombre fini ou infini; il eſt important de ſavoir auſſi quand le nombre de leurs termes finis eſt fini ou infini.

1 & ∞ étant poſés pour extremes, entre leſquels ſont compriſes toutes les Suites poſſibles qui les auront pour premier & dernier terme, les deux Suites dont la nature eſt la plus oppoſée qu'il ſe puiſſe, ſur-tout à l'égard du nombre des termes des deux différens ordres que toutes ces Suites contiennent, ſont *A* & *G*, que l'on a tant vûes. Car *A* ayant une infinité de termes tant Finis qu'Infinis, & une plus grande infinité d'Infinis, *G* n'en a une infinité que de Finis, & un nombre ſeulement fini d'Infinis, ce qui eſt la plus grande oppoſition poſſible. Donc ce en quoi elles conviennent à cet égard doit être bien eſſentiel à toutes les Suites compriſes entre 1 & ∞. Or *A* & *G* conviennent en ce qu'elles ont un nombre infini de termes finis; donc toutes les Suites compriſes entre 1 & ∞ en ont auſſi un nombre infini, & cela, comme on voit, ſoit qu'elles ſoient originairement formées de termes Finis déterminables, ou non.

586. Cela ſera encore vrai, quand les Suites ſe termineront par un Infini plus grand que ∞, mais du même ordre, comme par 2∞. Telle eſt la Suite des Impairs $\div$ 1, 3, 5, &c. qui pour avoir un nombre de termes $=\infty$, doit aller juſqu'à 2∞. Il eſt clair qu'elle a encore une infinité de termes finis, quoiqu'elle en ait la moitié moins que *A*. Il eſt clair auſſi que le nombre de ſes termes finis, comparé au nombre des Finis de *A*, n'a reçu qu'une diminution proportionnée à

l'augmentation du dernier des Impairs comparé au dernier de *A*, & que comme cette augmentation n'a été que finie, ou de grandeur ſimplement, & non d'ordre, la diminution qui s'en enſuivoit n'a été auſſi que de grandeur, & non d'ordre, ou finie. Ce même raiſonnement aura également lieu pour toutes les Suites terminées par $n\infty$, n étant Fini déterminable. Donc toutes les Suites compriſes entre 1 & $n\infty$, n étant un nombre Fini déterminable quelconque, & originairement formées de termes Finis déterminables, ou non, ont une infinité de termes finis.

587. A plus forte raiſon, ſi ces Suites étoient terminées par $\frac{\infty}{n}$, car le nombre des termes finis en augmenteroit plutôt que de diminuer.

588. La progreſſion arithmétique compriſe entre 1 & ∞^2 (555) a des termes de trois ordres, & n'a que ſon premier terme 1 dans l'ordre du Fini. La géométrique n'a qu'une ſomme de l'ordre de ∞^2 (555), & par conſéquent n'a qu'un nombre fini de termes dans ſon dernier ordre, qui eſt celui de ∞^2. Donc malgré leur oppoſition elles conviennent en ce qu'elles n'ont ni l'une ni l'autre un nombre infini de termes dans chacun de leurs trois ordres. Donc nulle Suite compriſe entre 1 & ∞^2, & qui par conſéquent aura des termes de trois ordres, n'aura une infinité de termes dans chacun des trois.

589. Toute Suite originairement formée de termes Finis déterminables, & compriſe entre 1 & ∞^2, a une ſomme de l'ordre de ∞^3 (557). Donc elle a une infinité de termes de l'ordre de ∞^2, donc elle n'en a pas une infinité de l'ordre du Fini, & de l'ordre de ∞ (588). Donc elle en a, ou 1° un nombre fini de ces deux ordres, ou 2° un nombre fini de l'ordre du Fini, & un nombre infini de l'ordre de ∞, ou 3° un nombre infini de l'ordre du Fini, & un nombre ſeulement fini de l'ordre de ∞. Ce dernier cas eſt viſiblement impoſſible, & abſolument contraire à la gradation réguliere des Suites toujours réglées par quelque Loi, car une Suite

composée de trois ordres consécutifs, auroit donc un nombre infini de termes dans le 1[er], un nombre fini dans le 2[d], & un nombre infini dans le 3[me]. Donc il ne reste que les deux 1[ers] cas de possibles, qui tous deux ne donnent à la Suite qu'un nombre fini de termes finis : mais il est aisé de voir que c'est le 2[d] qui est le vrai. Donc toute Suite originairement formée de termes Finis déterminables, & comprise entre 1 & ∞^2, n'a qu'un nombre fini de termes finis.

On en peut prendre pour exemple A^2.

590. Si la Suite se terminoit par $\frac{\infty^2}{n}$, ce qui seul peut augmenter le nombre des termes finis, le nombre n'en seroit encore que fini, selon le raisonnement de l'art. 586, renversé, & 587.

591. Donc la Suite infinie des Triangulaires, terminée par $\frac{\infty^2}{2}$ (572), n'a qu'un nombre fini de termes finis. Et en effet, puisqu'un nombre Naturel quelconque étant n, le Triangulaire correspondant est $\frac{nn+n}{2}$, la Suite des Triangulaires arrive à l'infini, dès que nn est infini : or il l'est, dès que n est un Fini indéterminable $= x$, & quand cela arrive, il n'y a encore eu qu'un nombre fini de nombres Naturels n finis, & par conséquent que ce même nombre de Triangulaires finis.

592. De même toutes les autres Suites de Poligones terminées par des $\frac{\infty^2}{2}$ croissans dans cet ordre, n'auront qu'un nombre fini de termes finis. On peut leur appliquer aussi le raisonnement qui vient d'être fait sur la Suite des Triangulaires.

593. Si les Suites originairement formées de termes Finis déterminables, & comprises entre 1 & ∞^2, soit que cet Infini ait un multiplicateur ou un diviseur fini, n'ont qu'un nombre fini de termes finis, à plus forte raison cela sera-t'il vrai des Suites pareilles qui s'éleveront plus haut, ou se termineront par ∞^3, ∞^4, &c. & en général par ∞^n, n étant

fini. On peut auſſi leur appliquer le raiſonnement qui a été fait ſur les Suites compriſes entre 1 & ∞^2.

Donc toutes les Suites compriſes entre 1 & ∞, ſoit qu'elles ſoient originairement formées de termes Finis déterminables, ou non, ont une infinité de termes finis, & toutes les Suites compriſes entre 1 & ∞^n, *n* étant fini & plus grand que 1, n'ont qu'un nombre fini de termes finis, ſi ces termes dont elles ſont originairement formées ſont déterminables, & cela, quelque coëfficient fini qu'ait ∞^1 ou ∞^n.

On voit aiſément par les art. 557 & 589, pourquoi la condition que les Suites ſoient originairement formées de termes Finis déterminables eſt néceſſaire, dès que l'expoſant de l'Infini qui les termine eſt plus grand que 1.

594. Donc tous les nombres Figurés, à commencer par les Triangulaires, n'ont qu'un nombre fini de termes finis, & même un nombre toujours décroiſſant d'une Suite à l'autre. On le verra auſſi *à priori* par leurs Formules de l'art. 126, en ſuivant le raiſonnement de l'art. 591.

595. Si les Suites ſont compriſes entre 1 & $\infty^{\frac{1}{n}}$, il eſt viſible qu'elles ſont de la même eſpece que celles qui ſeroient terminées par ∞^1, & que même celles-ci doivent à plus forte raiſon avoir un nombre infini de Finis. Il en faut dire autant de celles qui ſeroient terminées par $\infty^{\frac{n}{m}}$, ſi $n < m$. Pareillement celles qui ſeront terminées par $\infty^{\frac{m}{n}}$, où $m > n$, ſeront de l'eſpece de celles qui ſont terminées par ∞, dont l'expoſant eſt un entier plus grand que 1, & elles n'auront qu'un nombre fini de termes finis. On en a vû des exemples dans les $A^{\frac{n-1}{n}}$ de l'art. 273, & dans les $A^{\frac{n}{n-1}}$ de l'art. 279.

596. Si une Suite a plus d'un terme fini, elle n'en ſauroit avoir moins qu'un nombre fini indéterminable. Il eſt clair que ſi ſon 1[er] terme étant 1, le 2[d] eſt un Infini, comme dans la progreſſion arithmétique compriſe entre 1 & ∞^2

(555)

(555) dont la différence est ∞, elle ne peut jamais avoir que son 1[er] terme de Fini. Mais si ce 2[d] terme eût été un nombre fini quelconque, il eût été impossible que la Loi qui auroit réglé la Suite, n'eût fourni un 3[me] terme fini, qui eût suivi cette Loi à l'égard du 2[d], comme le 2[d] la suivoit à l'égard du 1[er], & de même un 4[me] à l'égard du 3[me], &c. ce qui se seroit étendu à tous les nombres Finis déterminables qui auroient pu suivre la Loi, de sorte qu'on n'en auroit pu assigner ou déterminer le dernier, ou, ce qui revient au même, qu'ils auroient été au moins en nombre Fini indéterminable. C'est ce qu'on a vu dans les A^2, A^3, &c. Ce sera la même chose, si une Suite originairement formée de termes finis, doit se terminer par l'Infiniment petit. Elle aura ou une infinité, ou un nombre Fini indéterminable de termes finis. Il en ira encore de même, si une Suite a d'abord des différences finies, & après cela d'infiniment petites.

597. Considerons maintenant les Suites originairement formées de termes Finis, & terminées par des Infiniment petits, & par conséquent composées de termes de différens ordres, qui vont en s'abbaissant. *Ordre des sommes des Suites infinies décroissantes comprises entre* 1 *&* $\frac{1}{\infty}$, *ou* $\frac{1}{\infty^n}$ *ou* $\frac{1}{\infty^{\frac{n}{m}}}$.

Quel que soit le nombre de ces différens ordres, elles ne peuvent avoir une somme infinie que quand le nombre de leurs termes finis sera infini; car le nombre des termes infiniment petits du 1[er] ordre, qui sont les plus élevés de tous, fût-il infini, ils ne vaudroient tous ensemble qu'un terme fini, qui se joindroit aux finis, & ne changeroit rien à l'ordre de leur somme. A plus forte raison cela sera-t'il vrai des Infiniment petits inférieurs, & par conséquent tout se réduit à savoir quand le nombre des termes finis de ces Suites sera fini, ou infini.

598. Ces Suites n'ayant qu'un nombre total de termes $= \infty$, & le nombre de leurs termes finis, quand il est infini, ne pouvant être que de cet ordre, elles ne peuvent avoir une somme d'un ordre plus élevé que celui de ∞.

599. Quelle que soit une de ces Suites, elle n'est (361) qu'une Suite croissante originairement formée de termes finis,

& terminée par ∞^n, *n* ayant une valeur quelconque, mais que l'on a changée en une Suite de fractions, & qui par conséquent est devenue décroissante, & terminée par $\frac{1}{\infty^n}$. Donc tous les termes finis de la Suite croissante terminée par ∞^n sont demeurés finis dans la décroissante terminée par $\frac{1}{\infty^n}$, & au contraire tous les Infinis de la 1[re] sont devenus Infiniment petits dans la 2[de]. Or toutes les Suites originairement formées de termes Finis, & terminées par ∞, ont un nombre infini de termes Finis, & toutes les Suites originairement formées de termes Finis déterminables, & terminées par ∞^n, *n* étant fini, & plus grand que 1, n'ont qu'un nombre fini de termes Finis; donc toutes les Suites décroissantes terminées par $\frac{1}{\infty}$ ont une infinité de termes Finis, & par conséquent une somme infinie de l'ordre de ∞, & toutes les autres terminées par $\frac{1}{\infty^n}$, n'ont qu'un nombre fini de termes finis, & par conséquent une somme finie, pourvû qu'elles soient originairement formées de termes Finis déterminables.

Il faut joindre aux Suites terminées par $\frac{1}{\infty}$, celles qui le sont par $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$ ou par $\frac{1}{\infty^{\frac{n}{m}}}$, puisqu'elles sont de la même espece, & aux Suites terminées par $\frac{1}{\infty^n}$, celles qui le sont par $\frac{1}{\infty^{\frac{m}{n}}}$.

On a déja vû des exemples de cette Théorie dans les art. *362, 363, 365, 366, 367, 368, 369, 370.* Mais comme elle n'étoit pas alors générale, en voici de nouveaux.

EXEMPLE I.

Application de la Théorie aux sommes de différentes Suites décroissantes de cette espece.

600. Si l'on divise les Unités par les nombres Naturels, ce qui donnera $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, &c. $\frac{1}{\infty}$.

Les nombres Naturels par les Triangulaires, ce qui donnera

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{6}, \frac{4}{10}, \&c. \frac{\infty}{\frac{1}{2}\infty^2} = \frac{2}{\infty}.$$

Les Triangulaires par les Pyramidaux, ce qui donnera

$$\frac{1}{1},\ \frac{3}{4},\ \frac{6}{10},\ \frac{10}{20},\ \&c.\ \frac{\frac{1}{2}\infty^2}{\frac{1}{6}\infty^3} = \frac{3}{\infty}.$$

Les Pyramidaux par les Triangulo-pyramidaux, ce qui donnera $\frac{1}{1}, \frac{4}{5}, \frac{10}{15}, \frac{20}{35}$, &c. $\frac{\frac{1}{6}\infty^3}{\frac{1}{24}\infty^4} = \frac{4}{\infty}$.

Et si enfin on opere toujours ainsi de suite sur les Nombres Figurés, on voit que l'on aura toujours des sommes infinies de l'ordre de ∞ (599), & même des sommes toujours croissantes.

601. Tous les derniers termes des Suites de Figurés divisés par les Figurés de l'ordre immédiatement supérieur, sont en progression arithmétique naturelle.

EXEMPLE II.

602. Si l'on divise les Figurés d'un ordre par les Figurés supérieurs de deux ordres, les Unités par les Triangulaires, les nombres Naturels par les Pyramidaux, &c. ce qui donnera

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{10},\ \&c.\ \frac{1}{\frac{1}{2}\infty^2} = \frac{2}{\infty^2}.$$

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{10},\ \frac{4}{20},\ \&c.\ \frac{\infty}{\frac{1}{6}\infty^3} = \frac{6}{\infty^2}.$$

Et pour les autres derniers termes des Suites de Figurés ainsi divisées, $\frac{12}{\infty^2}$, $\frac{20}{\infty^2}$, &c. on voit que toutes ces Suites n'auront que des sommes finies (599) & croissantes.

603. Les dénominateurs des derniers termes de ces Suites étant toujours ∞^2, les numérateurs 2, 6, 12, 20, &c. ont pour différences les termes d'une progression arithmétique, dont le 1er terme est 4, & la différence 2.

604. En opérant de même sur les Poligones, on trouve que les Triangulaires divisés par les Quarrés, donnent

$$\frac{1}{1},\ \frac{3}{4},\ \frac{6}{9},\ \frac{10}{16},\ \&c.\ \frac{\frac{1}{2}\infty^2}{\infty^2} = \frac{1}{2}.$$

Que le dernier terme des Quarrés divisés par les Pentagones

eſt $\frac{2}{3}$, des Pentagones par les Exagones $\frac{3}{4}$, des Exagones par les Eptagones $\frac{4}{5}$, &c. & par conſéquent que ces Suites ne peuvent avoir que des ſommes infinies de l'ordre de ∞, & même croiſſantes, puiſque ces derniers termes le ſont.

605. Si on diviſe des Poligones par les Poligones ſupérieurs de deux ordres, les Triangulaires par les Pentagones, les Quarrés par les Exagones, &c. on aura cette Suite des derniers termes $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{8}$, &c. D'où l'on voit que toutes les ſommes ſeront infinies & croiſſantes.

EXEMPLE III.

606. A étant la Suite naturelle, ſi on diviſe $A^{\frac{1}{3}}$ par $A^{\frac{1}{2}}$, ce qui donne $\frac{1}{1}$, $\frac{2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{3^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{4^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{2}}}$, &c. $\frac{\infty^{\frac{1}{3}}}{\infty^{\frac{1}{2}}} = \infty^{\frac{2-3}{6}}$ $= \infty^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{6}}}$, la ſomme eſt infinie (599).

De même le dernier terme de $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^{\frac{1}{3}}}$ étant $\frac{\infty^{\frac{1}{4}}}{\infty^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{12}}}$, la ſomme de $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^{\frac{1}{3}}}$ eſt encore infinie, & toujours ainſi tant que la Suite ſera $\frac{A^{\frac{1}{m}}}{A^{\frac{1}{n}}}$ où $m > n$, & plus généralement encore, tant que les expoſans de A diviſée & de A diviſante ſeront de pures fractions, ſoit que le numérateur en ſoit 1 ou non, pourvû que l'expoſant de A diviſée ſoit le plus petit, comme il eſt néceſſaire pour avoir une Suite décroiſſante.

EXEMPLE IV.

607. La ſomme de $\frac{A^{\frac{1}{2}}}{A^{\frac{5}{3}}}$ qui ſe termine par $\frac{1}{\infty^{\frac{7}{6}}}$ n'eſt que finie, puiſque $\frac{1}{\infty^{\frac{7}{6}}}$ eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ (599). Et en

général ces sommes sont toujours finies, tant que l'exposant de A divisée étant une pure fraction, celui de A divisante est une fraction mixte.

608. Si les deux exposans étoient des fractions mixtes, l'ordre de la somme dépendroit de leur rapport. Ainsi $\frac{A^{\frac{4}{3}}}{A^{\frac{3}{2}}}$ terminée par $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{6}}}$ aussi-bien que $\frac{A^{\frac{1}{3}}}{A^{\frac{1}{2}}}$, auroit aussi une somme infinie, & $\frac{A^{\frac{5}{4}}}{A^{\frac{8}{3}}}$ terminée par $\frac{1}{\infty^{\frac{17}{12}}}$ n'auroit qu'une somme finie.

609. Je considere maintenant les Suites originairement formées d'Infiniment petits du 1er ordre, qui aboutissent à un dernier terme quelconque.

Théorie pour l'ordre des sommes des Suites comprises entre $\frac{1}{\infty}$ & un dernier terme quelconque, & d'abord pour celles des Suites comprises entre deux Infiniment petits.

Si elles aboutissent à un infiniment petit du 1er ordre, ce sont des Suites que j'appelle *primitives*, toutes formées de termes finis, dont on a divisé chaque terme par ∞. Telles seroient les trois Suites primitives des art. 521, 525, 530, divisées par ∞. La 1re deviendroit

$$\frac{1}{2\infty},\ \frac{2}{3\infty},\ \frac{3}{4\infty},\ \&c.\ \frac{1}{\infty}.$$

La 2^de $$\frac{n^{\frac{1}{\infty}}}{\infty},\ \frac{n^{\frac{2}{\infty}}}{\infty},\ \frac{n^{\frac{3}{\infty}}}{\infty},\ \&c.\ \frac{n}{\infty}.$$

La 3me $$\frac{1}{\infty},\ \frac{2^{\frac{1}{\infty}}}{\infty},\ \frac{3^{\frac{1}{\infty}}}{\infty},\ \&c.\ \frac{\infty^{\frac{1}{\infty}}}{\infty}.$$

Il est clair que ces Suites, qui ne sortent point de l'ordre de leur origine, ont par cette raison une somme de l'ordre immédiatement supérieur, c'est-à-dire finie, & cela indépendamment des rapports déterminables, ou non, des Infiniment petits de leur origine, car il n'y a que la 1re dont les Infiniment petits de l'origine aient des rapports déterminables. Il est clair aussi qu'il n'importe que ces Suites soient croissantes ou décroissantes.

Ordre des sommes des Suites comprises entre $\frac{1}{\infty}$ & 1.

610. Si ces Suites sortent de leur ordre, & se terminent par 1, ou, ce qui revient au même, par tout autre nombre fini, ce sont des Suites primitives, originairement formées de termes finis, & terminées par ∞, dont on a divisé chaque terme par ∞. Ainsi la Suite primitive *A* deviendroit $\frac{1}{\infty}$, $\frac{2}{\infty}$, $\frac{3}{\infty}$, &c. $\frac{\infty}{\infty} = 1$, & la correspondante *G* deviendroit $\frac{1}{\infty}$, $\frac{\infty^{\frac{1}{\infty}}}{\infty}$, $\frac{\infty^{\frac{2}{\infty}}}{\infty}$, &c. 1.

Ces Suites, qui ont des termes Finis, ne peuvent avoir une somme de l'ordre de ∞, que quand elles auront une infinité de termes Finis, & elles n'en peuvent avoir une infinité que quand les primitives en auront une infinité d'Infinis de l'ordre de ∞. Or les primitives ont des sommes de l'ordre de ∞^2, ou, ce qui est le même, une infinité de termes de l'ordre de ∞, quand elles sont originairement formées de termes Finis déterminables (549 & 571), & en ce cas il est clair que les Infiniment petits, dont les Suites que nous considérons sont originairement formées, ont des rapports déterminables. Donc en ce cas ces Suites ont des sommes de l'ordre de ∞. Les deux Suites de cet art. sont des exemples des deux cas. La 1re étant une progression arithmétique, sa somme est $\frac{\infty}{2}$, & la somme de la 2de, qui est une progression géométrique, est $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{\infty}} - 1} = 1$ divisé par $\frac{1}{x}$, ou $= x$, nombre Fini indéterminable.

Ordre des sommes des Suites comprises entre $\frac{1}{\infty}$ & ∞ ou ∞^n.

611. Si ces Suites se terminent par ∞, ce sont des Suites primitives originairement formées de termes Finis, & terminées par ∞^2, dont on a divisé chaque terme par ∞. Ainsi A^2 deviendroit $\frac{1}{\infty} \cdot \frac{4}{\infty} \cdot \frac{9}{\infty}$, &c. $\frac{\infty^2}{\infty} = \infty$. On voit assez que le raisonnement de l'art. précédent revient ici, & que ces Suites qui ont des termes de l'ordre de ∞, n'en peuvent avoir une infinité, ni par conséquent des sommes de l'ordre de ∞^2, que quand les Suites primitives auront des sommes

de l'ordre de ∞^3, & que par conféquent les Suites originairement formées d'Infiniment petits du 1[er] ordre, & terminées par ∞, ont des fommes de l'ordre de ∞^2, quand les Infiniment petits de leur origine ont des rapports déterminables.

612. Il eft clair que ces Suites, quoiqu'originairement formées d'Infiniment petits du 1[er] ordre, peuvent monter par leurs derniers termes à ∞^2, ∞^3, &c. & que ce fera toujours le même raifonnement. Donc en général fi elles ne fortent point de l'ordre de leur origine, elles n'ont que des fommes finies, & fi elles s'élevent à quelque ordre fupérieur, elles ont des fommes infinies de l'ordre immédiatement fupérieur à celui de leur dernier terme, lorfque les Infiniment petits de leur origine ont des rapports déterminables.

Ordre des fommes des Suites décroiffantes comprifes entre $\frac{1}{\infty}$ & $\frac{1}{\infty^n}$.

613. Si ces Suites font décroiffantes, & terminées par $\frac{1}{\infty^2}$, ce font des Suites primitives comprifes entre ∞ & ∞^2, telles que la progreffion arithmétique ÷ ∞, 2∞, 3∞, &c. ∞^2 de l'art. 555, dont tous les termes ont divifé les termes de Suites toutes formées de Finis, telles que les trois Suites des art. 521, 525 & 530, qui feroient devenues,

La 1[re] $\frac{1}{2\infty}$, $\frac{2}{6\infty}$, $\frac{3}{12\infty}$, &c. $\frac{1}{\infty^2}$.

ou $\frac{1}{2\infty}$, $\frac{1}{3\infty}$, $\frac{1}{4\infty}$, &c. $\frac{1}{\infty\times\infty} = \frac{1}{\infty^2}$.

La 2[de] $\frac{1}{\infty}$, $\frac{n^{\frac{1}{\infty}}}{2\infty}$, $\frac{n^{\frac{2}{\infty}}}{3\infty}$, &c. $\frac{n}{\infty^2}$.

La 3[me] $\frac{1}{\infty}$, $\frac{2^{\frac{1}{\infty}}}{2\infty}$, $\frac{3^{\frac{1}{\infty}}}{3\infty}$, &c. $\frac{\infty^{\frac{1}{\infty}}}{\infty^2}$.

D'où l'on voit que la progreffion arithmétique ÷ ∞. 2∞, &c. ∞^2, ayant une infinité de termes de l'ordre de ∞, ce qu'il eft aifé de voir, auffi-bien qu'une infinité de l'ordre de ∞^2, les Suites décroiffantes, dont il s'agit ici, auront une infinité de termes de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & par conféquent des fommes finies, foit que les Infiniment petits de leur origine

aient des rapports déterminables, comme dans la 1[re], ou non, comme dans les deux autres. Donc à plus forte raiſon les Suites originairement formées de $\frac{1}{\infty}$, & terminées par $\frac{1}{\infty^3}$, $\frac{1}{\infty^4}$, &c. ne peuvent avoir des ſommes d'un ordre plus élevé que celui du Fini.

614. Quant aux Suites originairement formées d'Infiniment petits du 1[er] ordre, & terminées par des Finis, ou Infinis, ou Infiniment petits, qui aient des coëfficiens, il ne peut y avoir nulle difficulté (547), non plus que ſur ces mêmes Suites terminées par des Infinis ou Infiniment petits radicaux, qui ſe rapporteroient ſans peine aux potentiels.

Sur les derniers termes des Suites qui commencent par $\frac{1}{\infty}$, & dont les termes n'ont que des différences infiniment petites.

615. Il eſt important de connoître des Suites qui commenceroient par 0, ou par $\frac{1}{\infty}$, & dont les termes quelconques n'auroient que des différences infiniment petites, qui ſeroient originairement de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$. Mais après tout ce qui vient d'être dit, la connoiſſance en ſera facile.

Si une Suite croiſſante commence par $\frac{1}{\infty}$, & ſi les différences de ſes termes doivent être toutes égales, le 2[d] terme ſera $\frac{2}{\infty}$, le 3[me] $\frac{3}{\infty}$, &c. & elle ne pourra avoir un terme Fini que quand ſes numérateurs, qui ſont les nombres naturels, auront atteint le premier & le moindre $\propto$, & alors $\frac{\propto}{\infty}$ ſera une fraction finie beaucoup moindre que 1, & la ſomme de toutes les différences infiniment petites de termes qui auront précédé. Et comme ces termes précédens ont été en nombre infini, il a fallu que la Suite ſuppoſée ait eu un nombre infini de termes avant que de venir à en avoir un fini.

616. Après $\frac{\propto}{\infty}$, elle n'a plus que des termes finis, mais qui n'ont que des différences $=\frac{1}{\infty}$, & pour venir à en avoir un qui ait à $\frac{\propto}{\infty}$ une différence finie, il faut qu'elle ait encore une infinité de termes finis; car puiſque cette différence doit être finie, elle ne peut être que la ſomme d'une infinité de différences $=\frac{1}{\infty}$, & par conſéquent entre $\frac{\propto}{\infty}$ & le terme

le plus proche, dont la différence à $\frac{\infty}{\infty}$ soit finie, il y aura une infinité de termes, & toujours ainsi de suite, de sorte qu'il y aura toujours une infinité de termes finis infiniment peu différens entre deux termes finis quelconques, qui auront une différence finie.

617. Tous les termes finis, qui n'ont à d'autres termes finis que des différences infiniment petites, ne peuvent être déterminés, & il n'y a de déterminables que ceux qui ont entr'eux des différences finies. Donc ces Suites ont autant d'infinités de termes Finis non-déterminables, qu'elles ont de termes Finis déterminables.

618. Et comme les Suites infinies que nous considérons n'ont de termes qu'en nombre infini de l'ordre de ∞, elles ne peuvent pas avoir une infinité d'infinités de termes Finis non-déterminables. Donc elles ne peuvent avoir qu'un nombre fini d'infinités de termes Finis non-déterminables, & par conséquent un nombre fini de termes Finis déterminables. Donc en quelque grand nombre fini de parties qu'on les divise, on ne peut leur trouver qu'un nombre fini de termes Finis déterminables.

619. Donc leur dernier terme est toujours fini. Ce qui suit aussi de ce qu'il est la somme d'un nombre infini de différences égales de l'ordre $\frac{1}{\infty}$.

620. Mais comme ces différences égales de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ peuvent être plus ou moins grandes, ce dernier terme fini peut être aussi plus ou moins grand.

621. Si ces Suites ont des différences inégales, il n'y a rien de changé au nombre total de leurs termes, qui est toujours de l'ordre de ∞, ni à ce nombre fini d'infinités de termes Finis non-déterminables, qui sont toujours entre deux termes Finis déterminables; mais le dernier terme est différent, selon que les différences inégales sont croissantes ou décroissantes.

Si elles sont croissantes, & terminées par $\frac{1}{\infty}$, le dernier

terme de la Suite principale eſt encore fini (609).

622. Si la Suite des différences croiſſantes eſt terminée par 1, & ſi de plus ces différences ont eu originairement des rapports déterminables, le dernier terme de la Suite principale eſt un Infini de l'ordre de ∞ (610).

623. Et en général ſi les différences croiſſantes ſont terminées par ∞^n, & ont eu originairement des rapports déterminables, le dernier terme de la Suite principale ſera de l'ordre de ∞^{n+1} (612).

624. Si les différences ſont décroiſſantes, & terminées par $\frac{1}{\infty}$, le dernier terme de la Suite principale ſera fini.

625. Si les différences ſont terminées par $\frac{1}{\infty^2}$, & en général par $\frac{1}{\infty^n}$, n étant fini, le dernier terme de la Suite principale eſt Fini (613).

Suites infiniment infinies, & l'ordre de leurs ſommes.

626. Nous n'avons encore conſidéré que des Suites dont les termes étoient en nombre infini de l'ordre de ∞. Mais le nombre infini de termes peut être infiniment plus grand, ou d'un ordre ſuperieur à ∞. Par exemple, on peut introduire entre 1 & 2 une infinité de moyens arithmétiques ou géométriques, de même entre 2 & 3, &c. de ſorte qu'en concevant tous ces termes diſpoſés de ſuite, on aura une Suite qui aura autant d'infinités de termes qu'il y a de termes dans la Suite naturelle, & qui en aura par conſéquent un nombre $= \infty \times \infty = \infty^2$. Il eſt clair qu'on peut imaginer une infinité d'autres Suites pareilles qui auront d'autres Loix. Je les appelle *infiniment* infinies, à la différence des autres qui ſont *ſimplement* infinies, & je ſuppoſe que le nombre de leurs termes ne paſſe point l'ordre de ∞^2, parce qu'il ſeroit abſolument inutile de pouſſer cela plus loin.

627. Ces Suites originairement formées ſoit de termes finis, ſoit d'infinis, ſoit d'infiniment petits, ſoit croiſſantes, ſoit décroiſſantes, ſoit toujours égales, ayant une infinité d'infinités de termes, ſi l'on conçoit qu'on ait pris la ſomme de chaque infinité de leurs termes, toutes ces ſommes diſpo-

ſées ſelon leur ordre, ne feront plus qu'une Suite ſimplement infinie, dont la ſomme ſera celle de la Suite infiniment infinie. Donc les Suites infiniment infinies étant réduites par ce moyen en Suites ſimplement infinies, on jugera de leurs ſommes par les regles précédentes.

628. Une Suite quelconque infiniment infinie peut toujours être conçue, comme ayant chaque infinité de ſes termes introduite ou inſérée entre deux termes conſécutifs d'une Suite ſimplement infinie finiment diſtans l'un de l'autre; d'où il ſuit que la ſomme de chaque infinité de termes de la Suite infiniment infinie, eſt toujours de l'ordre immédiatement ſupérieur à celui des deux termes conſécutifs de la Suite ſimplement infinie, entre leſquels cette infinité ſeroit compriſe. Ainſi ſi entre 1 & 2 eſt cette infinité de termes $1+\frac{1}{\infty}$, $1+\frac{2}{\infty}$, $1+\frac{3}{\infty}$, &c. $1+\frac{\infty}{\infty}=2$, la ſomme en eſt (459) $\frac{3\infty}{2}$. De même entre ∞ dernier terme de la Suite naturelle, & celui qui le précede immédiatement, la Suite infiniment infinie introduira une infinité de termes infinis, dont la ſomme ſera de l'ordre de ∞^2. Donc la Suite infiniment infinie quelconque étant réduite en une Suite ſimplement infinie des ſommes de chaque infinité de ſes termes, ſon premier & ſon dernier terme, après cette réduction, ſeront de l'ordre immédiatement ſupérieur à celui dont ils étoient auparavant.

629. Donc toute Suite ſimplement infinie a une ſomme du même ordre qu'une Suite ſimplement infinie, qui auroit un premier terme & un dernier terme de l'ordre immédiatement ſupérieur à celui dont ils étoient dans la Suite infiniment infinie.

EXEMPLE.

630. Donc la Suite infiniment infinie qui introduit une infinité de moyens arithmétiques entre 1 & 2, entre 2 & 3, &c. a une ſomme de l'ordre de ∞^3, puiſqu'elle ſe termine par ∞, & qu'elle a une ſomme du même ordre qu'une Suite

ſimplement infinie commençant par ∞, & terminée par ∞^2, ou par un infini de cet ordre comme la progreſſion arithmétique de l'art. 555, ∞ étant poſé pour ſon 1er terme.

En effet, la ſomme de l'infinité de moyens arithmétiques introduits entre 1 & 2 eſt . . . . $\frac{3\infty}{2}$.

entre 2 & 3 . . . . $\frac{5\infty}{2}$.

entre 3 & 4 . . . . $\frac{7\infty}{2}$, &c.

D'où l'on voit que ces ſommes diſpoſées ſelon leur ordre en nombre infini ſont une progreſſion arithmétique, dont le 1er terme eſt $\frac{3\infty}{2}$, & la différence ∞, & par conſéquent la ſomme $= \overline{\frac{6\infty}{2} + \infty \times \infty} \times \frac{\infty}{2} = \frac{\infty^3}{2}$, ſomme de la Suite infiniment infinie, qui eſt auſſi celle de la progreſſion arithmétique compriſe entre ∞ & ∞^2.

631. Les Suites infiniment infinies, dont il eſt le plus utile de connoître les ſommes, ſont celles qui ſont originairement formées d'Infiniment petits du 1er ordre. Et comme les ſeules ſur leſquelles on puiſſe faire des recherches, ſont celles qui ſont originairement formées d'Infiniment petits, dont les rapports ſont déterminables, il faut les ſuppoſer ainſi conditionnées.

De plus, comme il faut les réduire à des Suites ſimplement infinies, dont le 1er terme ſera 1, ou en général Fini, puiſqu'on aura toujours pris la ſomme d'un nombre ∞ de $\frac{1}{\infty}$; les Suites infiniment infinies originairement formées d'Infiniment petits du 1er ordre, qui auront des rapports déterminables, répondront aux Suites ſimplement infinies originairement formées de termes Finis déterminables.

Donc il n'y aura plus qu'à élever à l'ordre immédiatement ſupérieur le dernier terme de la Suite infiniment infinie, & on aura l'ordre de la ſomme.

632. Donc une Suite infiniment infinie, commençant par $\frac{1}{\infty}$, & terminée par un Infiniment petit du même ordre,

a une ſomme infinie, puiſque la ſomme d'une Suite ſimplement infinie, commençant par un terme fini, & terminée par un fini, auroit une ſomme infinie.

633. Donc une Suite infiniment infinie croiſſante, originairement formée d'Infiniment petits du 1[er] ordre, & terminée par 1, a une ſomme infinie de l'ordre de ∞^2, puiſqu'une Suite ſimplement infinie, commençant par 1 & terminée par ∞, a une ſomme de cet ordre (549).

634. Il en ira de même de ces Suites terminées par ∞, & en général par ∞^n.

635. Une Suite infiniment infinie décroiſſante, originairement formée d'Infiniment petits du 1[er] ordre, & terminée par $\frac{1}{\infty}$ ou par $\frac{1}{\infty^2}$, a une ſomme infinie, puiſque telle ſeroit la ſomme d'une Suite ſimplement infinie commençant par 1, & terminée par 1, ou par $\frac{1}{\infty}$ (599).

636. Mais toutes les autres Suites infiniment infinies, terminées par $\frac{1}{\infty^3}$, $\frac{1}{\infty^4}$, &c. n'auront plus que des ſommes finies (613).

637. Tout ce qui a été dit des ſommes des Suites terminées par ∞^n, ou par $\frac{1}{\infty^n}$, ſe doit entendre de même des ſommes de celles qui ſeroient terminées par $\infty^{\frac{n}{m}}$ ou $\infty^{\frac{m}{n}}$, ou par $\frac{1}{\infty^{\frac{n}{m}}}$ ou $\frac{1}{\infty^{\frac{m}{n}}}$. Car il n'y auroit qu'à rapporter ces Infinis radicaux à l'ordre potentiel auquel ils appartiendroient ſelon l'art. 158, & les derniers termes ſeroient par rapport au Fini de cet ordre potentiel.

638. Une Suite ſimplement infinie, & une infiniment infinie, ayant toutes deux originairement des différences infiniment petites, la raiſon qui empêche que la 1[re] n'ait une infinité de termes Finis déterminables (618), ceſſe à l'égard de la 2[de], & par conſéquent celle-ci a cette infinité de termes Finis déterminables.

639. Juſqu'ici nous n'avons conſidéré les Suites que *Termes où*

les Suites tendent & arrivent, & renversement des Suites arrivées à ces Termes.

comme abſolument terminées par leur dernier terme, & elles y doivent être effectivement terminées, quant à la grandeur des termes qui les compoſent, puiſque le dernier terme n'eſt le dernier, que parce qu'il eſt le plus grand ou le plus petit de tous ceux que la Suite peut avoir ſelon la Loi qui la regle. Mais elle peut n'être pas terminée à ce dernier terme, quant à ſon *cours*; c'eſt-à-dire, qu'étant arrivée à ce terme, elle peut être obligée par la Loi à y recommencer un nouveau cours. Ainſi ſuppoſé que le Soleil pût s'élever à l'infini au deſſus de la Terre, la Suite des nombres, qui repréſenteroient ſes élévations, ſe termineroit par ∞; mais ſi le Soleil ſe rapprochoit enſuite, cette même Suite arrivée à ∞, & terminée là, quant à la grandeur de ſes termes, recommenceroit un nouveau cours d'élévations toujours décroiſſantes. Ces ſecondes Suites qui naiſſent des premieres, ou leur ſuccedent, ne donnent lieu à aucune conſidération nouvelle, ni pour les derniers termes, ni pour les ſommes, mais le paſſage d'une Suite à l'autre, ou la maniere dont elles peuvent ſe ſuccéder, y donne lieu.

Si le Soleil s'eſt élevé infiniment au deſſus de la Terre, & après cela redeſcend, la Suite des élévations ſe termine à ∞, & celle des abaiſſemens y commence; de ſorte que ∞ eſt en même temps le *Terme* de la 1re, & l'*Origine* de la 2de. Je n'emploierai plus indifféremment le mot de *Terme* pour une grandeur quelconque d'une Suite, mais ſeulement pour celle qui la termine, ſoit qu'elle la termine ſimplement, ſoit qu'elle la termine & en commence une ſeconde.

Comme l'Infini peut être le Terme d'une Suite croiſſante & l'Origine d'une décroiſſante, zero ou l'Infiniment petit peuvent être le Terme d'une décroiſſante, & l'Origine d'une croiſſante.

640. Une Suite ne peut arriver à un Terme, & y recommencer un nouveau cours ſans ſe renverſer, c'eſt-à-dire, ſans devenir de croiſſante décroiſſante, ou de décroiſſante croiſſante, en un mot, contraire à ce qu'elle étoit. Car elle étoit arrivée à un Terme de grandeur.

641. C'est la même Suite qui se renverse, & ce ne sont pas deux Suites contraires mises bout à bout. Je m'explique. Si je conçois une Suite croissante terminée par ∞, & après elle une Suite décroissante commençant par ∞, & que je veuille les concevoir comme mises seulement bout à bout, ou comme étant toujours deux Suites distinctes, je concevrai ∞ Terme de la 1[re], distinct de ∞ Origine de la 2[de], & par conséquent je concevrai ∞ posé deux fois consécutives. Mais si je veux que ce ne soit que la même Suite qui se renverse, je ne concevrai ∞ posé qu'une fois, parce qu'alors il est en même temps Terme & Origine, & qu'en général toute grandeur d'une Suite appartient également & au cours qui précede, & à celui qui suit, & ne se répete point deux fois pour appartenir à l'un & à l'autre. Par-là se leve l'indétermination qu'on a laissée dans l'art. 485.

J'ai dit précisément *pour appartenir à l'un & à l'autre cours*, car une grandeur peut se répéter deux fois par quelque autre raison.

En un mot, une Suite qui se renverse en une même Suite, où ce renversement est aussi-bien causé par la Loi que le seroit un cours toujours continu. Donc le Terme où se fait le renversement y est unique, aussi-bien que toute autre grandeur.

642. Si l'*unité* de la Suite exige que le Terme où se fait le renversement soit unique, l'unité du Terme exige aussi qu'il contienne toute la nature ou toute l'essence du renversement ; c'est-à-dire, que la Suite se renverse dans le même sens que le Terme peut appartenir à deux cours contraires, & ne se renverse qu'autant qu'il y peut appartenir.

643. Une Suite croissante peut être telle qu'elle ne se terminera pas à ∞, mais à quelque grandeur finie. Ainsi la Suite des élévations du Soleil sur l'Horison ne peut passer 90. Après cela comme cette Suite se renverse, & devient décroissante, 90 est aussi-bien Terme & Origine que l'auroit été ∞ dans une autre supposition. On appelle ces Termes finis des *Maxima* ou *plus grands*. De même une Suite décroissante peut

Termes naturels, & arbitraires.

ſe terminer, non à o, ou à $\frac{1}{\infty}$, mais à une grandeur finie, qui ſera un *Minimum*, ou *plus petit.* J'appelle ∞ ou o, ou $\frac{1}{\infty}$, Termes *naturels*, & les plus grands ou plus petits, Termes *arbitraires*, parce que leur grandeur dépend d'une détermination arbitraire de la Loi.

644. On en a vû un exemple dans $A^{\frac{1}{a}}$ (284) qui eſt croiſſante juſqu'à $3^{\frac{1}{3}}$, & après cela ſe renverſe, & devient décroiſſante. $3^{\frac{1}{3}}$ y eſt donc un *plus grand.*

645. Toute Suite tend à un dernier Terme, & il faut qu'elle y arrive, ſoit par un cours fini, ſoit par un cours infini. Donc toute Suite croiſſante arrive à l'infini, ou à un *plus grand*, & toute Suite décroiſſante arrive à zero, ou à l'Infiniment petit, ou à un *plus petit.* Et ſi elles ont à ſe renverſer, c'eſt là qu'elles ſe renverſent.

Que l'Egalité eſt un Terme.

Terme compliqué.

646. Une Suite croiſſante ou décroiſſante, dont les différences ſont croiſſantes, croît ou décroît toujours de plus en plus: mais ſi ces différences ſont décroiſſantes, elle ne croît ou ne décroît que de moins en moins. Or ce qui ne croît ou ne décroît que de moins en moins, tend à ceſſer de croître ou de décroître, c'eſt-à-dire, à demeurer égal, & par conſéquent toute Suite croiſſante ou décroiſſante qui a des différences décroiſſantes, outre qu'elle tend à un Terme naturel ou arbitraire de grandeur ou de petiteſſe, tend auſſi à l'Egalité, nouveau Terme qui lui eſt particulier; & puiſqu'elle y tend, elle y arrive par un cours ſoit fini ſoit infini (645).

647. L'Egalité eſt un Terme en partie naturel, en partie arbitraire; naturel, en ce que l'égalité eſt quelque choſe de fixe, & qui n'eſt point ſuſceptible de plus & de moins; arbitraire, en ce que la détermination des deux grandeurs, entre leſquelles doit être l'égalité, dépend de la Loi.

648. Une Suite arrivée au Terme de l'Egalité peut être arrivée en même temps aux deux plus grandes ou plus petites grandeurs qu'elle puiſſe avoir, ou ſeulement aux deux plus

plus grandes ou plus petites grandeurs qu'elle puisse avoir égales, & non absolument à la plus grande ou à la plus petite. Si elle se renverse, il est necessaire dans l'un & dans l'autre cas, que les différences de décroissantes qu'elles étoient, deviennent croissantes, puisqu'elles sont arrivées à zero. Mais dans le 1er cas la Suite principale deviendra outre cela de croissante, décroissante, ou au contraire; & dans le 2^d elle demeurera croissante ou décroissante, comme elle étoit; mais croissante ou décroissante de plus en plus, au lieu qu'elle l'étoit de moins en moins. Ainsi le Terme de l'Egalité peut être ou *simple*, ou *compliqué* avec un Terme naturel ou arbitraire de grandeur ou de petitesse.

649. Quand une Suite arrivée à un Terme compliqué, s'y renverse, il faut qu'elle se renverse selon tous les sens que contient le Terme compliqué, supposé qu'elle ait tendu à ce Terme selon tous les sens qu'il contient.

650. Deux Infiniment grands ou petits peuvent être égaux, & deux zero le sont toujours. Donc une Suite qui arrive à l'Egalité, peut arriver aussi en même temps ou à l'Infini, ou à l'Infiniment petit, ou à zero. Mais en ce cas le Terme de l'Egalité est nécessairement compliqué avec un Terme naturel de grandeur ou de petitesse : car la Suite ne peut avoir tendu à ce Terme que comme à la plus grande ou plus petite grandeur qu'elle pût avoir. Donc si elle se renverse, elle se renverse en deux sens, c'est-à-dire, que non seulement elle prend des différentes croissantes, mais qu'elle devient de croissante, décroissante, ou au contraire. Donc ce n'est que dans le cas où une Suite arrive à deux grandeurs égales finies qu'elle peut continuer après cela d'être croissante ou décroissante comme elle étoit. Alors ces deux grandeurs égales ne sont pas un Terme arbitraire de grandeur ou de petitesse, mais un Terme simple d'Egalité.

651. L'Egalité ne paroît être qu'un effet de ce que des grandeurs précédentes ont cru ou décru de moins en moins, & puisqu'elle suppose des grandeurs précédentes, elle n'est pas propre à être Origine, mais seulement Terme, ou Terme

& Origine en même temps. Cependant comme toute Suite peut être renverſée, & que par conſéquent une Suite terminée par l'Egalité pouvoit auſſi commencer par-là, l'Egalité peut abſolument être Origine.

Cinq ſortes de Termes.

652. Il n'y a que cinq eſpeces de Termes poſſibles, les deux naturels de grandeur & de petiteſſe, les deux arbitraires correſpondans, & l'Egalité; car une Suite ne peut être que croiſſante ou décroiſſante, à différences conſtantes, croiſſantes, ou décroiſſantes, & dans tous ces cas elle arrive néceſſairement à un Terme naturel ou arbitraire de grandeur ou de petiteſſe, excepté dans celui où elle a des différences décroiſſantes, qui eſt celui du Terme de l'Egalité. Encore peut-il être compliqué avec l'un des quatre autres (648).

Suites acceſſoires des différences, ou des différences de différences, &c. qui naiſſent de la Suite principale. Quand, & juſqu'à quel point les Suites acceſſoires influent ſur la principale.

653. Les différences ſont une Suite que j'appelle *acceſſoire*, pour la diſtinguer de la principale. Si une Suite eſt conſtante, elle n'a point de différences ou de Suite acceſſoire, mais dès qu'elle n'eſt pas conſtante, elle a au moins une Suite acceſſoire; car elle peut n'en avoir qu'une, & c'eſt lorſque ſes différences ſont conſtantes. Que ſi les différences de la Suite principale ne ſont pas conſtantes, elles ont elles-mêmes au moins une Suite acceſſoire, & la ſuite principale en a au moins deux. Ainſi la Suite des Quarrés naturels a pour Suite acceſſoire celle des nombres Impairs, & celle-ci a pour Suite acceſſoire une Suite conſtante dont tous les termes ſont 2. la Suite des Cubes naturels a trois Suites acceſſoires, dont la 3[me] eſt une Suite conſtante dont tous les termes ſont 6; & ainſi à meſure que ces Suites ſont de plus hautes puiſſances des nombres naturels, elles ont plus de Suites acceſſoires, & la derniere acceſſoire qui eſt conſtante & qui termine tout, eſt plus éloignée. Elle le ſeroit infiniment, ſi on formoit une Suite des puiſſances infinies des nombres naturels.

Mais ſans aller juſqu'à une Suite toute formée de grandeurs infinies, toute progreſſion géométrique formée d'une infinité de termes, a une infinité de Suites acceſſoires, & n'en a point de derniere conſtante; car les différences d'une progreſſion géométrique ſont auſſi en progreſſion géométrique, & par

conſéquent les différences de ces différences, & ainſi à l'infini, au lieu que la progreſſion arithmétique n'a qu'une ſeule Suite acceſſoire conſtante, ce qui confirme encore tout ce qui a été dit de l'oppoſition de ces deux progreſſions.

On voit donc qu'une Suite principale quelconque étant poſée, elle peut avoir plus ou moins de Suites acceſſoires juſqu'à la derniere, qui ſera conſtante. Mais tout ce qu'on a ici en vue, c'eſt de conſidérer quand & juſqu'à quel point les Suites acceſſoires *influent* ſur la principale, c'eſt-à-dire, y produiſent ce qu'elle n'eût pas eu par elle-même, & indépendamment d'elles.

Une Suite croiſſante qui a des différences conſtantes, arrive à l'Infini, une Suite croiſſante qui a des différences croiſſantes, y arrive auſſi, & par conſéquent ce n'eſt point en vertu préciſément de ſes différences croiſſantes qu'elle y arrive, puiſque l'autre avec des différences conſtantes y arrivoit pareillement. Mais quand une Suite croiſſante arrive à deux Infinis égaux, c'eſt préciſément en vertu de ſes différences décroiſſantes, & par conſéquent en ce cas-là la Suite acceſſoire influe ſur la principale. Et comme ce raiſonnement eſt général pour toutes les Suites qui arrivent à l'Egalité, il ſuit qu'en ce cas la Suite acceſſoire a influé ſur la principale, & il eſt clair que c'eſt que la Suite acceſſoire eſt arrivée à zero.

654. Donc quand une Suite arrive à l'Egalité, il faut néceſſairement conſidérer la Suite de ſes différences, ou la 1re Suite acceſſoire.

655. Si la 1re Suite acceſſoire arrive elle-même à l'Egalité, il y a donc une 2de Suite acceſſoire qui eſt arrivée à zero, & alors il y a dans la Suite principale trois grandeurs, qui ont des différences égales. Donc l'égalité de ces deux différences eſt produite dans la Suite principale par une 2de Suite acceſſoire, & il faut remonter juſqu'à cette 2de pour trouver la ſource de cette égalité des différences de la principale.

656. De-là il ne s'enſuit pas néceſſairement que les trois grandeurs de la Suite principale ſoient en progreſſion arithmétique, ſi on attache au mot de *progreſſion* l'idée que les

grandeurs aillent toujours en croissant ou en décroissant. Car 2, 1, 2, ou 1, 2, 1, ont des différences égales, & ne sont pas selon cette idée en progression arithmétique, mais on peut dire qu'ils sont en *contre-progression.* Donc la 2de Suite accessoire arrivée à zero produit dans la principale trois grandeurs en progression ou en contre-progression arithmétique, qui n'y eussent pas été sans cela : car la Suite principale n'étoit pas une progression arithmétique, puisqu'on lui a supposé des différences variables.

Il est vrai que si les trois grandeurs de la Suite principale ont été en contre-progression, elle est arrivée à un *plus grand*, si elles ont été comme 1, 2, 1, ou à un *plus petit*, si elles ont été comme 2, 1, 2, & qu'elle pouvoit arriver à un *plus grand*, ou à un *plus petit*, indépendamment de toute Suite accessoire, mais elle n'y seroit pas arrivée avec des différences égales de part & d'autre du Terme. Si les trois grandeurs sont en progression, la Suite n'arrive ni à un *plus grand*, ni à un *plus petit.*

657. Si la 1re Suite accessoire arrive à l'Egalité & à zero tout ensemble, il y a dans la Suite principale trois grandeurs consécutives égales, & qui, par conséquent sont dans la moindre progression ou contre-progression arithmétique qu'il soit possible. Il est clair qu'une Suite, dont la nature est de varier toujours, n'auroit pas par elle-même trois grandeurs consécutives égales, & qu'il faut que ce soit quelque chose d'étranger qui l'y détermine. C'est la 1re Suite accessoire arrivée à l'Egalité & à zero, & la 2de arrivée seulement à zero.

658. S'il y a une 3me Suite accessoire qui arrive à zero, elle produit dans la 2de deux grandeurs égales, dans la 1re, trois grandeurs en progression ou contre-progression arithmétique, c'est-à-dire, comme 1, 2, 3, ou 3, 2, 1, ou comme 1, 2, 1, ou 2, 1, 2, & par conséquent il y a dans la Suite principale quatre grandeurs qui sont (y étant une grandeur quelconque) y. $y+1$. $y+1+2=y+3$. $y+3+3=y+6$, ou y. $y+1$. $y+1+2=y+3$. $y+3+1=y+4$, &c. ce qui n'a rien de particulier, & qui ne pût être dans la Suite principale indépendamment des accessoires.

659. Que si, lorsque la 3me Suite accessoire arrive à zero, les deux grandeurs égales de la 2de sont aussi zero, il y en a trois égales dans la 1re, & par conséquent il y a quatre grandeurs de la Suite principale en progression ou contre-progression arithmétique, qui n'y eussent pas été sans cela.

660. Que si tout le reste demeurant le même, les trois grandeurs égales de la 1re Suite accessoire sont zero, il y a dans la Suite principale 4 grandeurs consécutives égales, ce qui est encore un effet particulier des Suites accessoires.

661. Et comme on peut suivre cette idée aussi loin qu'on voudra, il s'ensuit en général qu'autant qu'une Suite principale qui n'est point progression arithmétique a de grandeurs égales, ou en progression ou contre-progression arithmétique, autant il y a de Suites accessoires, moins une, qui influent sur elle, ou, ce qui revient au même, qu'il faut considérer, & jusqu'où il faut remonter pour trouver la source de la propriété supposée dans la Suite principale, & que hors de-là les Suites accessoires n'influent point nécessairement sur elle, ou qu'il n'est point nécessaire de les considérer.

Changemens causés dans les Suites par le renversement.

662. J'appelle *Changement*, ce qui arrive à une Suite qui passe au de-là d'un Terme, & y recommence un nouveau cours, & par conséquent Changement s'oppose à *Variation*, qui n'est que le cours d'une Suite depuis une Origine jusqu'à un Terme.

L'idée de changement n'emporte aucune autre nécessité, sinon que la Suite devienne contraire à ce qu'elle étoit selon la nature du Terme par où elle passe. Du reste les grandeurs de la Suite dans la 2de variation peuvent être, ou les mêmes que celles de la 1re, mais posées dans un ordre contraire, ou différentes.

663. Si dans une Suite qui a un premier changement, la 2de variation n'est que la 1re renversée, & que la Loi ne permette pas qu'il y en ait une 3me différente des deux 1res, ce qui arriveroit dans la Suite des élévations ou abaissemens du Soleil par rapport à l'Horison, il faut concevoir, ou que la Suite est absolument terminée par les deux 1res variations,

ou qu'elle en recommence une 3me toute ſemblable à la 1re, & après cela une 4me toute ſemblable à la 2de, ce qui n'a point de fin. Donc ces ſortes de Suites peuvent être conçues, ou comme ayant un cours fini, ſi on les borne au point après lequel il ne peut plus rien arriver de nouveau, ou comme ayant un cours infini, ſi on veut qu'elles le continuent toujours ſans aucune nouveauté.

664. Et quand même les deux 1res variations ſeroient différentes, ce ſeroit encore la même choſe, ſi la 3me n'étoit que la 1re, & la 4me que la 2de, & toujours ainſi.

665. Que ſi toutes les variations étoient différentes au moins de deux en deux, c'eſt-à-dire, que les deux 1res n'étant que la même renverſée, la 3me & la 4me en fuſſent différentes, quoiqu'elles ne fuſſent que la même renverſée, & toujours ainſi, la Suite auroit un cours abſolument infini, & un nombre infini de variations & de changemens.

666. Une Suite, qui a un Terme infiniment éloigné de ſon Origine, & par conſéquent un cours infini, eſt ordinairement cenſée finir à ce Terme, & par conſéquent elle n'a point de changement. Quelquefois auſſi on peut concevoir qu'elle revienne de ce Terme vers le Fini, auquel cas elle a un changement, & a paſſé par ce Terme infiniment éloigné.

667. Il eſt poſſible qu'une Suite, après avoir paſſé par un nombre fini de Termes finis, à chacun deſquels elle ſera arrivée par un cours fini, & où elle aura reçu un changement, tende à un Terme infiniment éloigné, où elle ne pourra arriver que par un cours infini, & où elle ne recevra plus de changement.

668. Donc par rapport aux changemens, il y a trois eſpeces de Suites, les 1res qui n'en ont point (*666*), les 2des qui en ont un nombre fini (*667*), les 3mes qui en ont un nombre infini (*665*).

669. Et par rapport au cours, il n'y a que deux eſpeces de Suites, les unes qui en ont un abſolument infini; les autres qui en ayant un fini, peuvent cependant être conçues comme en ayant un infini (*663*).

670. Jusqu'ici nous n'avons considéré les Suites de grandeurs que comme purement numériques : mais si on leur joint quelque idée d'être spécifique, il y a certaines considérations à ajouter. *Changement numérique, & spécifique.*

Lorsqu'une Suite ainsi conditionnée passe au-de-là d'un Terme, il faut que ce Terme le soit non seulement numériquement, mais encore spécifiquement, car ce qu'exigeoit l'unité de la Suite numériquement prise (641), l'unité de la Suite spécifiquement prise l'exige aussi.

671. Il n'y a que deux manieres dont un Terme puisse l'être spécifiquement. Il peut ne contenir ni l'un ni l'autre des deux êtres spécifiques qui appartiennent aux deux variations contraires, chacun à la sienne, en ce cas je l'appelle Terme *moyen*, ou il contient l'un & l'autre être spécifique, & je l'appelle Terme *commun*. *Terme moyen, & Terme commun.*

Par exemple, si on tire une Bombe obliquement à l'horison, elle a un premier cours où elle monte toujours, & un second où elle descend toujours; si je veux concevoir ces deux cours ou variations comme appartenans à une Suite où entre l'idée spécifique de variation montante & descendante, il faut que je conçoive que cette Suite passe de l'une à l'autre par un Terme qui n'est ni montant ni descendant, c'est-à-dire, par quelque étendue où la Bombe va parallélement à l'horison. C'est là un Terme moyen.

Si je suppose que deux Jets d'eau égaux, courbes, sortant de terre avec leurs convexités tournées vers la terre, & directement opposés, se rencontrent & se choquent dans leur plus grande élévation, qui sera une petite étendue verticale, quelques gouttes d'eau dans cette étendue monteront, & d'autres descendront, de sorte qu'on pourra dire que le total montera & descendra en même temps. Si j'avois pris les deux cours des deux Jets d'eau pour une seule Suite, dont l'origine auroit été fixée au point où l'un des deux sort de terre, cette Suite auroit eu une variation montante & une descendante, & le Terme par où elle passeroit pour devenir de montante, descendante, seroit l'étendue verticale où elle

ſeroit montante & deſcendante en même temps, & ce ſeroit un Terme commun.

Ce ſecond exemple, quoiqu'un peu forcé, ſuffit pour donner l'idée du Terme commun. C'eſt aſſez préſentement qu'on en apperçoive la poſſibilité.

672. Si une Suite ſpécifique & qui ſe renverſe, ne peut avoir, ou n'a pas un Terme moyen, il faut qu'elle en ait un commun; car ſon unité demande néceſſairement qu'elle ait un Terme entre ſes deux variations, & elle n'en peut avoir que de l'une ou de l'autre eſpece.

673. Le Terme moyen ne détermine pas abſolument la Suite à devenir ſpécifiquement contraire à ce qu'elle étoit; car comme il ne contient ni l'un ni l'autre des deux êtres ſpécifiques oppoſés, il peut être Terme entre le même être ſpécifique qui a toujours décru, & le même qui va croître, ou au contraire. Ainſi, ſi lorſque le cours de la Bombe eſt devenu parallele à l'horiſon, il lui ſurvenoit une nouvelle force pour la faire monter, l'étendue parallele du cours ne laiſſeroit pas de pouvoir être Terme moyen entre deux variations montantes; mais comme le Terme moyen eſt toujours Terme, & par conſéquent doit produire un changement, il faudroit que la 1re variation ayant été montante de moins en moins, la 2de le fût de plus en plus, ce qui revient à l'art. 648.

674. Le Terme commun détermine néceſſairement la Suite à devenir ſpécifiquement contraire à ce qu'elle étoit; car comme il contient les deux êtres ſpécifiques oppoſés, il faut qu'au 1er qui a regné dans la 1re variation, ſuccede le 2d dans la 2de, autrement le Terme commun contiendroit les deux êtres oppoſés, & les deux variations n'auroient que le même, ce qui feroit que le Terme commun ne le ſeroit pas; contradiction manifeſte.

675. Comme l'idée de poſitif & de négatif, j'entends négatif abſolu, renferme un être ſpécifique, une Suite ne peut devenir de poſitive négative, ſans avoir paſſé par un Terme moyen, ou commun. Ainſi dans le 1er exemple de l'art.

l'art. 469, les élevations du Soleil ſur l'horiſon ne deviennent abaiſſemens, ou grandeurs négatives, qu'après avoir paſſé par zero, c'eſt-à-dire, par une poſition du Soleil à l'horiſon, où il n'eſt ni au-deſſus ni au-deſſous; ce zero eſt donc Terme moyen. De même dans le 2d exemple du même art. les arcs que le Soleil décrit à ma droite, ne deviennent arcs décrits à ma gauche qu'après avoir paſſé par le point 90, qui n'eſt ni à ma droite, ni à ma gauche; ce point 90 eſt donc encore un Terme moyen par où ſe fait le paſſage du poſitif au négatif.

676. La nature du Terme par où ſe fait le paſſage du poſitif au négatif, c'eſt-à-dire, la détermination s'il eſt moyen ou commun, dépend de l'être ſpécifique auquel on a attaché le poſitif & le négatif. Ainſi ſi on avoit attaché ces deux idées à des Fonds & à des Dettes, on ſeroit ſûr que le paſſage ne pourroit ſe faire que par un Terme moyen qui ne fût ni Fonds ni Dette; parce qu'il ne peut y avoir un Terme commun, qui ſoit Fonds & Dette en même temps. Donc le Terme ſeroit zero.

Ce n'eſt pas qu'un Homme ne puiſſe venir à avoir des Dettes & aucun Bien ſans avoir paſſé par n'avoir ni Dettes, ni Bien, ou, ce qui revient au même, autant de Dettes que de Bien. Mais il eſt vrai qu'on ne changera rien à l'état de ſa fortune, quand on ſuppoſera qu'il a paſſé par-là, & il faudra le ſuppoſer, pour conſerver l'unité mathématique de la Suite des grandeurs qui exprimeront ſa fortune & ſes variations. Ainſi le paſſage ſe fera par zero, du moins *ſouſentendu*, ce qui ſuffit quant à préſent.

677. Tout Terme par où ſe fait le paſſage du poſitif au négatif eſt en même temps un Terme d'accroiſſement ou de décroiſſement: car une grandeur ne peut devenir ſpécifiquement contraire à ce qu'elle étoit, ſans avoir épuiſé dans ſon premier être ſpécifique tout l'être numérique dont elle étoit capable.

678. Si une Suite eſt exprimée par $\sqrt[2]{a-x}$, *a* étant Changemens

de Suites réelles en imaginaires, & réciproquement.

une grandeur constante, plus grande d'abord que x, & x une grandeur variable croissante, moindre d'abord que a, la Suite deviendra imaginaire, lorsque x sera plus grand que a, car soit alors $a - x = -z$, la Suite sera donc $\sqrt[2]{-z}$. Le passage du réel à l'imaginaire doit se faire par un Terme ou moyen ou commun. Il ne peut y en avoir un commun : car aucune grandeur ne peut être telle qu'elle soit, & en même temps ne puisse être. Il reste donc que le Terme soit moyen, & ce ne peut être que zero, qui est parfaitement moyen entre ce qui est, & ce qui ne peut être : car il est également vrai qu'une grandeur n'existe point, & n'est point pour cela précisément dans l'impossibilité d'être. Donc la Suite a passé par zero, c'est-à-dire par $\sqrt[2]{a-x} = 0$, a étant $= x$, après quoi vient $\sqrt[2]{-z}$.

679. Il suit de ce raisonnement que zero est le seul Terme par où une Suite puisse passer du réel à l'imaginaire.

680. Si après que x est devenu plus grand que a, & la Suite par conséquent imaginaire, x ne peut croître que jusqu'à un plus grand, après quoi il décroît, & redevient $= a$, ce qui fait arriver la Suite à zero une seconde fois, x continue à décroître, la Suite redevient réelle, & par conséquent il peut y avoir dans les Suites des *Vuides*, ou certains espaces dans lesquels il n'y a nulles grandeurs, après quoi il peut revenir des espaces *pleins*. Et il faut concevoir que les grandeurs impossibles de ces Vuides ne laissent pas d'être capables de variations qui suivent les mêmes loix que celles des autres, selon les art. 512, 513, 514.

681. Dans une Suite qui a plusieurs changemens, deux Termes de même nature ou espece ne sauroient être *consécutifs*, c'est-à-dire, placés dans la Suite l'un après l'autre avec une seule variation entre deux : car toute Suite qui passe par un Terme, y reçoit un changement, & par conséquent ne peut plus tendre qu'à un Terme contraire.

682. Deux termes différens ne sauroient être *contigus*,

c'est-à-dire, placés immédiatement l'un après l'autre; car l'idée de Terme suppose nécessairement une variation qui y aboutisse, & par conséquent il faut qu'il y ait toujours une variation entre deux Termes différens. Mais au lieu d'être contigus, ils peuvent en être un seul compliqué ; parce que la variation aura été telle qu'elle aura tendu, & sera arrivée à tous les deux en même temps, ce qui revient à l'art. 649.

683. Si les différences des grandeurs d'un Suite sont infiniment petites, il n'arrivera aucun autre changement à tout ce qui a été dit, sinon que les variations seront conduites par degrés infiniment petits, & par conséquent seront, pour ainsi dire, infiniment *douces*, car de chaque pas au suivant, la différence sera inexprimable & indéterminable à cause de son infinie petitesse.

Application aux Suites dont les différences seroient infiniment petites, & ce qui en resulte.

Si on appelle y une grandeur variable quelconque, dont l'accroissement ou décroissement perpetuel reglé par quelque Loi, forme une Suite, on appellera dy ses différences infiniment petites. Ces dy sont les $\frac{1}{\infty}$, & en effet ce sont des fractions ou parties infinitiémes de y, & dy est $\frac{y}{\infty}$. Si les dy sont variables, ils auront aussi des différences qui seront par rapport à eux comme les dy par rapport aux y. On les appelle ddy, & on a $ddy = \frac{dy}{\infty}$. De même les ddy pourront avoir leurs $dddy$, &c. jusqu'à ce qu'on arrive à une Suite d'Infiniment petits égaux, s'il y en a une même dans l'Infini, car cela n'arrive pas toujours (653).

684. Si lorsque les différences de y sont finies, & les pas ou degré des variations déterminés, l'unité de la Suite demande qu'il y ait à chaque changement une grandeur qui soit en même temps Terme & Origine, & Terme moyen ou commun; à plus forte raison cette même unité le demande-t-elle jointe à la *douceur* infinie, dont les variations doivent être dans cette nouvelle hipothese (683).

685. Le passage du positif au négatif qui pouvoit se faire par un zero sousentendu (676) ne peut donc plus se faire que par un zero *exprimé*.

686. En général, comme il eſt néceſſaire qu'entre deux variations il y ait un Terme ſoit naturel, ſoit arbitraire, on eſt ſûr que s'il y a un Terme naturel poſſible entre les deux variations, la Suite paſſe par-là; car avec ſes pas infiniment petits, elles ne peut manquer de le rencontrer. Donc s'il eſt ſeulement poſſible qu'entre une variation poſitive, par ex. & une negative, il y ait l'Infini ou zero, cela eſt néceſſaire. Le même raiſonnement conclut que ſi une Suite, dont les différences ſont infiniment petites, peut paſſer par l'Egalité, elle y paſſe néceſſairement.

Quant aux Termes arbitraires, il n'eſt pas beſoin d'employer ce raiſonnement, puiſqu'étant déterminés par la Loi même, la Suite ne peut manquer de les avoir.

687. Excepté dans une progreſſion géométrique, les variations de la Suite principale & de l'acceſſoire ou des acceſſoires ſont différentes : mais celle de ces variations que l'on voudra, étant réglée par une Loi, toutes les autres ſeront néceſſairement déterminées en conſéquence. Ainſi il eſt indifférent que la Loi tombe immédiatement ſur la Suite principale, ou ſur une acceſſoire quelconque. Cependant il eſt plus naturel qu'elle tombe ſur la principale, ſi elle le peut; ou ſi elle ne le peut pas, ſur une acceſſoire qui influe ſur la principale. Il ſeroit inutile, par ex. de preſcrire pour Loi que les dy, différences 1[res] des y, ou les ddy, &c. fuſſent en progreſſion géométrique, puiſque par-là les y y ſeront, & qu'il vaut mieux preſcrire cette Loi aux y mêmes.

Et comme les Suites acceſſoires n'influent point ſur la principale, paſſé la 2[de], hors dans le cas des art. 659 & 660. il ſeroit inutile hors de ce cas, que la Loi tombât ſur une Suite acceſſoire plus éloignée que la 2[de]. Mais ce qui eſt inutile n'eſt pas pour cela impratiquable.

688. Si des Suites à différences infiniment petites, au lieu d'être formées de grandeurs finies, le ſont de grandeurs infiniment petites du 1[er] ordre, ce qui rendra les différences du 2[d], il n'y aura rien de changé à tout ce qui a été dit, & les mêmes principes s'appliqueront également à cette nouvelle hipothéſe.

SECTION VIII.

Application des Théories précédentes aux Lignes droites.

689. IL n'y a point de nombre qui ne puiſſe exprimer quelque Ligne droite, ni réciproquement de Ligne droite qui ne puiſſe être exprimée par quelque nombre commenſurable ou incommenſurable; donc à tout les nombres infiniment grands ou petits répondent des lignes poſſibles infiniment grandes ou petites. Commençons par les Infinies.

Lignes infinies de tous les ordres.

690. Donc il y a des lignes Infinies poſſibles de tous les ordres d'Infini, c'eſt-à-dire, de l'ordre de ∞, ou de ∞^2, &c. & en général de l'ordre de ∞^n, ou de l'ordre de $\infty^{\frac{1}{n}}$, &c. & elles auront entr'elles les mêmes rapports finis ou infinis, que les Infinis qui les exprimeront, c'eſt-à-dire, des rapports finis, ſi les lignes infinies ſont du même ordre, infinis, ſi elles n'en ſont pas.

691. Si l'on conçoit un Triangle fini quelconque, ſes trois côtés peuvent toujours croître, & croître à l'infini, & le Triangle être toujours ſemblable, & par conſéquent trois lignes infinies feront entr'elles trois angles finis égaux aux premiers. Donc en général des lignes infinies peuvent faire entr'elles tous les angles finis quelconques.

Angles infiniment petits de tous les ordres.

692. Si le premier Triangle fini qu'on poſe d'abord, eſt iſoſcele, & que l'on conçoive qu'il n'y a que les deux côtés égaux qui croiſſent, la baſe de l'angle du ſommet demeurant toujours la même, l'angle du ſommet décroîtra toujours, & les deux égaux ſur la baſe croîtront toujours, & enfin les deux côtés égaux étant devenus infinis, l'angle du ſommet ſera infiniment petit, & les deux autres égaux chacun à un droit, moins la moitié de l'angle du ſommet, c'eſt-à-dire, égaux chacun à un droit. Donc les deux côtés égaux du Triangle iſoſcele ſeront devenus deux lignes infinies paralléles, &

la baſe toujours finie ſera infiniment petite par rapport à elles. Et comme elle ſera perpendiculaire à l'une & à l'autre, elle meſurera leur diſtance.

693. Donc en général ce qu'on appelle dans le Fini deux lignes paralleles, ſont deux lignes qui, prolongées à l'infini, font entr'elles à leur point de rencontre infiniment éloigné, un angle infiniment petit, dont la baſe eſt la diſtance finie des deux paralleles.

694. Si l'on concevoit deux paralleles infinies du ſecond ordre, dont la diſtance fût toujours finie, l'angle de la rencontre des paralleles dans l'Infini ſeroit infiniment plus petit qu'il n'étoit dans l'art. précédent, car la baſe ſeroit de deux ordres au-deſſous des côtés.

695. Et comme on peut concevoir des lignes infinies de tous les ordres, & qui feront paralleles, & auront des diſtance finies, on trouvera que ces paralleles feront toujours des angles infiniment petits d'un ordre plus bas.

696. Donc en général il peut y avoir des angles infiniment petits de tous les ordres.

Lignes infiniment petites de tous les ordres, & toujours étendues.

697. Les lignes infiniment petites d'un ordre quelconque répondent aux $\frac{1}{\infty^n}$, qui ont une grandeur, & ne ſont pas des zero abſolus, & par conſéquent elles ne ſont pas des points, mais elles ont une étendue.

698. Cela n'empêche pas qu'elles ne ſoient des points *phyſiquement* ou ſenſiblement, comme les $\frac{1}{\infty^n}$ ſont des zero relatifs, mais en elles-mêmes, ou géométriquement, ce ſont des étendues.

699. Donc tout ce qui appartient aux lignes finies, leur appartient auſſi. Elles peuvent être perpendiculaires à d'autres lignes quelconques, obliques, paralleles, en un mot, elles ont une poſition que des points abſolus n'ont pas.

700. On peut auſſi-bien concevoir un Triangle infiniment petit, dont les trois côtés ſeront des lignes infiniment petites d'un ordre quelconque, qu'un Triangle infiniment grand, ou même fini, & les trois côtés du Triangle infiniment

petit feront aussi entr'eux des angles finis, tant qu'ils seront des Infiniment petits du même ordre.

701. Mais si deux lignes infiniment petites du même ordre font entr'elles un angle dont la base soit de l'ordre immédiatement inférieur, cet angle est infiniment petit, & les deux lignes paralleles. Et plus la base sera d'un ordre inférieur à celui des côtés, plus l'angle infiniment petit baissera d'ordre. *Parallélisme susceptible de plus & de moins à l'infini, & dans tous les ordres.*

702. Donc aussi si deux lignes finies qui se rencontrent, ont une base infiniment petite du 1er ordre, elles font entr'elles un angle infiniment petit, & sont paralleles. Et leur angle est encore infiniment plus petit, si leur base est du 2d ordre d'Infiniment petit, &c.

703. Donc en général deux lignes qui se rencontrent sous un angle, dont la base est infiniment petite par rapport à elles, sont paralleles, & font entr'elles un angle infiniment petit, & cet angle est d'un ordre d'Infiniment petits d'autant plus bas, que la base est d'un ordre plus inférieur aux côtés.

704. Réciproquement si deux lignes d'un ordre quelconque se rencontrent sous un angle infiniment petit, la base de cet angle est d'un ordre inférieur à elles, & d'autant plus inférieur que l'angle infiniment petit est d'un ordre plus bas, & ces lignes sont paralleles.

705. Il est possible, mais non pas nécessaire, de concevoir deux paralleles comme faisant entr'elles un angle infiniment petit. Car on peut les concevoir comme étant toujours paralleles, même lorsqu'elles seront prolongées à l'infini, de même qu'elles l'étoient dans le fini. Mais si, lorsqu'elles seront prolongées à l'infini, on les conçoit comme se rencontrant sous un angle infiniment petit, elles seront encore paralleles à cause de l'infinie petitesse de l'angle. Ainsi on peut concevoir leur parallélisme, ou comme absolu, exact & rigoureux, ou comme infiniment peu différent de celui-là, & il n'y a pas de nécessité de le concevoir de la 2de façon, mais seulement possibilité.

706. Si deux lignes finies se rencontrent sous un angle infiniment petit, il n'y a que possibilité de les concevoir

comme paralleles, & leur parallélisme ne peut être absolu, mais seulement infiniment peu différent de l'absolu. Ainsi dans ce cas là on peut les considérer encore selon l'angle infiniment petit qu'elles font entr'elles.

707. Il en va de même de deux lignes infiniment petites, qui font entr'elles un angle infiniment petit.

708. Le parallélisme non-absolu consistant donc toujours en ce que deux lignes font entr'elles un angle infiniment petit, si deux lignes sont paralléles de ce parallélisme, elles ne peuvent se rencontre qu'à une distance qui soit de l'ordre immédiatement supérieur à celui dont est la base de l'angle infiniment petit. Ainsi si la base de cet angle est une ligne finie, les deux lignes paralleles ne peuvent se rencontrer qu'à une distance infinie, ou dans l'Infini (*692*). Si la base est infiniment petite du 1[er] ordre, les deux paralleles se rencontrent à une distance finie, &c.

709. Le parallélisme absolu n'est point susceptible de plus & de moins, mais le non-absolu en est susceptible, car l'angle infiniment petit peut être plus ou moins grand.

710. Le parallélisme non-absolu est même susceptible de tous les ordres, puisque l'angle infiniment petit peut être de tous les ordres d'infiniment petits (*696*).

711. Donc deux lignes paralleles d'un parallélisme non-absolu peuvent être plus ou moins paralleles à l'infini, & infiniment plus ou moins paralleles selon tous les ordres d'Infini que deux autres paralleles.

On peut le voir encore ainsi. Soient deux droites égales *A* & *B*, perpendiculaires sur une même base droite *C*, la ligne *D* qui passera par leurs extrémités sera parallele à la base *C*. Si *B* est plus grande que *A* d'une différence infiniment petite, *D* sera encore parallele à *C*, mais non d'un parallélisme absolu, comme dans le 1[er] cas. Plus la différence de *A* & *B* sera grande, étant toujours de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, moins *D* & *C* seront paralleles, & enfin elle ne cesseront entiérement de l'être, ou ne deviendront obliques l'une à l'autre, que quand la

la différence de *A* & de *B* sera finie. Que si au contraire la différence de *A* & de *B*, étant de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, étoit décroissante, *D* & *C* seroient toujours plus paralleles; & enfin quand cette différence seroit devenue $= \frac{1}{\infty^2}$, *D* & *C* seroient infiniment plus paralleles, mais non encore d'un parallélisme absolu : & il ne le deviendroit que quand la différence auroit passé par tous les ordres d'Infiniment petits, & seroit devenue zero absolu.

Dans les recherches géométriques, & dans le calcul, le parallélisme non-absolu est le même que l'absolu, comme $1 + \frac{1}{\infty} = 1$, & par la même raison. Mais quoique la différence de ces deux especes de parallélisme nous échappe, il y a des occasions où il est bon de les distinguer ; comme il y en a où il faut prendre $1 + \frac{1}{\infty}$ tel qu'il est, & non pas $= 1$ (416).

712. Tout ce qui a été dit du parallélisme s'applique de soi-même à la perpendicularité, & l'on verra aisément qu'il y a une perpendicularité absolue, & une non-absolue qui peut décroître selon tous les degrés d'un ordre, jusqu'à devenir obliquité, ou au contraire croître selon tous les ordres d'Infini jusqu'à ce qu'elle devienne perpendicularité absolue. *Et de même la perpendicularité.*

Pour entendre nettement cette perpendicularité croissante, il n'y a qu'à concevoir que dans le Triangle rectangle *MRm*, dont les trois côtés sont finis, l'hypotenuse *Mm* oblique sur *MR* s'approche toujours en décroissant de la perpendiculaire *Rm*, & tend à se confondre avec elle. *Mm* sera oblique tant que *MR* sera d'une grandeur finie, quoique cette grandeur soit toujours moindre. Lorsque *Mm* se sera tant approchée de *Rm*, que *MR* ne sera plus que de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, *Mm* sera perpendiculaire, mais non pas d'une perpendicularité absolue, car elle ne sera pas encore entiérement & exactement confondue avec *Rm* : elle le sera plus, lorsque *MR* ne sera que de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, plus encore, lors- FIG II.

que *MR* sera de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$, & ainsi à l'infini, & par conséquent *Mm* sera toujours de plus en plus perpendiculaire, & enfin elle le sera absolument, lorsque *MR* sera zero absolu.

Suites infinies de Lignes, qui sont des Ordonnées posées parallélement sur un Axe.

713. On peut concevoir, ainsi que des Suites de nombres, des Suites de lignes droites, ou finies, ou infinies, ou infiniment petites, ou originairement formées de lignes finies & terminées par des lignes infiniment grandes ou petites. Mais comme on rapporte toutes les Suites de nombres à la Suite naturelle, ne fût-ce que pour leur donner les dénominations de 1[er], 2[d], 3[me], &c. de même il faut concevoir les Suites quelconques de lignes disposées parallélement selon leur grandeur sur une ligne commune, qu'on appelle en général *diametre*, & en particulier *axe*, si les lignes, qui y sont disposées, lui sont perpendiculaires, ce qui est la supposition la plus naturelle, & la plus ordinaire. Les lignes disposées sur un diametre ou axe s'appellent *Ordonnées* ou *Appliquées*.

714. L'axe étant conçû divisé en une infinité de parties égales, elles représentent la Suite infinie des Unités, & leurs sommes, à compter de l'origine de l'axe, sont en progression arithmétique naturelle, & représentent la Suite naturelle *A*. Les Ordonnées posées sur tous les points de division de l'axe, peuvent croître ou décroître selon telle Loi qu'on voudra.

715. Il est plus naturel, mais non pas nécessaire, que l'axe soit conçû divisé en parties égales, & on peut le diviser en parties qui suivront telle Loi qu'on voudra. Les sommes consécutives de ces différentes parties égales ou inégales, correspondantes chacune à une Ordonnée, s'appellent *Abscisses* ou *Coupées*.

716. Une droite finie quelconque étant prise pour axe, & conçûe divisée en une infinité de parties égales de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, si l'on conçoit de plus que sur chaque point de division soit élevée une Ordonnée, qu'elles suivent toutes comme leurs Abscisses correspondantes la progression arithmétique

naturelle, & que la derniére soit finie comme son Abscisse, qui est l'axe entier, il est clair que ces Ordonnées ne pourront représenter les nombres de *A*, qui sont de deux ordres différens, à moins qu'elle ne soient aussi de deux différens ordres; & que puisque la derniere ou plus grande est finie, il y en aura vers l'origine de leur Suite ou de l'axe, qui ne seront que de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$. Donc les Ordonnées de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ représenteront les nombres finis de *A*, & les Ordonnées finies représenteront les Infinis de *A*. Donc puisqu'il y a dans *A* une infinité de Finis, & une infinité beaucoup plus grande d'Infinis, il y aura une infinité de ces Ordonnées de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & une infinité beaucoup plus grande de Finies.

Et en effet on voit déja qu'en joignant par une ligne droite oblique à l'axe les extrémités de toutes ces Ordonnées, il se formera un Triangle rectangle, dont elles rempliront l'aire; que l'on n'en pourra trouver une finie vers le sommet du Triangle, quelque petite qu'elle soit, que quand on prendra une partie finie de l'axe; que cette partie finie de l'axe étant composée d'une infinité de parties de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, la premiere & plus petite ordonnée finie que l'on concevra, sera précédée par conséquent d'une infinité d'Ordonnées de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$; & qu'après elle il en viendra une infinité beaucoup plus grande de Finies. Cela représente à l'œil ce que nous avons dit tant de fois sur la Suite naturelle *A*, qui, quant au nombre, aux rapports, & aux différens ordres de ses grandeurs, est précisément la même chose que la Suite des Ordonnées de ce Triangle.

717. Ce qui fait que ce Triangle ne représente que les rapports, & non l'absolu de *A*, c'est qu'on a pris un axe fini, divisé en parties égales de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, dont chacune représentoit une Unité finie de *A*, de sorte que les différences constantes des Ordonnées n'ont été aussi que des $\frac{1}{\infty}$. Mais si on avoit pris un axe $= \infty$, divisé en une infinité de par-

ties toutes = 1, on auroit eu dès les premiers points de division des Ordonnées finies, qui eussent représenté l'absolu des nombres finis qui sont à l'origine de *A*. Aussi n'auroit-on pû jamais avoir actuellement, ou tracer qu'un nombre fini de ces Ordonnées, encore moins eût-on pû tracer les infinies qui auroient dû les suivre, & l'on n'eût eu qu'une représentation très-incomplete de *A*.

718. A^2 ayant des nombres de trois ordres, des Finis en nombre fini, des ∞, & des ∞^2 en nombre infini croissant (210), cette Suite peut être représentée par des Ordonnées de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, de $\frac{1}{\infty}$, & du Fini, ou de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, du Fini, & de ∞, ou du Fini, de ∞, & de ∞^2; toutes conservant les rapports des quarrés des nombres naturels. Et en général il est évident qu'il n'y a point de Suite de nombres qui ne puisse être représentée par des Ordonnées disposées sur un axe, ou diametre, ce qui suffit quant à présent.

Lignes positives, négatives, & imaginaires.

719. Si les lignes sont susceptibles de l'idée du positif & du négatif, il faut que ce soit par quelque être spécifique. Or on n'y peut jamais considerer que deux choses, leur grandeur, & leur position. Leur grandeur est certainement leur être numérique, dont il faut que le spécifique soit entiérement distinct; il faut même, autant qu'il est possible, que le spécifique ne touche point au numérique; c'est-à-dire, qu'il ne doit ni augmenter ni diminuer la grandeur, mais lui être absolument indifférent. La position d'une ligne par rapport à une autre ligne consiste à lui être ou perpendiculaire, ou oblique, ou parallele: mais outre que ces différentes positions feroient varier dans presque tous les cas la grandeur d'une ligne, & ne feroient pas par conséquent indifférentes à leur être numérique, il est clair que cette idée de position ne peut convenir ni aux Abscisses, qui ne sont qu'une même ligne plus ou moins grande, ni aux Ordonnées, qui sont toutes perpendiculaires à l'axe, ou également obliques sur un diamétre. Donc si ces lignes sont capables d'être spécifiques, il consiste en quelque autre chose.

720. Il faut néceſſairement déterminer une Origine à l'axe, c'eſt-à-dire, un point d'où parte la 1[re] Ordonnée. Cette Origine étant arbitrairement déterminée, car elle ne peut l'être autrement, il faut que les Abſciſſes prennent leur cours ou à la droite ou à la gauche de l'Origine, &, s'il eſt poſſible, qu'elles prennent leur cours & à la droite & à la gauche, les Abſciſſes d'une part & les Abſciſſes de l'autre auront donc des poſitions contraires par rapport à leur Origine commune: & ſi celles qui ſont à la droite ont été qualifiées de poſitives, celles qui ſeront à la gauche ſeront négatives, ou au contraire. Ce ſera donc là leur être ſpécifique.

721. De même il faut déterminer arbitrairement ſi les Ordonnées ſeront poſées au-deſſus ou au-deſſous de l'axe, car cela eſt entiérement indifférent, & s'il eſt poſſible qu'il y en ait tant au-deſſous qu'au-deſſus, elles auront par rapport à l'axe des poſitions contraires, en quoi conſiſtera leur être ſpécifique, & ſi les ſuperieures ont été qualifiées de poſitives, les inférieures ſeront négatives, ou au contraire.

722. Il eſt évident que les Abſciſſes ne peuvent être poſitives & négatives que de la maniere qui a été dite. Mais on pourroit croire que les Ordonnées le devroient être auſſi de la même maniere: car celles qui ſeront à la droite de l'origine de l'axe, auront une poſition contraire à celles qui ſeront à la gauche. Mais ce qui fait que cela n'eſt pas, c'eſt que pour déterminer une Ordonnée, qui eſt à la gauche de l'origine de l'axe, il ſuffit d'avoir déterminé que l'Abſciſſe qui lui répond eſt négative. Ainſi le poſitif & le négatif des Ordonnées ne doit conſiſter que dans leur poſition, au-deſſus ou au deſſous de l'axe, comme le poſitif & le négatif des Abſciſſes ne conſiſte que dans leur poſition, à la droite ou à la gauche de l'origine de l'axe.

On a déja vû des exemples de ces deux eſpeces de poſitif & de négatif dans l'art. 469, parce qu'ils étoient tirés d'arcs ou de lignes qui ne peuvent avoir que ces deux manieres d'être poſitives ou négatives.

723. On voit aſſez que le quarré d'une Ordonnée ſupé-

rieure par une inférieure égale ne ſera qu'imaginaire ; parce que ſi on vouloit tracer réellement un quarré ſur une Ordonnée ſupérieure, il faudroit que ce quarré fût auſſi entiérement au-deſſus de l'axe. C'eſt la même choſe pour le quarré d'une Abſciſſe poſitive par une négative égale. De-là s'enſuit tout ce qui peut appartenir à ces grandeurs entant que réelles ou imaginaires.

724. Si l'on conçoit que les différences des Ordonnées ſoient finies, il faut, pour la correſpondance des diviſions de l'axe aux Ordonnées, concevoir auſſi ces diviſions finies, ou, ce qui eſt la même choſe, les différences des Abſciſſes. Mais ſi on conçoit les différences des Ordonnées infiniment petites du 1er ordre, il faut concevoir auſſi les diviſions de l'axe infiniment petites de ce même ordre, & par conſéquent les Ordonnées infiniment proche les unes des autres, ou chacune de ſa conſécutive.

725. Les différences quelconques, ſoit des Abſciſſes, ſoit des Ordonnées, ne ſont point proprement & par elles-mêmes ſuſceptibles de l'idée du poſitif & du négatif : car elles n'ont point de poſition qui leur appartienne, elles n'ont que celle des grandeurs dont elles ſont différences & parties. Elles n'ont le + que parce qu'elles ſont ajoûtées à des grandeurs croiſſantes, ni le — que parce qu'elles ſont retranchées de grandeurs décroiſſantes.



SECTION IX.

Idée générale des Lignes Courbes.

726. IL n'y a point de Lignes qui ne puisse être conçûe comme décrite par le mouvement d'un point qui coule. La Ligne droite est décrite par un point dont le mouvement a toujours la même direction, & la Ligne Courbe dont l'idée est opposée à celle de la droite, sera donc décrite par un Point dont le mouvement changera toujours de direction. Il faut voir maintenant ce que c'est que changer toujours de direction. Le Point décrivant n'en peut changer qu'après chaque pas ou chemin fini, ou après chaque pas infiniment petit; il n'en peut changer que finiment, ou infiniment peu.

Différentes manières dont on pourroit concevoir la formation des Courbes, & celle dont il la faut concevoir.

727. Si le Point décrivant change finiment de direction après un pas fini, auquel selon la supposition succede un second pas fini, ce sont deux lignes droites finies qui font entr'elles un angle fini, & tout le mouvement quelconque du Point produit un assemblage de droites finies, qui font entr'elles certains angles; c'est-à-dire, que le tout est un *Poligone rectiligne*.

728. Si le Point décrivant change finiment de direction après un pas infiniment petit, & ainsi de suite, il se forme un assemblage de lignes droites infiniment petites, qui font entr'elles des angles finis, ou, pour ne pas éviter une expression que l'idée demande, un Zic-zac, dont tous les angles sont finis, & les côtés infiniment petits. Or il est manifeste que ce n'est pas là ce qu'on entend par une Courbe, & que cette figure ne pourroit jamais être décrite: car ses côtés infiniment petits devroient être distincts les uns des autres à cause des angles finis qu'ils feroient entr'eux, mais par la même raison que tout Infini en grandeur ou en petitesse est inexprimable en nombres, il est indescriptible en ligne, & par conséquent

les côtés du Zic-zac infiniment petits, & diſtincts les uns des autres, devroient & ne pourroient être décrits.

729. Si le Point décrivant après un pas fini, change infiniment peu de direction, ſon ſecond pas eſt en ligne droite avec le premier à cauſe de la petiteſſe infinie du changement de direction, & par conſéquent il ne ſe forme dans cette hipothéſe qu'une ligne droite.

730. Donc il reſte pour la deſcription de la Courbe que le Point décrivant à chaque pas infiniment petit, change infiniment peu de direction.

731. Si la Courbe étoit le Zic-zac de l'art. 728, elle auroit la plus grande oppoſition poſſible à la ligne droite : car rien n'eſt plus oppoſé à ne changer jamais de direction après aucun pas fini, que d'en changer toujours finiment après chaque pas infiniment petit; & il eſt viſible que de n'en changer qu'infiniment peu à chaque pas infiniment petit, eſt une moindre oppoſition. Elle eſt même ſi petite, qu'on peut concevoir la ligne droite comme changeant infiniment peu de direction après un pas fini, ainſi qu'on a vû dans l'art. 729; en quoi conſiſte donc l'oppoſition de la droite & de la Courbe? C'eſt que la Courbe changeant infiniment peu de direction à chaque pas infiniment petit, dès que le nombre de ces pas eſt infini, la ſomme en eſt finie, & par conſéquent auſſi celle des changemens de direction, d'où il ſuit qu'après une étendue finie de la Courbe, quelque petite qu'elle ſoit, il y a un changement de direction fini, au lieu qu'après une étendue finie quelconque de la ligne droite, il n'y a aucun changement de direction fini, & l'Infiniment petit qu'on y ſuppoſeroit ne feroit rien, & n'empêcheroit pas la rectitude de la ligne.

732. De-là il ſuit qu'une droite qui à chaque pas fini quelconque changeroit infiniment peu de direction, ſeroit toujours une droite tant qu'elle ſeroit finie, mais deviendroit Courbe, ou changeroit de direction dès qu'elle ſeroit infinie : car au nombre infini de ſes pas finis répondroit un même nombre infini de changemens de direction infiniment petits qui

qui feroient une somme finie. Mais cette Courbe seroit d'une nature différente des Courbes que nous connoissons, & qui le sont dans des étendues finies quelconques. Cependant cette idée peut avoir lieu en certains cas, & l'aura dans la suite.

733. Nous concevons toujours que les changemens de direction de la Courbe sont des Infiniment petits du 1er ordre, puisqu'il suffit de les prendre de cet ordre, aussi-bien que les pas de la Courbe. Mais si l'on concevoit que les pas étant toujours de ce 1er ordre, les changemens de direction fussent du 2^d^, il s'ensuivroit qu'après un nombre infini de pas de la Courbe, ou quand elle auroit une étendue finie, elle n'auroit qu'un changement de direction infiniment petit du 1er ordre, & par conséquent seroit encore ligne droite, & que ce ne seroit qu'après une étendue infinie qu'elle auroit un changement de direction fini, ou deviendroit Courbe, ce qui retombe dans l'art. précédent, dont le cas est le parfait équivalent de celui-ci.

734. Ces sortes de Lignes infinies qui seroient droites tant qu'elles auroient des étendues finies, & Courbes quand elles en auroient d'infinies, peuvent toujours être conçues comme ayant un nombre fini de parties infinies, telles que des moitiés, des tiers, &c. & par conséquent elles auroient à chacune de ces parties un changement de direction fini, ce qui les rendroit essentiellement différentes des droites, qui le sont toujours, dans quelque étendue infinie que ce soit, & en même temps différentes des Courbes ordinaires, qui ont un changement de direction fini dans la plus petite étendue finie.

735. Il seroit impossible ou inutile de concevoir les pas de la Courbe comme infiniment petits du 2^d^ ordre. Car ou l'on concevroit en même temps les changemens de direction comme infiniment petits du 1er, auquel cas, après une étendue infiniment petite du 1er ordre, qui seroit la somme d'une infinité de pas infiniment petits du 2^d^, il y auroit un changement de direction fini, ce qui feroit la ligne indescriptible de l'art. 728, où l'on concevroit les changemens de direction

infiniment petits du 2^d ordre, comme les pas, ce qui ne feroit que ce que font les pas infiniment petits du 1er ordre avec des changemens de direction du même ordre.

Ce raisonnement ne conclut pas qu'il ne puisse y avoir une Courbe dont les pas soient infiniment petits du 2^d ordre avec des changemens de direction du 1er, mais seulement qu'une telle Courbe seroit indescriptible, & ne seroit pas par conséquent de la nature de celles que nous connoissons.

Il n'empêche pas non plus que dans quelque Courbe descriptible & que nous connoîtrons, il ne puisse y avoir quelque pas infiniment petit du 2^d ordre; mais seulement la Courbe n'en sera pas toute composée, puisqu'on la suppose descriptible.

736. Donc la Courbe en général, & par rapport à nos connoissances, est un assemblage de lignes droites infiniment petites du 1er ordre, dont chacune se détourne infiniment peu de celle qui la précéde ou la suit, ou, ce qui est le même, fait avec elle un angle infiniment petit du 1er ordre. Ces petites droites s'appellent les *côtés* de la Courbe, qui est par conséquent un *Poligone rectiligne dont les côtés sont infiniment petits.* On sousentend qu'ils se détournent infiniment peu les uns des autres.

737. Et comme il n'y a point de Courbe qui n'ait au moins une étendue finie, & qu'il faut une infinité d'infiniment petits du 1er ordre, pour faire une somme ou grandeur finie, toute Courbe, dans quelque étendue finie qu'on la prenne, est un *Poligone rectiligne infiniti-latere*, ou un *Poligone infini*, en sousentendant que ses côtés sont droits, infiniment petits, & se détournant infiniment peu. Et si la Courbe a une étendue infinie, c'est un Poligone infiniment infini (*626*).

738. Chaque côté d'une Courbe est inassignable & indéterminable, puisqu'il est infiniment petit. Cependant il a une direction, ou, ce qui est le même, une étendue (*697*), mais sensiblement ou physiquement nulle (*698*).

Ce que c'est que l'angle de contingence de la Courbe.

739. Afin que le changement de direction d'un côté quelconque au suivant soit infiniment petit, il faut que les deux côtés *AB*, *AC*, soient infiniment peu éloignés d'être

en ligne droite, & par conséquent que l'angle *ABC* differe infiniment peu d'un angle de 180 degrés, & que l'angle de complément *DBC* soit infiniment petit. On appelle l'angle *DBC, angle de contingence.* FIG. I.

740. Puisque l'angle de contingence *DBC*, qui est le changement de direction du côté *AB* au côté *BC*, est infiniment petit du 1er ordre, & que *BC*, l'un de ses côtés, est infiniment petit du 1er ordre, étant côté de la Courbe, ce qui fait que *BD* doit être aussi conçû du même ordre, la base de cet angle sera une ligne infiniment petite du 2^d ordre (704).

741. Donc aussi son Sinus, qui sera sa mesure, en prenant pour Sinus total le côté *BC*, sera une ligne infiniment petite du 2^d ordre.

742. De ce que chaque côté de la Courbe est inassignable & indéterminable (738), il suit qu'on ne peut déterminer que le côté *AB*, supposé que *A* ne soit pas le premier point de la Courbe, commence au point *A* & finisse au point *B*, ni que le côté *BC* commence en *B*, & finisse en *C*. Par conséquent on peut prendre *AB* & *BC* ensemble pour un seul côté de la Courbe, ou *AB* & une partie de *BC*, telle que *Bb*, ou seulement la ligne *Aa*, ou *aBb*. Enfin *ABC* étant une portion infiniment petite de la Courbe, il est libre de la prendre, ou pour un seul côté, ou pour une partie d'un côté, ou pour plusieurs côtés, en tel nombre fini qu'on voudra; car cette portion étant infiniment petite, elle peut n'être, ou qu'une petite droite, ou portion de droite, sans aucun changement de direction, ou plusieurs petites droites qui n'auront qu'un nombre fini de changemens de direction infiniment petits, qui tous ensemble n'empêcheront point toutes ces petites lignes d'être posées bout à bout en ligne droite.

743. Si on conçoit *AB* & *BC* comme deux côtés, alors cette idée emporte nécessairement qu'il y ait entr'eux un angle *ABC*, comme au point *B*.

744. Donc de l'infinie petitesse des côtés d'une Courbe, qui les rend indéterminables, il suit que la division d'une Courbe en ses côtés est entierement arbitraire, c'est-à-dire,

qu'on peut les concevoir égaux ou inégaux, ſelon telle raiſon qu'on voudra, pourvû que cette diviſion étant établie, on conçoive toujours entre deux côtés conſécutifs un angle *A B C*.

745. De cette diviſibilité arbitraire de la Courbe qui peut produire des diviſions différentes à l'infini, & de ce qu'entre deux côtés conſécutifs, il y a toujours un angle *ABC*, il ſuit qu'il n'y a aucun point de la Courbe où il ne ſe faſſe un changement de direction infiniment petit.

Angle de contingence croiſſant ou décroiſſant. Idée de la courbure croiſſante ou décroiſſante.

746. L'angle de contingence *D B C* a une grandeur, & par conſéquent peut croître ou décroître.

747. S'il croît, il ſemble qu'il doive être capable de devenir infiniment plus grand qu'il n'étoit, c'eſt-à-dire, fini. Mais s'il le devenoit, la diviſion de la Courbe ne ſeroit plus arbitraire en cet endroit; car on ne pourroit plus prendre pour une ſeule ligne droite *A B* & *B C*, qui feroient entr'eux un angle obtus *A B C*, dont le complément *DBC* ſeroit fini. Il eſt vrai qu'on pourroit dire qu'il ſuffiroit que par-tout ailleurs la diviſion de la Courbe fût arbitraire, mais on prouvera dans la ſuite que l'angle *D B C* ne peut jamais être fini.

748. S'il décroît, rien n'empêche qu'il ne devienne $= 0$, auquel cas il faut concevoir l'angle *A B C* comme étant exactement de 180 degrés, & les deux côtés *A B*, *BC*, exactement poſés bout à bout en ligne droite. Alors ces deux côtés peuvent encore n'être pris que pour un ſeul, & ne ſont ſenſiblement qu'un point.

749. Si l'angle *DBC* devient, non pas abſolument zero, mais infiniment petit du 2[d] ordre, c'eſt encore la même choſe; car les deux côtés *AB*, *BC*, qui approchoient infiniment d'être poſés en ligne droite, venant à en approcher encore infiniment davantage, doivent être conçus comme poſés en ligne droite, quoique ce ne ſoit pas à la derniere rigueur. Il en faudra dire autant de l'angle *DBC*, devenu infiniment petit du 3[me] ordre, &c. Tout cela revient aux lignes paralleles plus ou moins paralleles de la Sect. VIII, & dépend des mêmes principes. Ici une ligne droite eſt plus ou moins droite ſelon qu'il y faut concevoir des angles ou changemens de

direction d'un ordre d'Infiniment petit plus ou moins bas. Et en effet, dans une ligne absolument droite, il n'en faudroit absolument concevoir aucun.

750. Puisque la courbure d'une Courbe consiste dans ses changemens de direction ou angles infiniment petits *DBC* à chaque pas infiniment petit, & que les pas ou côtés de la Courbe, & les angles *DBC*, peuvent être plus ou moins grands, la courbure sera d'autant plus grande, qu'un côté sera plus petit, & l'angle *DBC* plus grand, de sorte que la courbure sera croissante, si les côtés sont décroissans, & les angles *DBC* croissans; car il est visible que se détourner davantage après un moindre chemin en ligne droite, c'est s'éloigner davantage de la rectitude. Ce sera le contraire si les côtés sont croissans, & les angles *DBC* décroissans. Et si les côtés sont toujours égaux, & les angles *DBC* aussi, la courbure sera toujours la même, ou uniforme.

751. On voit assez par-là qu'il ne peut y avoir qu'une seule espece de Courbe dont la courbure soit uniforme, & que toutes les autres doivent avoir une courbure croissante ou décroissante.

752. La division d'une Courbe en ses côtés étant entiérement arbitraire, on peut concevoir les côtés tous égaux, auquel cas on n'a plus pour la courbure que les angles *DBC* croissans ou décroissans, à considérer. Ou bien on peut concevoir la Courbe tellement divisée, que tous les angles *DBC* qui seront aux points de division soient égaux, & on n'aura plus à considérer que les côtés croissans ou décroissans : car si la Courbe est supposée faire des pas toujours égaux, il faut pour une courbure croissante, qu'elle se détourne toujours davantage, ou au contraire pour une courbure décroissante; & si elle est supposée se détourner toujours également, il faut pour une courbure croissante, qu'elle fasse toujours de plus petits pas en ligne droite, ou au contraire.

753. Puisque tous les côtés de la Courbe ont chacun leur direction particuliere, si on rapporte la suite *AMm* de différens côtés infiniment petits, où la Courbe *AMm* a une *Différentes positions des parties de la*

Courbe par rapport à un même axe.

FIG. II.

ligne droite *AB*, ils auront tous par rapport à cette ligne leur position particuliere; par exemple, le côté *Mm* aura par rapport à *AB* une position que les précédens ni les suivans n'auront point, ou, ce qui revient au même, *Mm* étant conçu prolongé jusqu'à *AB*, l'angle *ATM* sera différent de celui que feroient sur *AB* les autres côtés pareillement prolongés. Il est clair qu'il n'y a pas d'autre moyen de considérer les différentes directions des côtés, que de les rapporter tous à une ligne droite commune.

754. Si des deux extrémités du côté *Mm*, & pareillement de celles de tous les autres côtés, on mene sur *AB* les perpendiculaires *MP*, *mp*, &c. ces lignes sont *Ordonnées* ou *Appliquées* à l'*axe* *AB*. Et parce que les côtés *Mm* sont infiniment petits du 1[er] ordre, les distances *Pp* ou *MR* de deux Ordonnées consécutives, & leurs différences $pm - PM = Rm$, sont des Infiniment petits de ce même ordre.

Mouvement composé de chaque côté infiniment petit de la Courbe.

755. L'axe *AB* étant conçu comme une ligne horisontale, ce qui est entierement arbitraire, un côté quelconque *Mm* oblique à cet axe, est l'hypothenuse d'un Triangle rectangle, dont les deux autres côtés sont la ligne horisontale *MR*, & la verticale *Rm*. Donc tout côté *Mm* oblique à l'axe représente un mouvement infiniment petit de la Courbe, composé d'un horisontal & d'un vertical.

756. L'origine de la Courbe *AMm* étant au point *A*, & son étendue jusqu'au point *m* finie, il est clair qu'elle est la somme d'une infinité de côtés *Mm*, qui ont eu une direction composée de l'horisontale & de la verticale, que l'*Abscisse* *Ap* correspondante à la somme de tous ces côtés, est la somme de tout ce qu'il y a eu d'horisontal dans leurs directions, & l'Ordonnée *pm* la somme de tout ce qu'il y a eu de vertical: ou, pour parler plus exactement, car les idées d'horisontal & de vertical ne sont employées ici qu'afin de rendre l'image plus sensible, *Ap* est la somme de toutes les distances infiniment petites *Pp* qui ont été entre les Ordonnées, & *pm* est la somme de toutes leurs différences infiniment petites *Rm*, les distances *Pp* & les différences *Rm* ayant été en un même nombre infini.

757. Dans une étendue finie quelconque *Ap* de l'axe, il y a une infinité d'Ordonnées infiniment proches, qui répondent à une égale infinité de côtés *Mm*.

758. Au point *A* de l'origine d'une Courbe, il faut lui concevoir une Ordonnée infiniment petite, & ne lui en concevoir point d'autres jusqu'à ce que la Courbe ait une étendue finie. Ces Ordonnées sont infiniment petites du 1er ordre, leurs distances sont toujours des *Pp*, & leurs différences des *Rm* du même ordre qu'elles. Et ce n'est que quand ces Ordonnées sont en nombre infini, que la Courbe a une étendue finie, & une premiere Ordonnée finie, qui est la somme de toutes les différences des Ordonnées précédentes. Il est clair que cette premiere Ordonnée finie est indéterminable, & ne peut être déterminée qu'arbitrairement.

759. Puisque chaque étendue finie de la Courbe a une infinité de *Mm*, ausquels répondent une infinité égale d'Ordonnées, de *Pp*, & de *Rm*, si la Courbe a une étendue infinie, il y a une infinité d'infinités de *Mm*, d'Ordonnées, de *Pp*, & de *Rm*.

760. Puisque les Ordonnées étant infiniment proches, il n'y a aucun point de la Courbe où il ne se termine une Ordonnée, la Courbe peut aussi-bien être conçue comme la Suite des extrémités de toutes les Ordonnées, que comme une Suite de côtés *Mm*. Donc on a la Courbe, si on a la grandeur de toutes les Ordonnées *PM* ou *pm*, ou, ce qui revient au même, le rapport de chaque Abscisse *AP*, ou *Ap*, a son Ordonnée correspondante *PM* ou *pm*. Donc la connoissance du rapport des Abcisses aux Ordonnées, renferme toute la connoissance de la Courbe. *Ce qui est nécessaire pour la connoissance des Courbes. Leur Equation ou Loi.*

761. Si ce rapport étoit constant, c'est-à-dire, si une Abscisse quelconque étoit à son Ordonnée comme une autre Abscisse à la sienne, il est aisé de voir que ce qu'on auroit supposé être une Courbe, ne seroit que l'Hypothenuse d'un Triangle rectangle, dont une Abscisse & une Ordonnée quelconques seroient les deux autres côtés, comme

dans l'art. 716. Donc il faut que dans une Courbe, le rapport des Abſciſſes aux Ordonnées ſoit inceſſamment variable.

762. Mais il faut en même temps qu'il ſoit *perpétuel*, c'eſt-à-dire, entre ces grandeurs toujours *conditionnées* de la même maniere. Ainſi ne pouvant être toujours le même entre les Abſciſſes & les Ordonnées, parce qu'il n'en réſulteroit qu'une ligne droite, il pourra être, par exemple, entre les Abſciſſes & les quarrés des Ordonnées, ou leurs cubes, &c. & alors il eſt variable, ce qui eſt évident & perpétuel, parce qu'il eſt toujours entre les Abſciſſes & les mêmes puiſſances des Ordonnées. On voit aſſez qu'il peut y avoir une infinité d'autres manieres de le rendre variable & perpétuel, & que chacune de ces manieres produira une différente eſpece de Courbe.

763. Il faut une Loi particuliere pour déterminer chaque rapport perpétuel, & l'expreſſion algébrique de cette Loi s'appelle l'*Equation de la Courbe*.

764. Toute variation demande quelque choſe d'invariable & de conſtant, qui ſoit comme le point fixe par rapport auquel ſe faſſe tout le mouvement de la variation. Donc parmi les grandeurs qui compoſent la Courbe, & qui ſont les *Mm*, ou celles qui y ont rapport, qui ſont les *Pp*, ou les *Rm*, il faut en choiſir quelques-unes qui ſeront ſuppoſées conſtantes, tandis que les autres varieront. Et ce choix eſt entiérement libre, parce que quelque choix que l'on faſſe, il n'en arrivera autre choſe, ſinon que la Courbe ſera différemment diviſée en ſes côtés, or cette diviſion eſt arbitraire. La plus ordinaire des trois ſuppoſitions & la plus commode eſt celle des *Pp* conſtans, moyennant quoi les Abſciſſes croiſſent ſelon la progreſſion arithmétique naturelle, tandis que les Ordonnées varient ſelon la loi quelconque preſcrite par l'Equation.

765. Le rapport des Abſciſſes aux Ordonnées, exprimé par l'Equation de la Courbe, ſe maintient dans l'Infiniment petit, & dans l'Infini, c'eſt-à-dire, lorſque la Courbe n'a encore qu'une étendue infiniment petite, & lorſqu'elle en a une infinie,

infinie, si elle en a une telle. Car ce rapport est perpétuel, & d'ailleurs tout rapport peut être également entre des grandeurs finies, ou infiniment grandes, ou petites.

766. L'Axe & les Ordonnées sont des lignes étrangeres à la Courbe, & sans lesquelles on peut absolument la concevoir. De-là il suit que la position de l'Axe par rapport à la Courbe est indifférente, c'est-à-dire, qu'au lieu de rapporter la Courbe *AMm* à l'axe *AB*, on peut la rapporter à l'axe *ab* parallele au premier, ou à l'axe *αβ* perpendiculaire à tous les deux, ou même à un autre axe qui leur soit oblique. Mais un axe étant posé, il emporte la position des Ordonnées qui lui sont toujours perpendiculaires, non par aucune néceſſité tirée de leur nature, mais par une supposition arbitraire qui a prévalu, parce qu'elle est plus simple & plus commode que ne seroit celle des Ordonnées obliques à une ligne droite commune, qu'on appelleroit alors *diametre.*

767. Puisqu'il est indifférent à quel axe on rapporte une Courbe, on peut lui en concevoir deux en même temps. Ainsi si la Courbe *AMm* se termine au point *β*, on peut lui concevoir *Aa* & *αβ* comme deux axes perpendiculaires l'un à l'autre, ensorte que la derniere des Ordonnées prises sur l'un sera l'autre axe même. En ce cas-là les Abscisses & les Ordonnées prises indifféremment sur l'un ou l'autre, s'appellent *Coordonnées.* On appelle auſſi les deux axes *Conjugués.*

768. La Courbe *AMm* est concave vers l'axe *AB*, mais si on avoit pris *ab* pour axe, elle seroit convexe vers lui. Sa concavité vers *AB* vient de ce que les angles obtus *ABC* de ses côtés sont tournés vers *AB*, & par conséquent les angles de contingence du côté opposé, ou vers *ab.* FIG. I.

Ce qui fait la concavité ou convexité de la Courbe vers l'axe.

769. Je suppose les *Pp* égaux. Si après le côté *Mm*, hypotenuse du Triangle infiniment petit *MRm*, il vient un autre côté posé en ligne droite avec *Mm*, il y aura un second triangle égal & semblable à *MRm*, & les deux côtés consécutifs ne feront point d'angle tourné ni vers *AB*, ni vers *ab.* FIG. II.
Mais si le côté qui suit *Mm* se détourne de *Mm*, & s'abaisse vers *AB*, le côté *Rm* du second triangle sera moindre qu'il

n'étoit dans le premier, & en même temps les deux côtés *Mm* & le suivant feront entr'eux un angle obtus tourné vers *AB*. Or *Rm* eſt la différence de deux Ordonnées croiſſantes. Donc la Courbe eſt concave vers *AB* (768), lorſque les Ordonnées croiſſent, & que leurs différences décroiſſent. Par la raiſon contraire, elle ſeroit convexe vers *AB*, ſi les Ordonnées & leurs différences croiſſoient en même temps.

Et comme la Courbe *AMm* renverſée, c'eſt-à-dire, priſe de *m* vers *A*, eſt une Courbe dont les Ordonnées décroiſſantes ont des différences croiſſantes, & qu'elle eſt encore concave vers *AB*, il s'enſuit en général que la Courbe eſt toujours concave vers l'Axe, dont les Ordonnées ont une variation d'accroiſſement ou de décroiſſement contraire à celle de leurs différences, & toujours convexe, quand les Ordonnées & leurs différences ont la même eſpece de variation.

Rebrouſſement de la Courbe.

770. Juſqu'ici nous n'avons conſidéré le changement de direction perpétuel qui fait l'eſſence de la Courbe, que comme appartenant à un mouvement direct, ou qui va toujours en avant, par exemple, à celui de la Courbe *AMm*, qui va toujours de *A* vers *B*. Mais quand un mouvement qui étoit direct, devient rétrograde ou rebrouſſant, c'eſt une autre eſpece de changement de direction, & il faut voir comment il peut appartenir à la Courbe.

Si un Point, qui a décrit une ligne droite, eſt conçu comme revenant exactement ſur ſes pas, il a le plus grand changement de direction qui ſoit poſſible; mais quant à la deſcription d'une ligne, ce changement de direction ne fait abſolument rien, car tout au plus le Point redécrit une ligne déja décrite. C'eſt la même choſe, ſi cette ligne eſt Courbe. Ainſi le plus grand changement de direction poſſible ne fait rien par lui-même à la Courbe ni à la courbure.

771. Je dis *par lui-même*, car il peut avoir quelque effet, ſi on y ajoute une condition, qui eſt, que le Point décrivant décrive par ſon mouvement rétrograde une ligne ſoit droite, ſoit courbe, exactement poſée ſur une ligne déjà décrite, ce qui la rendra double, car cela n'eût pas été ſans le mouvement

rétrograde, mais il n'y a encore rien de changé par-là à la ligne décrite. Pour tirer de-là quelque nouvel effet, il faut concevoir que le Point décrivant, ayant décrit par son mouvement direct une Courbe, retourne du dernier point où il étoit arrivé, non pas exactement sur ses pas, mais seulement vers le même côté d'où il étoit parti, & forme une nouvelle courbure ou *branche* de Courbe. La Courbe totale formée des deux branches, dont l'une a été produite par le mouvement direct, l'autre par le rétrograde, s'appelle *rebroussante*. Elle est continue, parce que le mouvement du Point décrivant n'a pas été interrompu.

772. Soit que l'on considere la Courbe en elle-même, c'est-à-dire, comme une Suite de côtés infiniment petits qui se détournent infiniment peu les uns des autres, soit qu'on la considere comme la Suite des extrémités de ses Ordonnées infiniment peu distantes les unes des autres, & infiniment peu différentes en grandeur, il est clair que toutes les variations de la Courbe doivent être infiniment douces(*683*), & par conséquent il ne s'y fera aucun changement sans un Terme qui soit en même temps Terme & Origine, & Terme moyen ou commun (*684*).

773. Il n'entre dans la considération des Courbes que des Suites de lignes droites, soit finies, soit infiniment petites, réglées par quelque Loi, & par conséquent il n'y a qu'à leur appliquer tout ce qui a été dit sur les Suites de nombres. Toute la différence est qu'une Courbe est comme le résultat de la combinaison ou complication de plusieurs Suites différentes de lignes, de celles des Ordonnées, de celle de leurs distances, de celle de leurs différences, de celle des côtés, de celle des bases ou des Sinus des angles de contingence, ou du moins de quelques-unes de toutes celles-là. Mais tout ce qui en arrive, c'est que les Termes par où se font les changemens des Courbes sont ordinairement compliqués, & qu'il faut que chaque Suite en particulier y trouve également ce qui lui est nécessaire.

774. Toute Courbe est naturellement infinie, c'est-à-dire,

d'un cours ou d'une étendue infinie. Car c'eſt une Suite dont le cours eſt abſolument infini, ou peut-être conçu comme infini (663).

775. Il entre dans la conſidération de toute Courbe des Suites ou ſimplement infinies ou infiniment infinies de grandeurs infiniment petites: & comme ce n'eſt que par ces grandeurs que la Courbe peut être connue ou conſidérée, il faut que ces Infiniment petits, inconnus & indéterminables par eux-mêmes, aient des rapports qui puiſſent être connus & déterminés. Donc de tout ce que nous avons dit ſur les Suites formées d'Infiniment petits dans la Théorie des Suites en général, on n'en peut appliquer aux Suites d'Infiniment petits qui entrent dans la conſidération des Courbes, que ce qui appartient aux Suites originairement formées d'Infiniment petits dont les rapports ſont déterminables.

776. Si une Courbe a un cours infini, elle nous échappe, & ne peut plus être décrite vers cette extrémité, précifément comme les Suites infinies de nombres dont nous ne connoiſſons point les nombres infinis, ou en grandeur, ou en petiteſſe. Et comme ces Suites nous échappent, non ſeulement quand elles ont atteint les nombres infinis, mais infiniment plutôt, & dès qu'elles ſont parvenues aux Finis indéterminables, & même encore plutôt, ce que l'on voit dans la Suite naturelle, dont toutes les autres que nous connoiſſons ſont extraites: ainſi les Courbes qui ont un cours infini nous échappent, non ſeulement dès que ce cours eſt devenu infini, mais infiniment plutôt, & nous n'en pouvons connoître ou décrire que quelque portion finie qui peut toujours être plus grande, & par conſéquent eſt indéterminable.

777. Une Courbe d'un cours infini ne doit être conçue comme terminée que quand elle a tout le cours infini dont ſon Equation la rend capable, mais auſſi dès qu'elle l'a atteint, elle doit être conçue comme terminée.

Courbe devenue infiniment moins courbe.

778. Les variations de grandeur de toutes les différentes Suites poſſibles de nombres ſont analogues aux variations de direction de toutes les différentes Courbes poſſibles, ou les

peuvent repréſenter, & tout ce qu'on aura conçu des uns ſe peut concevoir des autres. Donc comme il y a des Suites de nombres qui ayant eu des variations de grandeur finies & déterminables, viennent à n'en avoir plus que d'infiniment petites, & par conſéquent indéterminables, il doit y avoir des Courbes qui ayant eu des variations de direction finies & déterminables dans des étendues finies, viennent à n'en avoir plus que d'infiniment petites dans de pareilles étendues. Et en effet il doit être poſſible que les angles de contingence qui ſont naturellement infiniment petits du 1er ordre, viennent dans certaines Suites où ils ſeront décroiſſans, à être infiniment petits du 2d, du 3me, &c. puiſque tous ces angles ſont poſſibles (*696*). En ce cas, dès que ces angles ſeront du 2d ordre, la variation de la direction des Courbes ſera infiniment moindre qu'elle n'étoit, ou, ce qui eſt le même, ces Courbes deviendront lignes droites, du moins phyſiquement, car quoiqu'en elles-mêmes & réellement elles varient encore de direction, elles n'en varieront plus de la maniere que nous connoiſſons, & auront infiniment moins de courbure, ce qui eſt équivalent à la rectitude. Tels ſont le paralléliſme ou la perpendicularité croiſſans ou décroiſſans des art. *709*, *710*, *711*, *712*.

779. Il n'y a aucune Suite infinie de nombres, qui ayant eu d'abord des variations finies, vienne dans un cours Fini déterminable à avoir une variation infiniment petite; & toute Suite qui vient à en avoir une pareille, ne l'a qu'après un cours infini moindre que ſon cours total, ou au moins après un cours fini ſi grand, qu'il en eſt indéterminable (*596*). Donc auſſi ſi une Courbe doit venir à n'avoir qu'une variation de direction infiniment petite dans des étendues finies, ou, ce qui eſt le même, devenir ligne droite, cela ne peut arriver au plutôt qu'après qu'elle aura eu un cours Fini indéterminable, & dans d'autres cas, après qu'elle aura eu un cours infini. Donc une Courbe ne peut devenir ligne droite, même phyſiquement, après un cours Fini déterminable.



SECTION X.

Des Variations & des Changemens des Courbes.

Considération d'une Courbe qui s'élevant toujours au-dessus de son axe, tend ou arrive à lui devenir parallele, soit par un cours fini, soit par un cours infini.
FIG. II.

780. JE suppose la Courbe AMm, dont les Ordonnées PM, pm, infiniment proches, sont toujours distantes de la même quantité Pp. Je suppose aussi que la Courbe s'éleve au dessus de son axe AB, & que par conséquent les PM sont croissantes, mais que leurs différences Rm sont décroissantes, & que par conséquent la Courbe s'éleve toujours de moins en moins.

Donc dans chaque petit Triangle MRm, Rm, qui représente le mouvement vertical de chaque côté correspondant Mm, est toujours plus petit par rapport à $MR = Pp$, qui représente un mouvement horisontal constant.

781. Il ne s'ensuit pas de-là que Rm n'ait pû être d'abord ou vers l'origine A de la Courbe plus grand que MR, mais seulement que Rm décroît toujours, $MR = Pp$ étant constant. Et si Rm a été d'abord plus grand que MR, il viendra à lui être égal (686), après quoi il sera toujours plus petit.

782. Puisque Rm, ou le mouvement vertical décroît toujours, chaque côté Mm est toujours plus oblique à l'axe AB, ou, ce qui revient au même, chaque Mm prolongé jusqu'à un point T de l'axe, y fait toujours un angle MTP plus aigu.

783. C'est dans cette obliquité croissante que consiste la variation de la position des côtés Mm par rapport à l'axe.

784. Une Courbe qui s'éleve toujours de moins en moins au dessous de son axe, tend à ne s'élever plus, & par conséquent à avoir un côté parallele à l'axe, qui sera le plus oblique qu'il se puisse, après que tous les précédens l'ont toujours été de plus en plus. Donc le Terme où la Courbe tend est le parallélisme.

785. Il seroit naturel de concevoir que son Origine a

été un côté perpendiculaire à l'axe au point A, mais cela n'est pas absolument nécessaire. Ce premier côté peut avoir été oblique à l'axe, mais il doit l'avoir été moins que tous les suivans.

786. Quand la Courbe arrive à un côté parallele, les deux Ordonnées qui lui répondent sont égales. Ces deux Ordonnées égales, considérées dans le Fini, c'est-à-dire, comparées à quelque autre Ordonnée finiment distante d'elles, n'en sont qu'une à cause de leur proximité infinie, mais considérées dans l'Infini, c'est-à-dire, en tant qu'infiniment proches, elles sont toujours deux.

787. Donc leur différence Rm est nulle, & la Suite décroissante des Rm qui étoient originairement des $\frac{1}{\infty}$, est arrivée ou à zero absolu, ou à $\frac{1}{\infty^2}$, ou à quelque Infiniment petit inférieur.

788. Si la Suite des Rm est arrivée à zero absolu, les deux Ordonnées correspondantes étant absolument égales, la Courbe est arrivée au parallélisme absolu & rigoureux. Mais si la Suite des Rm n'est arrivée qu'à $\frac{1}{\infty^2}$, les deux Ordonnées qui ont cette différence, sont infiniment moins différentes que les précédentes qui l'étoient infiniment peu, & par conséquent sont *censées* égales, & la Courbe parallele. Mais enfin elle pourroit réellement l'être davantage. Ce qui revient au parallélisme susceptible de plus & de moins des art. 709, 710, 711; à plus forte raison cela seroit-il vrai, si la Suite des Rm se terminoit par $\frac{1}{\infty^3}$ ou $\frac{1}{\infty^4}$, &c.

789. La Suite des Rm, terminée par o, ou par $\frac{1}{\infty^2}$, étoit ou simplement infinie, ou infiniment infinie. Si c'est le 1er, la Courbe est arrivée au parallélisme par un cours fini, ou n'a eu jusque là qu'une étendue finie (759). Si c'est le 2d, la Courbe est arrivée au parallélisme par un cours infini (759) & a eu un axe AB infini.

790. Lorsque la Suite des Rm, terminée par o, ou par $\frac{1}{\infty^2}$, est simplement infinie, la somme en est finie (613).

Donc l'Ordonnée *PM*, qui répond au côté parallele, & qui eſt la ſomme de cette Suite des *Rm*, eſt finie. Donc la Courbe arrivée au parallélîſme par un cours fini (789), n'y peut avoir qu'une Ordonnée finie.

791. Si à l'origine de la Courbe, qui eſt arrivée au parallélîſme par un cours fini, les *Rm* ont été plus petits que les *Pp*, l'Ordonnée *PM* qui répond au côté parallele eſt plus petite que l'Abſciſſe *AP* correſpondante, puiſque cette *AP* eſt la ſomme de tous les *Pp* conſtans qui ſont en même nombre infini que les *Rm*, & qui dès le commencement ont été plus grands. Mais ſi les *Rm* ont été d'abord plus grands que les *Pp*, ſelon l'art. 781, il eſt poſſible que *PM*, qui répond au côté parallele, ſoit plus grande que *AP* correſpondante. Cela eſt poſſible, & non pas néceſſaire, car les *Rm*, quoique d'abord plus grands que les *Pp*, peuvent avoir été dans la ſuite ſi décroiſſans, que leur ſomme ſera moindre que celle des *Pp*. Puiſque *PM* peut être moindre ou plus grande que *AP*, il eſt évident qu'elles peuvent être égales.

792. Lorſque la Suite décroiſſante des *Rm*, terminée par $\frac{1}{\infty^2}$, eſt infiniment infinie, la ſomme en eſt infinie (635). Donc en ce cas la Courbe qui arrive au parallélîſme par un cours infini, & a un axe infini (789), a auſſi une Ordonnée infinie.

Il eſt vrai que cette démonſtration ſuppoſe que la Suite des *Rm* ait été originairement formée de *Rm*, dont les rapports étoient déterminables (631), mais on eſt toujours ici, & on ſera toujours dans cette ſuppoſition (775), & il ne ſera plus néceſſaire d'en avertir.

793. Une Suite ſimplement infinie de $\frac{1}{\infty}$, terminée par $\frac{1}{\infty^2}$, a une infinité de $\frac{1}{\infty}$, & une infinité de $\frac{1}{\infty^2}$ (613). Mais c'eſt lorſqu'on ſuppoſe qu'elle a le même nombre infini de grandeurs que la Suite naturelle : or elle en peut avoir une infinité moindre, ſelon tel rapport fini qu'on voudra, & par conſéquent on peut concevoir qu'elle n'a que l'infinité de ſes $\frac{1}{\infty}$, & ſe termine à ſon premier $\frac{1}{\infty^2}$, & ſa ſomme n'en eſt

est pas moins finie. Or il est nécessaire de le concevoir ainsi, quand la Suite des $Rm = \frac{1}{\infty}$ répond ou est liée à une Courbe dont elle représente les différences des Ordonnées. Car si on laisse à cette Suite des *Rm* son infinité de $\frac{1}{\infty^2}$, la Courbe arrivée au parallélisme par un cours Fini déterminable dès le premier $\frac{1}{\infty^2}$, continue donc à être parallele tant que dure l'infinité des $\frac{1}{\infty^2}$; c'est-à-dire, que la Courbe est parallele à son axe pendant un autre cours fini, & par conséquent est ligne droite après un cours Fini déterminable. Or cela ne se peut (779). Donc la Suite des *Rm*, parce qu'elle est liée à une Courbe, doit être conçue comme terminée à son premier $\frac{1}{\infty^2}$, & la Courbe terminée aussi, *quant à présent*, à un seul côté parallele. De plus (777) il faut concevoir une Courbe, & par conséquent aussi un certain cours d'une Courbe terminé dès qu'il est arrivé au premier Infiniment grand ou petit dont il est capable.

794. Si la Suite des *Rm*, terminée par $\frac{1}{\infty^2}$ est infiniment infinie, elle a une infinité d'infinités de $\frac{1}{\infty}$, & une infinité d'infinités de $\frac{1}{\infty^2}$ (613 & 628), dans la supposition que le nombre de ses grandeurs est $= \infty^2$. Mais comme il peut être de ce même ordre, & moindre selon tel rapport fini qu'on voudra, & que d'ailleurs la Suite des *Rm* est liée à une Courbe, il faut concevoir cette Suite terminée à son premier $\frac{1}{\infty^2}$, ce qui la laisse encore infiniment infinie, & par conséquent la Courbe est arrivée par un cours infini à un seul côté parallele où elle se termine, & auquel répond une Ordonnée infinie.

795. En ce cas, si les *Rm* ont été d'abord égaux aux *Pp*, ou moindres, il est visible que la derniere *PM* infinie est moindre que son *AP* correspondante, qui est l'axe infini. Mais quand même les *Rm* auroient été d'abord plus grands que les *Pp*, cela seroit encore. Car dans cette supposition les *Rm*, toujours décroissans, ont dû venir à un *Rm* = *Pp*, ce

qui n'a pu arriver qu'après un cours fini de la Courbe, puisqu'alors elle n'eſt pas parallele, & qu'elle ne l'eſt que quand elle a un cours infini (789). Donc à ne conſidérer la Courbe que comme ayant ſon origine au point où $Rm = Pp$, ſa derniere PM infinie eſt moindre que ſon AP. Maintenant à la reprendre depuis ſa premiere & vraie origine juſqu'au point où $Rm = Pp$, on a à ce point une PM finie plus grande que ſon AP pareillement finie, & parce qu'en ajoutant cette PM finie à la PM infinie, & l'AP finie à l'axe infini, on ne fait rien, la derniere PM eſt toujours moindre que l'axe infini.

796. Donc l'axe infini étant ſuppoſé $= \infty$, ce qui ſuffit toujours, la derniere PM d'une Courbe arrivée au parallélisme par un cours infini, eſt toujours moindre que ∞, ou de quelque ordre radical, tel que $\infty^{\frac{1}{n}}$, ou $\infty^{\frac{n}{m}}$.

797. On a vu que la Suite des Rm, terminée par $\frac{1}{\infty^2}$, eſt & en elle-même, & comme liée à une Courbe, indifférente entre être ſimplement infinie, ou infiniment infinie. Mais ſi elle ſe termine par $\frac{1}{\infty^3}$, elle perdra par ſa liaiſon avec une Courbe cette indifférence qu'elle auroit toujours par ſa nature. Car comme elle ſe termine par $\frac{1}{\infty^3}$, elle ne peut ſe terminer plutôt qu'au premier $\frac{1}{\infty^3}$, & par conſéquent elle a tous ſes $\frac{1}{\infty^2}$ auſſi-bien que tous les $\frac{1}{\infty}$. Si elle eſt ſimplement infinie, la Courbe qui arrive au parallélisme par un cours Fini déterminable, eſt donc encore parallele ou ligne droite pendant un autre cours Fini déterminable: or cela ne ſe peut (779). Donc la Suite des Rm d'une Courbe terminée par $\frac{1}{\infty^3}$ ne peut être qu'infiniment infinie, ou la Courbe dont les Rm ſe terminent par $\frac{1}{\infty^3}$, a un cours infini.

798. La Suite infiniment infinie des Rm, terminée par $\frac{1}{\infty^3}$, n'a qu'une ſomme finie (636). Donc la derniere PM de la Courbe n'eſt que finie, tandis que l'axe AB eſt infini.

799. Si on connoît la grandeur dont doit être cette derniere *P M* finie, que l'on tire perpendiculairement sur l'axe une ligne égale $\alpha\beta$, & par son extrémité β une ligne *a b* parallele à *A B*, la Courbe *A M m* qui s'élevera toujours au-dessus de son axe, ne pourra cependant s'élever jusqu'à la parallele *a b* que par un cours infini. On appelle la ligne *a b* ainsi conditionnée, *Asymptote* de la Courbe.

Cas où cette Courbe a une Asymptote parallele à l'axe. Ce que c'est que l'Asymptotisme en général.

800. Donc une Courbe à laquelle répond une Suite de *R m*, terminée par $\frac{1}{\infty^3}$, a toujours une Asymptote, au lieu qu'elle n'en auroit point, si la Suite des *R m*, quoiqu'infiniment infinie, étoit terminée par $\frac{1}{\infty^2}$, car la derniere *P M* seroit infinie aussi-bien que l'axe (792).

801. L'axe infini & la derniere *P M* étant composés du même nombre infiniment infini, l'un de $\exists p$, & l'autre de *R m*, il est visible qu'en ce cas l'Asymptotisme vient de ce que de deux mouvemens, l'un horisontal, l'autre vertical, qui ont été conduits par le même nombre de degrés, l'un a une somme totale infinie, & l'autre une seulement finie, & qu'en général, toutes les fois que de ces deux mouvemens, l'un ne fera qu'une somme finie, tandis que l'autre en fera une infinie, il y aura Asymptotisme.

802. Comme il est fort naturel & fort ordinaire que de deux Suites infinies, composées du même nombre de grandeurs, l'une ait une somme infinie, & l'autre une finie, l'Asymptotisme n'a donc rien de merveilleux.

803. Puisque la Suite infiniment infinie des *R m*, terminée par $\frac{1}{\infty^3}$, n'a qu'une somme finie, elle n'a qu'un nombre infini de $Rm = \frac{1}{\infty}$: car si elle en avoit un nombre infiniment infini, elle auroit une somme infinie (635). Donc elle a un nombre simplement infini de $\frac{1}{\infty}$, & un nombre infiniment infini de $\frac{1}{\infty^2}$. Donc la Courbe arrive au parallélisme par un cours fini, & est parallele ou ligne droite pendant un cours infini. Mais le cours fini de la Courbe, pendant lequel seulement elle sera courbe, sera indeterminable (779).

Les art. 521, 522, 523, 524, fourniſſent un exemple ſenſible de cette vérité qui peut paroître paradoxe.

Si l'on conçoit diſpoſées ſur un axe des Ordonnées qui ſoient comme les grandeurs $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. $\frac{\infty}{\infty} = 1$, & ſéparées par de petits intervalles finis égaux, & que de l'extrémité de chaque Ordonnée à l'extrémité de la ſuivante, on tire une ligne droite, il ſe formera un Poligone rectiligne infini, dont chaque côté ſera toujours plus oblique à l'axe. Mais il n'y aura qu'un nombre Fini indéterminable de ces Ordonnées qui aient des différences finies, & toutes les autres en nombre infini n'auront que des différences infiniment petites. Donc les côtés du Poligone ne ſeront obliques à l'axe que pendant un cours fini, mais indéterminable, du Poligone, après quoi ils ſeront tous paralleles à l'axe, ou diſpoſés bout à bout en ligne droite pendant un cours infini. Il eſt clair que pour changer ce Poligone rectiligne en Courbe qui aura le même cours infini, & qui ne ſera courbe que pendant un cours Fini indéterminable, il n'y a qu'à concevoir entre les Ordonnées $\frac{0}{1}$ & $\frac{1}{2}$, entre $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{3}$, &c. dont les intervalles ou diſtances ont été ſuppoſées finies, une infinité d'Ordonnées intermédiaires, ce qui ne changera rien au reſte.

804. La Courbe dont la Suite des *R m* ſe termine par $\frac{1}{\infty^3}$ eſt donc parallele, dès qu'elle a atteint le premier *R m* $= \frac{1}{\infty^2}$, ce qu'elle fait par un cours Fini indéterminable, après quoi elle continue d'être parallele ou ligne droite pendant un cours infini, c'eſt-à-dire, tant que durent les *R m* $= \frac{1}{\infty^2}$, & enfin quand elle arrive à $\frac{1}{\infty^3}$, elle devient encore plus parallele qu'elle n'étoit, ce qui revient à l'art. 788.

805. La Courbe n'a tout le parallèliſme dont elle eſt capable, que quand elle eſt arrivée à $\frac{1}{\infty^3}$, & par conſéquent on ne la doit concevoir terminée que là. Mais auſſi on doit la concevoir terminée dès qu'elle y eſt arrivée (777), & par conſéquent elle ne doit avoir que deux dernieres Ordonnées

infiniment proches, dont la différence soit $= \frac{1}{\infty^3}$, ou, ce qui est le même, elle n'a qu'un seul côté parallele de ce dernier parallélisme, au lieu qu'elle en a précédemment une infinité d'infinités paralleles d'un moindre parallélisme, & toujours le même, ou d'une même espece.

806. Quoiqu'elle soit *censée* ligne droite pendant un cours infini, elle ne l'est pourtant pas absolument & en elle-même. Car si on concevoit une ligne droite infinie parallele à l'axe *A B*, on concevroit toutes ses Ordonnées infiniment proches comme absolument égales, & ayant des différences $= 0$, & non des différences $= \frac{1}{\infty^2}$. Donc la Courbe tient encore de sa nature de courbe, & n'est point absolument droite. Et en effet chaque infinité de $Rm = \frac{1}{\infty^2}$ a une somme $= \frac{1}{\infty}$, d'où il suit que quand la Courbe est devenue ce que nous appellons n'être que *censée* ligne droite, il y a aux deux extrémités de chaque partie finie de son cours, deux Ordonnées dont la différence est $= \frac{1}{\infty}$, ce qui n'empêche pas la rectitude, & ne convient pas cependant à la ligne droite précisément prise comme telle. Et enfin si l'on conçoit les deux Ordonnées posées aux deux extrémités du cours infini pendant lequel les Rm ont été $= \frac{1}{\infty^2}$, la différence de ces deux Ordonnées est finie, puisqu'elle est la somme d'une infinité d'infinités de $\frac{1}{\infty^2}$, ou d'une infinité de $\frac{1}{\infty}$, & cette propriété ne convient pas à une droite qui le seroit à toute rigueur. Tout cela revient aux art. 709, &c. 788.

807. Puisque la Courbe n'est courbe à la maniere ordinaire, & que nous connoissons que dans un cours fini, elle atteint son Asymptote dès qu'elle a fait ce cours fini, car quand elle est ligne droite elle n'est plus que cette Asymptote même. Mais elle n'est que *censée* atteindre son Asymptote ou la devenir après ce cours fini, car absolument ou à toute rigueur elle ne la devient pas encore. Cependant il est aisé de voir que cela suffit pour faire évanouir entierement tout le surprenant de l'Asymptotisme.

808. Si la Suite des Rm se termine par $\frac{1}{\infty^4}$, & en général par $\frac{1}{\infty^n}$, n étant fini, & plus grand que 2, la Courbe a un cours infini, une derniere Ordonnée finie, & une Asymptote, & elle est courbe seulement pendant un cours Fini indéterminable, & ligne droite; mais non absolument & à la rigueur, pendant un cours infini. Il est très-aisé de le voir.

809. Plus dans $\frac{1}{\infty^n}$ dernier Rm, l'exposant n sera grand; plus la Courbe, dont l'axe est toujours supposé le même Infini, sera courbe pendant un petit cours Fini indéterminable; & plus le cours infini, pendant lequel elle sera ligne droite, sera grand, plus aussi elle aura de parallélismes différens, & toujours plus exacts, depuis le premier, qui se fera toujours dès qu'elle aura atteint le premier $Rm = \frac{1}{\infty^2}$ jusqu'au dernier qui se fera au premier & unique $\frac{1}{\infty^n}$.

Considération de la Courbe arrivée au parallélisme par un cours fini, & qui ensuite continue son cours, soit en continuant de s'élever au-dessus de son axe, soit en redescendant vers lui.

810. Voilà tout ce qui regarde la Courbe arrivée au parallélisme par un cours infini; & il est visible qu'en ce cas, c'est une Suite infinie sans changement (*666*). Mais si elle n'est arrivée au parallélisme que par un cours Fini déterminable, il faut voir ce qu'elle peut devenir après.

La Courbe avoit monté par rapport à son axe, & le côté parallele où elle est arrivée n'est ni montant ni descendant. Donc c'est un Terme moyen (*671*) qui par conséquent (*673*) ne détermine pas nécessairement la Courbe à redescendre vers son axe, mais la laisse indifférente entre redescendre ou continuer de monter. Il n'y a rien de nécessaire, si non que les Rm deviennent croissans, puisque leur Suite est terminée par o, ou par $\frac{1}{\infty^2}$, la moindre grandeur qu'elle puisse avoir.

811. Je suppose que la Courbe redescend. Ses Ordonnées sont donc décroissantes, & comme leurs différences Rm sont croissantes (810), la Courbe est encore concave vers son axe (*769*), ainsi qu'elle l'étoit dans son premier cours.

812. Donc l'Ordonnée qui répond au côté parallele est

plus grande que toutes celles des deux cours, l'un montant, l'autre descendant, au lieu que dans le cours infini il n'y avoit que la derniere qui fût la plus grande de toutes.

813. De plus, les *Rm* qui représentent dans le second cours le mouvement vertical descendant, étant croissantes, la Courbe descend de plus en plus, au lieu qu'auparavant elle montoit de moins en moins.

814. De ce que les *Rm* croissent, les *Pp* ou *MR* étant constans, il suit que dans le Triangle *MRm* l'angle *RMm* est toujours plus grand, & par conséquent le côté *Mm* moins oblique sur *MR*, & la Courbe moins oblique à son axe, & que par conséquent elle tend à lui être perpendiculaire. On n'a qu'à s'imaginer la Courbe *A Mm* renversée, ou prise de *m* vers *A*.

815. La Courbe doit arriver à un côté perpendiculaire, ou du moins à un côté moins oblique que tous ceux de ce second cours; ce qui est la même chose que les art. 784 & 785. renversés.

816. Le côté parallele & le perpendiculaire sont les Termes naturels de la position oblique des côtés de la Courbe par rapport à l'axe, & un côté plus ou moins oblique que tous les précédens du même cours, n'en est qu'un Terme arbitraire (643). c'est-à-dire, fixé & déterminé par l'Equation de la Courbe. Et comme les Termes arbitraires peuvent être substitués aux naturels, il est possible que la Courbe, qui dans son second cours tend à la perpendicularité, n'arrive qu'à un côté moins oblique que les précédens, & y termine ce second cours.

817. Soit que dans ce second cours la Courbe arrive au Terme naturel ou à un arbitraire, elle ne peut avoir besoin d'un cours infini pour y arriver. Car ce Terme quelconque sera un côté posé sur l'axe dont la Courbe dans le cours qu'on lui suppose se rapproche toujours; donc si elle avoit besoin d'un cours infini pour arriver au Terme, soit naturel, soit arbitraire, l'axe seroit Asymptote de la Courbe. Or tout le mouvement vertical descendant, dont elle a besoin pour

arriver à ſon axe, n'eſt que l'Ordonnée qui répond au côté parallele d'où la Courbe eſt partie, & cette Ordonnée n'eſt que finie. Donc il faudroit pour l'Aſymptotiſme que le mouvement horiſontal fût infini (801). S'il l'étoit, il ſeroit croiſſant par rapport au vertical, & ici tout au contraire, c'eſt le vertical qui eſt croiſſant par rapport à l'horiſontal. Donc la Courbe n'arrivera à ſon Terme que par un cours fini.

Cas où la Courbe en redeſcendant, arrive dans ce ſecond cours à la perpendicularité, Terme naturel.

818. Je ſuppoſe que la Courbe arrive au Terme naturel, l'arbitraire viendra enſuite. Quand la Courbe arrive à un côté perpendiculaire, ſon mouvement horiſontal eſt devenu abſolument nul, & le vertical ſubſiſte ſeul, au lieu que quand la Courbe étoit arrivée à un côté parallele, c'étoit le contraire; ou, ce qui revient au même, l'angle RmM du petit Triangle MRm eſt $= 0$ dans la perpendicularité, au lieu que dans le parallélisme, c'étoit l'angle RMm.

819. Dans le parallélisme le côté Mm eſt néceſſairement déterminé à être $= MR = Pp$, & dans la perpendicularité il eſt ſeulement déterminé à être perpendiculaire ſur MR, mais ſans aucun rapport néceſſaire de grandeur à MR, de ſorte que Mm peut être plus grand ou plus petit que les Pp conſtans ſelon une raiſon quelconque, ou leur être égal.

820. Il y a plus: le côté perpendiculaire n'a point de MR ou Pp qui lui réponde, au lieu que tout autre côté oblique ou parallele en a un. Car ſi le côté perpendiculaire commence la Courbe au point A, il eſt viſible que le premier Pp appartient au côté qui ſuit le perpendiculaire, & que celui qui appartiendroit au côté perpendiculaire, & qui devroit être à la gauche du point A, n'exiſte point. Ce ſera le même raiſonnement ſi le côté perpendiculaire termine un cours de la Courbe, & même quand on le ſuppoſera entre deux cours conſécutifs.

Cas où la Courbe, en continuant de monter, tend à la perpendicularité, après avoir eu une inflexion.

821. Selon la diviſion de l'art. 810, la Courbe AMm arrivée au parallélisme, peut continuer de monter, les Rm étant toujours néceſſairement croiſſans. En ce cas, ſes Ordonnées étant toujours croiſſantes, & leurs différences Rm l'étant devenues, elle montera toujours de plus en plus, au lieu

lieu qu'auparavant elle montoit de moins en moins, ce qui eſt un changement poſſible (648).

822. Il n'y a point là de plus grande Ordonnée, puiſqu'elles vont toujours en croiſſant.

823. La Courbe dans ſon ſecond cours tend auſſi à la perpendicularité, puiſque les *Rm* croiſſent.

824. De ce que les *Rm* croiſſent auſſi-bien que les Ordonnées, il ſuit que la Courbe devient convexe vers ſon axe *AB*, de concave qu'elle étoit (769). Elle devient la Courbe de la Fig. III.

825. Toute Courbe étant une Suite dont les variations ſont infiniment douces (683), la Courbe n'a pu paſſer de la concavité à la convexité vers le même axe ſans paſſer par un Terme ou moyen ou commun. Comme la concavité d'une Courbe vers un axe conſiſte dans l'*obverſion* de ſes angles obtus vers cet axe, il faut que cette obverſion vienne à ſe faire du côté oppoſé, afin que la Courbe devienne de concave convexe. Si l'obverſion peut ne ſe faire ni d'un côté ni de l'autre, ce ſera là un Terme moyen. Or cela ne peut arriver que par deux côtés conſécutifs exactement poſés bout à bout en ligne droite; alors l'angle obtus qu'ils feront entr'eux, étant exactement de 180, ou nul, car cela revient au même, il ne ſera tourné ni vers l'axe *AB*, ni du côté oppoſé. On peut même concevoir qu'il y a deux angles de 180, dont l'un eſt tourné vers *AB*, & l'autre du côté oppoſé. Ainſi ce même Terme peut être conçu & comme moyen, & comme commun, & cela le rend unique pour le paſſage de la concavité à la convexité. En effet il eſt impoſſible d'en imaginer un autre. Donc dans la ſuppoſition préſente, la Courbe qui dans ſon premier cours eſt arrivée au parallélisme en montant, & continue de monter dans le ſecond, a terminé ſon premier cours par deux côtés conſécutifs *Mm* & $m\mu$ paralleles à l'axe, & poſés exactement bout à bout en ligne droite.

Le paſſage de la concavité à la convexité vers le même axe, ou au contraire, s'appelle *Inflexion*, & le point où il ſe

Inflexion. fait *point d'inflexion*, car les deux côtés infiniment petits ne ſont qu'un point dans le Fini.

826. A deux côtés paralleles répondent néceſſairement trois Ordonnées égales infiniment proches, dont par conſéquent les deux différences Rm ſont chacune $=$ o.

827. Un côté parallele étant $= Pp$ (819), & les Pp étant conſtans, les deux côtés paralleles où ſe fait l'Inflexion ſont égaux.

828. Et même indépendamment de la ſuppoſition arbitraire des Pp conſtans, comme l'eſſence de l'Inflexion demande qu'elle ſe faſſe par deux côtés exactement poſés en ligne droite, il faudroit toujours les concevoir égaux, parce qu'il n'y auroit nulle raiſon de les concevoir inégaux.

Cas où la Courbe eſt arrivée dans ſon premier cours, non au parallélisme, Terme naturel de l'obliquité croiſſante, mais ſeulement au Terme arbitraire, qui ſera une certaine obliquité plus grande que toutes les précédentes. Inflexion.

829. Si l'on ſuppoſe que la Courbe, au lieu d'être arrivée à la fin de ſon premier cours au Terme naturel de l'obliquité croiſſante, qui eſt le côté parallele, ne ſoit arrivée qu'à un Terme arbitraire qui ſera un côté plus oblique ſeulement que tous les précédens, & moins que les ſuivans, puiſqu'il ſera Terme & Origine, il s'enſuivra, 1°. Que les Rm décroiſſans arriveront à un *plus petit*, & ſeront enſuite croiſſans. 2°. Que la Courbe ne pourra redeſcendre vers l'axe, parce qu'elle n'aura paſſé par aucun Terme qui ſoit moyen entre monter & deſcendre, ou commun, & que par conſéquent la Courbe continuera de monter, & ſes Ordonnées d'être croiſſantes. Donc la Courbe concave, tant que les Rm étoient décroiſſans, ſera enſuite convexe. Or elle ne peut paſſer de la concavité à la convexité que par l'Inflexion (825). Donc ſi la Courbe, au lieu d'arriver à un côté parallele, arrive à un côté le plus oblique de tous les précédens, qui ſoit Terme arbitraire de ſon obliquité croiſſante, elle a néceſſairement une Inflexion en ce même point, & elle pouvoit n'en avoir pas, lorſqu'elle arrivoit au côté parallele.

830. Donc lorſque la Courbe arrive à un Terme arbitraire d'obliquité croiſſante, elle arrive à deux côtés égaux (828) exactement poſés bout à bout en ligne droite, au lieu

qu'en arrivant au Terme naturel elle peut n'arriver qu'à un ſeul côté.

831. Quand elle arrive au Terme arbitraire, il n'y a point de plus grande Ordonnée, non plus que quand elle arrive au Terme naturel avec Inflexion (822).

832. Quand la Courbe, dont l'obliquité étoit croiſſante, arrive ſoit au Terme naturel de cette obliquité avec Inflexion, ſoit au Terme arbitraire, il y a trois Ordonnées infiniment proches, qui ſont égales, ſi l'Inflexion eſt parallele, ou en progreſſion arithmétique, ſi l'Inflexion eſt oblique, & alors les trois Ordonnées ſont comme 1, 2, 3, à cela près que leurs différences ſont de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & par conſéquent dans les deux cas leurs différences ſont égales, toutes deux zero dans le 1er, & dans le 2d deux $\frac{1}{\infty}$ égaux.

833. Comme les termes arbitraires font le même effet que les naturels, quant au renverſement ou aux changemens des Suites, la Courbe arrivée à ſon Terme arbitraire d'obliquité croiſſante ne peut plus après cela qu'avoir une obliquité décroiſſante, ou tendre à la perpendicularité.

834. Quand la Courbe arrive à un ſeul côté parallele, ce côté eſt un Terme ſimple d'obliquité croiſſante, mais quand elle arrive à deux côtés, ſoit paralleles, ſoit obliques, ils ſont en même temps Termes d'obliquité croiſſante, & de concavité vers l'axe, & par conſéquent ils ſont un Terme compliqué.

Cas du rebrouſſement.

835. Puiſqu'une Courbe peut rebrouſſer, elle le peut étant arrivée au parallèliſme. Il faut alors un Terme ou moyen ou commun entre le cours direct & le rétrograde. Un Terme moyen, ce ſeroit un, ou, ſi l'on veut, deux côtés qui n'appartiendroient ni au cours direct ni au rétrograde, mais cela eſt impoſſible, puiſqu'il n'y a point de mouvement ſans direction. Reſte donc que l'on conçoive un Terme commun qui appartiendra au cours direct, & au rétrograde en même temps : & pour cela il faut néceſſairement concevoir que ſur le dernier côté du cours direct ſe poſe exactement le premier du rétrograde, moyennant quoi ce côté double, qui n'en vaut

qu'un, appartient en même temps aux deux cours. Il est effectivement nécessaire, selon l'art. 771, que la Courbe rebroussante parte du dernier point de son cours direct pour rebrousser, & ici le côté double n'est que ce point commun aux deux cours.

836. Les deux côtés sont égaux, puisqu'ils sont le même Terme commun.

837. Comme la Courbe arrivée au parallélisme est indifférente entre redescendre ou continuer de monter (810), la Courbe *AMm* arrivée aux deux côtés *Mm* & $m\mu$ paralleles & rebroussans, peut ou redescendre vers *AB* comme par la branche *MC*, ou continuer de monter par la branche *MD*. Tout ce qu'il y a de nécessaire, c'est que dans son second cours elle tende à la perpendicularité, comme dans la Fig. III, & par la même raison.

FIG. IV.

838. Au lieu que la Courbe rebroussante redescend dans la Fig. IV, par la branche *MC* extérieure à la premiere branche *AMm*, elle peut redescendre par une autre branche intérieure, & alors il faudra concevoir le côté rebroussant $m\mu$ posé sous le direct *Mm*, au lieu que dans la Figure il est posé dessus, mais cela ne change absolument rien.

839. Si la Courbe redescend par une branche, soit intérieure à *AMm*, soit extérieure comme *MC*, elle est concave vers *AB* comme dans son premier cours, puisque ses Ordonnées sont décroissantes, & leurs différences croissantes (811). Si la Courbe continue de monter par la branche *MD*, elle est convexe vers *AB*.

839. Il pourroit donc sembler que dans ce second cas il y auroit rebroussement & inflexion, mais il n'y a réellement que rebroussement. L'un & l'autre doivent être quelque chose de réel & d'indépendant de ce que la Courbe sera rapportée à un axe ou à un autre, ce qui est arbitraire. Il est bien vrai que la Courbe rebroussante *AMD*, rapportée à l'axe *AB*, est concave vers cet axe dans la branche *AM*, & convexe dans la branche *MD*; mais si on la rapporte à un axe perpendiculaire à *AB*, elle sera dans ses deux branches concave

ou convexe vers ce nouvel axe, & par conséquent n'aura point d'inflexion par rapport à lui, mais elle sera toujours rebroussante. Donc elle n'a réellement que rebroussement. Si on rapporte la Courbe de la Fig. III à un axe perpendiculaire à *AB*, on verra qu'elle est toujours concave vers ce nouvel axe dans une de ses branches, & convexe dans l'autre, ce qui marque qu'elle a réellement inflexion.

840. Dans le Rebroussement fait par deux côtés paralleles exactement posés l'un sur l'autre, il y a comme dans l'Inflexion trois Ordonnées égales; mais au lieu que dans l'inflexion les trois Ordonnées sont posées de suite, dans le rebroussement la 3[me] va se poser sur la 1[re], de sorte que la 3[me] & la 1[re] sont exactement confondues en une seule.

841. Cependant comme l'idée de rebroussement demande que ces deux Ordonnées confondues en une seule soient deux, & non pas une seule, il faut concevoir dans le rebroussement parallele, aussi-bien que dans l'inflexion parallele, trois Ordonnées égales, dont les différences soient chacune $= 0$, comme dans l'art. 832.

842. Comme la Courbe peut avoir une inflexion oblique aussi-bien que parallele, elle peut avoir un rebroussement oblique aussi-bien que parallele, car il est clair que les deux côtés rebroussans, exactement posés l'un sur l'autre, sont indifférens à toute position à l'égard de l'axe.

843. En ce cas il faut, comme dans celui du rebroussement parallele (837), que la Courbe ou continue de monter par la branche *MD*, ou redescende par la branche *MC*, soit extérieure à la branche directe *AM*, comme dans la Fig. IV, soit intérieure. Et pour s'en convaincre encore plus, il n'y a qu'à concevoir la branche rebroussante, soit *MD*, soit *MC* égale & semblable à la directe *AM*, & ayant avec elle un côté commun $m\mu = Mm$, & qu'il s'agit de poser cette branche *MD* ou *MC*, de sorte qu'elle rebrousse à l'égard de *AM*. On ne pourra la poser que de deux manieres, ou entierement sur *AM*, de sorte qu'elle décrira de *M* en *A* le même chemin que l'autre avoit décrit de *A* en *M*, ou de

façon qu'elle ſoit adoſſée contre *AM*, & qu'ainſi elles aient toutes deux leurs convexités oppoſées. De la 1[re] maniere, la branche rebrouſſante redeſcendra vers l'axe, & ſera concave vers cet axe, comme l'étoit la branche directe; de la 2[de], la branche rebrouſſante continuera de s'élever au deſſus de l'axe, comme faiſoit la directe, & ſera convexe vers l'axe, au lieu que la directe étoit concave. Maintenant que la branche rebrouſſante ne ſoit ni égale ni ſemblable à la directe, il eſt viſible que cela ne fait rien à ce que nous conſidérons ici ſur ſa poſition.

844. Si la Courbe *AM*, arrivée à un rebrouſſement oblique, redeſcend par la branche *MC*, ſes Ordonnées deviennent donc décroiſſantes, & la Courbe en même temps eſt concave vers l'axe (843), donc les différences *Rm* ſont devenues croiſſantes, au lieu qu'elles étoient décroiſſantes dans le cours direct. Si la Courbe *AM* continue de monter par la branche *MD*, ſes Ordonnées continuent d'être croiſſantes, & en même temps elle eſt convexe vers l'axe (843). Donc les différences *Rm* ſont encore croiſſantes. Donc la Courbe dont l'obliquité étoit croiſſante, arrivée à un rebrouſſement oblique, a enſuite une obliquité décroiſſante, ou tend à la perpendicularité, de même que la Courbe dont l'obliquité étoit pareillement croiſſante, & qui eſt arrivée à une inflexion oblique (829).

845. Donc la Courbe arrivée à un rebrouſſement oblique, auſſi-bien que la Courbe arrivée à une inflexion oblique, eſt arrivée en même temps à un Terme arbitraire d'obliquité, c'eſt-à-dire, à deux côtés égaux plus obliques que tous les précédens, & moins que les ſuivans.

846. Les trois Ordonnées infiniment proches, qui répondent au rebrouſſement oblique, & dont les deux extremes ſont confondues enſemble (840), ſont en contre-progreſſion arithmétique, ou comme 1, 2, 1, au lieu que les trois qui répondent à l'inflexion oblique ſont en progreſſion arithmétique (832), ou comme 1, 2, 3. Quant à celles qui répondent à l'inflexion ou au rebrouſſement paralleles, elles ſont

dans la moindre progreſſion ou contre-progreſſion arithmétique poſſible.

847. On a vu tout ce qui appartient à une Courbe qui a commencé par tendre au parallélisme, ſoit qu'elle y ſoit arrivée par un cours infini, auquel cas elle n'a point de changement, ſoit qu'elle y ſoit arrivée par un cours fini, auquel cas elle a dû recevoir des changemens, ſoit même qu'elle ne ſoit arrivée qu'à un Terme arbitraire de ſon obliquité croiſſante. Maintenant conſidérons une Courbe qui commence par tendre à la perpendicularité. On ſuppoſe toujours qu'elle s'éleve au deſſus de l'axe, & par conſéquent que ſes Ordonnées ſont croiſſantes.

Conſidération de la Courbe, qui s'élevant toujours au deſſus de ſon axe, tend ou arrive à lui devenir perpendiculaire, ſoit par un cours fini, ſoit par un cours infini.

En général il ne faudroit préſentement que changer l'axe des Courbes des Fig. II, III & IV, & les rapporter à un axe mené au point *A* perpendiculairement à *AB*. Il eſt clair que tout ce qui étoit mouvement horiſontal, deviendroit vertical, & réciproquement, & que toutes les conſéquences qu'on a déja tirées reviendroient. Cependant il eſt bon de conſidérer en elle-même la ſuppoſition préſente. Il en naîtra des réflexions particulieres.

848. La Courbe aura commencé par avoir un côté parallele à l'axe, ou du moins plus oblique que tous ceux qui le ſuivront dans la même variation, puiſque ſon mouvement perpendiculaire ou vertical eſt croiſſant.

849. Les Ordonnées, & leurs différences *Rm* qui repréſentent le mouvement vertical, étant croiſſantes, la Courbe qui ira de *A* en *M* ſera convexe vers l'axe *AB*. FIG. V.

350. Dans la perpendicularité le mouvement horiſontal doit être nul par rapport au vertical, ainſi que dans le parallélisme le vertical eſt nul par rapport à l'horiſontal, & en effet les deux idées de vertical & d'horiſontal s'excluent néceſſairement l'une l'autre. Mais comme on a vû que dans le parallélisme le mouvement vertical peut être ou abſolument zero, ou ſeulement infiniment petit par rapport à l'horiſontal, & de tous les degrés différens d'Infiniment petit, de même dans la perpendicularité le mouvement horiſontal peut être

ou abſolument zero, ou ſeulement infiniment petit par rapport au vertical, &c.

851. Donc les *Pp* qui repréſentent le mouvement horiſontal peuvent, quoiqu'ils aient été ſuppoſés conſtans, devenir ou abſolument nuls, ou infiniment plus petits qu'ils n'étoient ſuppoſés. Ils peuvent devenir abſolument nuls, parce que quoiqu'il ſoit vrai qu'une grandeur conſtante doit être toujours la même tant qu'elle exiſte, il ne s'enſuit pas qu'elle doive exiſter toujours; & ils peuvent devenir infiniment plus petits qu'ils n'étoient, parce que c'eſt la même choſe que n'exiſter plus, du moins par rapport à ce qu'ils étoient.

852. Il eſt clair que ce ne peut être qu'à l'origine ou à l'extrémité d'un cours d'une Courbe que les *Pp* n'exiſtent plus, & par conſéquent ils exiſteront par tout ailleurs, & ſeront conſtans ſelon la ſuppoſition.

853. La Suite croiſſante des *Rm* peut ſe terminer par $\frac{1}{\infty}$ (*609*), & alors elle eſt ou ſimplement infinie, auquel cas la ſomme en eſt finie (*609*), ou infiniment infinie, auquel cas la ſomme en eſt infinie (*632*). Donc dans le 1er cas l'Ordonnée par laquelle la Courbe arrive à la perpendicularité eſt finie, & dans le 2^d^ infinie. Donc dans le 1er cas le mouvement vertical par lequel la Courbe eſt arrivée à la perpendicularité eſt fini, & dans le 2^d^ infini.

854. Dans la perpendicularité $MR = Pp$ étant nul par rapport à Rm (850), le côté de la Courbe eſt toujours $= Rm$. Donc quand la Suite ſe termine par $\frac{1}{\infty}$, la Courbe qui n'eſt perpendiculaire que par ſon dernier côté $= Rm$, ne l'eſt que dans une étendue de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & cela, ſoit que ſon cours vertical ſoit fini ou infini.

Différens cas où la Courbe ayant un cours infini, arrive à la perpendicularité ſans Aſymptotiſme ou avec Aſymptotiſme.

855. J'examine d'abord le cas où ce cours eſt infini, parce que la Courbe n'a alors qu'une variation ſans changement, ce qui eſt plus ſimple.

Puiſque la Courbe a eu un cours vertical infini, & qu'elle n'eſt perpendiculaire que par un côté $= \frac{1}{\infty}$ (854), elle a donc eu une infinité d'infinités de côtés obliques auxquels ont

par

par conséquent répondu une infinité d'infinités de Pp, c'est-à-dire un axe infini, & par conséquent le mouvement horisontal de la Courbe est alors infini aussi-bien que le vertical.

856. Donc elle n'a point d'Asymptote (801).

857. En même temps il faut, à cause de la perpendicularité, que le dernier de la Suite infiniment infinie & constante des Pp soit nul par rapport à $Rm = \frac{1}{\infty}$, donc il faut que ce dernier Pp soit $= 0$, ou au moins $= \frac{1}{\infty^2}$.

858. Il ne doit pas être d'un ordre inférieur à $\frac{1}{\infty^2}$, puisque la perpendicularité qui se fait par un $Rm = \frac{1}{\infty}$ n'en exige pas davantage.

859. Et même si la Suite des Rm, toujours terminée par un Rm de l'ordre potentiel de $\frac{1}{\infty}$, l'étoit par un Rm d'un ordre radical supérieur, tel que $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$ ou $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{3}}}$, &c. le dernier Pp pourroit être $= \frac{1}{\infty}$, car $\frac{1}{\infty}$ est nul par rapport à $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$.

860. Si la Suite croissante des Rm se termine par 1 (610), la Courbe est perpendiculaire par un côté fini, & par conséquent ligne droite finie. Si la Suite des Rm avoit été simplement infinie, la Courbe deviendroit donc ligne droite après un cours Fini déterminable, ce qui ne se peut. Donc dans ce cas le cours vertical de la Courbe est nécessairement infini, ou la Suite des Rm infiniment infinie.

861. Puisque le dernier côté est $= Rm = 1$, & la Suite des Rm infiniment infinie, il y a eu avant ce dernier côté, seul perpendiculaire, une infinité d'infinités de côtés obliques, ou un axe ou mouvement horisontal infini.

862. Donc il n'y a point encore d'Asymptotisme.

863. Donc aussi le dernier Pp ne doit être que $\frac{1}{\infty}$.

864. Si la Suite des Rm se termine par ∞, la Courbe a un côté perpendiculaire $= \infty$, & par conséquent est ligne droite pendant un cours infini. Le dernier $Rm = \infty$ est

équivalent à une infinité d'infinités de Rm croiſſans $= \frac{1}{\infty}$ qui ſeroient tous poſés bout à bout en ligne droite ; & par conſéquent dans ce cas la Suite des Rm doit être conçue comme infiniment infinie, mais formée de Rm, dont une infinité d'infinités feront une ligne droite infinie, & tous ces Rm, à cauſe de leur poſition, n'auront point de Pp correſpondans. Donc il n'y aura qu'un nombre fini d'infinités de Rm vers l'origine de cette Suite, qui puiſſent avoir des Pp correſpondans, ou, ce qui eſt le même, l'axe ou le mouvement horiſontal ne ſera que fini.

865. Donc il y aura Aſymptotiſme.

866. Un ſeul $Pp = \frac{1}{\infty}$ répondra à la ligne droite infinie $= Rm$.

867. La Courbe ne ſera courbe que pendant un cours Fini indéterminable.

Ce ne ſont là que les art. 799, 800, &c. renverſés, mais dont le renverſement pouvoit avoir quelque difficulté.

868. Puiſque dans le cas de $Rm = \infty$, la Courbe n'eſt courbe que pendant un cours Fini indéterminable, on peut concevoir Rm, qui eſt toujours par ſa nature la différence de deux Ordonnées infiniment proches, comme la différence de l'Ordonnée finie qui termine ce cours Fini indéterminable, & de l'Infinie qui la ſuit, & qui eſt, après une étendue finie, la Courbe même devenue ligne droite infinie.

869. De tout cela il ſuit que quand la Courbe arrive à la perpendicularité par un cours infini, elle n'a point d'Aſymptote tant que Rm n'eſt que d'un ordre au deſſus de Pp (860, 861, 862), & qu'elle n'en a une que quand Rm eſt de deux ordres au deſſus de Pp (864, 865); car alors $Rm = \infty$, & $Pp = \frac{1}{\infty}$ (866).

870. Et comme afin qu'une Courbe qui arrive au parallélisme par un cours infini ait une Aſymptote, il faut que Rm ſoit au moins $= \frac{1}{\infty^3}$ (799, 800, 808), Pp étant toujours néceſſairement $= \frac{1}{\infty}$, il faut que pour l'Aſymptotiſme

parallele ou perpendiculaire, il faut que Rm ſoit au moins de deux ordres au deſſous ou au deſſus de Pp. Et en effet l'Aſymptotiſme conſiſte en ce que des deux mouvemens de la Courbe, l'horiſontal & le vertical, l'un eſt infini, l'autre fini. Les Pp ſont les parties infiniment petites de l'un, & les Rm les parties infiniment petites de l'autre. Il faut donc que celui des deux qui doit être infini, ait une infinité d'infinités de ces parties qui exiſtent, tandis que l'autre n'en aura qu'un nombre ſimplement infini, ou une infinité d'infinités qui ſeront infiniment moindres que celles du premier. Or il eſt ſûr que cela eſt ainſi, quand la Suite des Rm ſe termine par une grandeur qui eſt de deux ordres au deſſus de celle qui termine la Suite des Pp, ou au contraire.

871. Dans l'Aſymptotiſme parallele on conçoit naturellement une infinité d'infinités de $Pp = \frac{1}{\infty}$, & un nombre ſimplement infini de $Rm = \frac{1}{\infty}$, & une infinité d'infinités de $Rm = \frac{1}{\infty^2}$ terminée par un dernier $Rm = \frac{1}{\infty^3}$ pour le moins. Mais comme la Courbe eſt parallele ou ligne droite tant que durent les $Rm = \frac{1}{\infty^2}$ ou $= \frac{1}{\infty^3}$, on peut auſſi concevoir que les Rm n'exiſtent plus, que leur Suite eſt ſimplement infinie, & que par conſéquent il y a une infinité d'infinités de Pp ſans Rm correſpondans. Au contraire dans l'Aſymptotiſme perpendiculaire il eſt plus naturel de concevoir, ſelon les art. 864 & 866, qu'à un ſeul $Rm = \infty$ répond un $Pp = \frac{1}{\infty}$. Mais auſſi comme $Rm = \infty$ eſt équivalent à une infinité d'infinités de $Rm = \frac{1}{\infty}$, ou à une infinité de $Rm = 1$, on peut concevoir qu'à chacun de ces $Rm = 1$ répond un $Pp = \frac{1}{\infty^2}$, ce qui n'empêche point que ces Rm ne ſoient tous poſés bout à bout en ligne droite, & le nombre infini des $Pp = \frac{1}{\infty^2}$ qui répondront à ce nombre infini de $Rm = 1$, ne feront qu'un $Pp = \frac{1}{\infty}$, tel qu'on l'a trouvé d'abord.

872. Cette idée d'une infinité de $Pp = \frac{1}{\infty^2}$ ne détruit

point la ſuppoſition des Pp conſtans, puiſqu'elle n'a lieu qu'à l'extrémité du cours de la Courbe, où Pp, nul par rapport à Rm, peut être conçu d'un ordre d'Infiniment petit inférieur à $\frac{1}{\infty}$ (851 & 852).

873. Dans l'Aſymptotiſme parallele, l'Aſymptote eſt parallele à l'axe, & perpendiculaire dans l'Aſymptotiſme perpendiculaire, & néceſſairement infinie dans les deux cas. Donc ſi une Courbe a une Aſymptote, il faut que cette Aſymptote puiſſe être priſe de maniere qu'elle repréſente celui des deux mouvemens de la Courbe qui ſera infini.

Cas où la Courbe arrive à la perpendicularité par un cours fini, & enſuite redeſcend vers l'axe, ou continue de monter, en tendant au parallélisme.

874. Maintenant ſi la Courbe arrive à la perpendicularité par un cours Fini déterminable, auquel cas elle n'eſt perpendiculaire que par un côté $= Rm = \frac{1}{\infty}$, il faut voir ce qui peut arriver.

Il eſt ſûr d'abord, que puiſqu'elle eſt arrivée par un premier cours à un Terme qui eſt la perpendicularité, elle ne peut plus dans un ſecond cours que tendre au parallélisme. Donc les Rm qui étoient croiſſans, deviendront décroiſſans, & par conſéquent la Suite des Rm eſt arrivée à un *plus grand*, ou à un Terme arbitraire de grandeur.

Cas où la Courbe redeſcend par un rebrouſſement.

FIG. V.

875. La Courbe peut ou redeſcendre vers ſon axe, ou continuer de monter.

Si elle redeſcend, le côté Mm où elle eſt arrivée, étant entierement perpendiculaire, ou vertical, ou montant, il ne peut être Terme moyen entre un cours montant & un deſcendant, donc il reſte qu'il ſoit Terme commun; & il ne peut l'être, à moins qu'il ne ſoit en même temps montant & deſcendant, & il ne peut encore l'être, à moins que l'on ne conçoive un rebrouſſement, moyennant lequel il y aura un autre côté $m\mu$ deſcendant, exactement poſé le long de Mm montant, de ſorte que Mm & $m\mu$ feront phyſiquement un ſeul côté qui ſera en même temps montant & deſcendant, & par conſéquent Terme commun entre le cours montant & le deſcendant.

876. Il eſt également poſſible que la branche rebrouſſante

muB soit posée comme dans la Figure, de sorte que la Courbe continuera d'avancer de *A* vers *B*, ou que cette branche, soit intérieure, soit extérieure à la branche directe *A Mm*, retourne de *m* vers *A*.

877. Mais de quelque maniere que ce soit, la Courbe arrivée à la perpendicularité par le côté *Mm*, ne peut redescendre vers son axe sans un rebroussement, parce qu'il lui faut alors un Terme commun.

878. Puisque la Courbe redescend, ses Ordonnées sont décroissantes, & puisqu'elle tend au parallélisme (874), leurs différences *Rm* sont décroissantes aussi. Donc la Courbe est convexe vers son axe dans son second cours, comme dans le premier.

879. Si la Courbe continue de monter, ses Ordonnées continuent d'être croissantes, & leurs différences *Rm* sont décroissantes (878), donc elle est concave vers son axe dans son second cours, donc elle a passé de la convexité à la concavité vers le même axe. *Cas où la Courbe continue de monter par une inflexion.*

880. Ce passage doit se faire avec inflexion (825), si, selon le raisonnement de l'art. 839, la Courbe est véritablement concave & convexe vers un même axe, c'est-à-dire, vers quelque axe qu'on puisse lui donner, comme l'est la Courbe de la Fig. III. Mais si elle est comme la Courbe de la Fig. VI, qui étant rapportée à un axe perpendiculaire à *AB*, est toujours concave vers cet axe, alors de la branche *A M* convexe vers *AB*, elle passe à la branche *mC* concave vers le même *AB* par le côté perpendiculaire *Mm*, sans y avoir d'inflexion, & ce côté *Mm* est un Terme moyen entre les côtés du premier cours qui montoient de *A* vers *M*, & ceux du second qui montent de *m* vers *C*, parce qu'il ne monte ni de *A* vers *M*, ni de *m* vers *C*.

881. Si la Courbe arrivée à la perpendicularité, redescend comme dans la Fig. V, l'Ordonnée qui répond au point *M*, est plus grande que toutes celles qui l'ont précédée dans le 1er cours, & que toutes celles qui la suivent dans le 2d. C'est la même chose pour les deux autres cas de l'art. 876,

mais ce n'eſt que dans le 1[er] des trois que l'Ordonnée, qui répond au point *M*, eſt appellée une *plus grande* Ordonnée, parce que dans les deux derniers l'axe finit ſous le point *M*, & que les Ordonnées rebrouſſent ſur l'axe de *M* vers *A*. Or qu'une Ordonnée ſoit la plus grande de toutes, parce qu'elle eſt la derniere d'un cours auquel l'axe a, pour ainſi dire, manqué, cela n'a rien de ſingulier par rapport aux Ordonnées, ni qui leur appartienne, à proprement parler. Mais quand elles viennent à décroître, en allant toujours en avant ſur l'axe, ou de *A* vers *B*, c'eſt quelque choſe qui leur appartient plus particulierement.

882. Quand la Courbe continue de monter, ſoit ſans inflexion, ſoit avec inflexion, il n'y a point là de *plus grande* Ordonnée.

883. Quand la Courbe redeſcend, il y a un rebrouſſement perpendiculaire (877), c'eſt-à-dire, deux côtés perpendiculaires *Mm*, *m* μ, exactement poſés le long l'un de l'autre, & égaux, puiſqu'ils ſont un même Terme commun. Donc à ces deux côtés répondent trois Ordonnées qui, à cauſe de la perpendicularité des côtés, ſont ſans *Pp* qui les ſéparent, & ſont par conſéquent infiniment plus proches que toutes les autres conſécutives qui ſont infiniment proches, & en même temps à cauſe de l'égalité des côtés $=$ *Rm*, elles ont des différences égales, & à cauſe du rebrouſſement elles ſont en contre-progreſſion arithmétique, ou comme 1, 2, 1.

884. Il en va de même de l'inflexion perpendiculaire, à cela près que les trois Ordonnées, qui y répondent, infiniment plus proches que toutes les autres, ſont en progreſſion arithmétique, ou comme 1, 2, 3.

885. Quant au cas de la Fig. VI, rien ne détermine néceſſairement le côté perpendiculaire *Mm* à être égal, ni à *Rm* qui le précéde, ni à celui qui le ſuit. Et par conſéquent il n'y a point là trois Ordonnées qui ſoient néceſſairement en progreſſion ou contre-progreſſion arithmétique.

Cas où la Courbe arrive, non à la

886. Si la Courbe, au lieu d'arriver au Terme naturel de ſon obliquité décroiſſante, ou à la perpendicularité, n'arrive,

comme elle peut, qu'à un Terme arbitraire, il n'y a qu'à appliquer là tout ce qui a été dit sur le Terme arbitraire de l'obliquité croissante dans les art. 829, &c. 834, car des côtés obliques sont toujours la même chose, soit qu'ils soient plus ou moins obliques que tous les précédens.

perpendicularité, Terme naturel, mais au Terme arbitraire équivalent.

887. Donc une Courbe d'une obliquité, soit croissante, soit décroissante, qui n'arrive point au Terme naturel de cette obliquité, c'est-à-dire, au parallélisme ou à la perpendicularité, arrive au Terme arbitraire, c'est-à-dire, à deux côtés égaux, plus obliques que les précédens, & moins que les suivans, ou au contraire, & cette égalité des côtés emporte l'inflexion ou le rebroussement.

Cas où la Courbe arrive par un cours infini à un Terme arbitraire d'obliquité croissante, ou décroissante. Asymptotisme.

888. Il est clair, par tout ce qui a été dit, que ce qui emporte dans ce cas l'inflexion ou le rebroussement, & conséquemment l'égalité de deux côtés, c'est qu'un second cours succede au premier, ou qu'il se fait un changement. Donc si cette raison cesse, c'est-à-dire, si la variation est infinie sans changement, ou s'il n'y a qu'un cours, la Courbe pourra n'arriver par un cours infini qu'à un Terme arbitraire d'obliquité, qui ne sera qu'un seul côté plus ou moins oblique que ceux de la Suite infiniment infinie qui auront précédé.

889. En ce cas cette Suite infiniment infinie de côtés obliques demande nécessairement deux Suites pareilles, l'une de Pp, l'autre de Rm, tous de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & par conséquent les deux mouvemens de la Courbe, l'horisontal & le vertical, seront infinis.

890. Donc elle n'aura point d'Asymptote ni parallele ni perpendiculaire à son axe (801).

891. Tant que la Courbe *AMm* n'aura que des côtés obliques à l'axe *AB*, les points *T* où chaque côté *Mm* prolongé rencontre l'axe, seront toujours à une distance finie du point *A*, origine de la Courbe sur l'axe. Car si le point *T* pouvoit être infiniment éloigné de *A*, les lignes *MT* & *AT* seroient paralleles (693), & par conséquent le côté *Mm* parallele à l'axe, ce qui est contre la supposition. Donc si la

FIG. II.

Courbe *A Mm*, dont les côtés sont toujours plus obliques, n'arrive par un cours infini qu'à un côté plus oblique que tous les précédens, ce côté, quoiqu'infiniment éloigné, étant prolongé jusqu'à l'axe, ne tombe que sur un point *T*, finiment distant de *A*. Donc la ligne *AT* est finie.

892. Donc tous les côtés de la Courbe prolongés ne sont tombés que sur des points entre *A* & *T*, toujours plus proches de *T*, à mesure que ces côtés étoient plus obliques. Et il est clair que deux points où tombent deux côtés consécutifs prolongés, sont infiniment proches, & que leur distance est au moins de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$.

893. Le mouvement de la Courbe, ou, ce qui est la même chose, de tous ses côtés pris ensemble, étant donc infini de *A* vers *B* par la supposition, le mouvement de ces mêmes côtés prolongés jusqu'à l'axe n'est que fini de *A* vers *T*. Or l'essence de l'Asymptotisme est que de deux mouvemens correspondans, l'un soit infini, tandis que l'autre n'est que fini (801). Donc il y a là un Asymptotisme, & il consiste en ce que la ligne *TM* qui fera sur l'axe un angle aigu déterminable *ATM*, sera telle que la Courbe ne pourra arriver que par un cours infini à avoir un côté, qui étant prolongé, soit cette *TM*. Donc *TM* sera Asymptote de la Courbe.

894. La ligne *AT* étant finie, ne pourra fournir aux points *T* qu'une infinité de distances de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$. Or il y a une infinité d'infinités de côtés; donc il n'y en aura qu'un nombre infini qui prolongés puissent tomber sur des points *T*, dont la distance soit $= \frac{1}{\infty}$, & il est visible que ce seront ceux qui seront vers l'origine de la Courbe. Quant au nombre infiniment infini des autres, ils ne tomberont tous que sur le même dernier point *T*, ou, ce qui revient au même, ils n'auront sur *AT* que des distances d'un ordre inférieur à $\frac{1}{\infty}$. Donc la Courbe, pendant un cours infini, se confondra avec son Asymptote *TM*, ou sera ligne droite, & ne sera courbe que pendant un cours Fini indéterminable, ce qu'on a déja vû

être

être une propriété inséparable de l'Asymptotisme.

895. Puisque la Courbe, pendant un cours infini, sera une ligne droite oblique à l'axe, elle aura, les *Pp* étant constans, une infinité d'infinités de *Rm* de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ tous égaux, & les *Rm* n'auront été décroissans que pendant le cours Fini indéterminable, ou, ce qui revient au même, les *Rm* ayant toujours, à cause de l'obliquité perpétuelle, un rapport fini aux *Pp*, ce rapport ne sera variable que pendant un cours Fini indéterminable de la Courbe, & constant pendant un cours infini, ou du moins infiniment moins variable.

896. Donc quand la Courbe arrive par un cours infini à un Terme arbitraire d'obliquité croissante, ce Terme est une ligne droite infinie, au lieu qu'il n'en est qu'une infiniment petite, quand la Courbe arrive à ce Terme par un cours fini.

897. Si l'on suppose que la Courbe arrive par un cours infini à un Terme arbitraire d'obliquité décroissante, ce sera entierement la même chose ; à cela près que la Courbe sera convexe vers son axe. Il ne faut que rapporter la Courbe *AMm* à un axe tiré au point *A* perpendiculairement à FIG. II. *AB*, & tous les mêmes raisonnemens reviendront.

898. Donc toute Courbe qui arrive par un cours infini à un Terme arbitraire d'obliquité, a une Asymptote oblique à son axe, & qui fait avec cet axe l'angle aigu, qui est le Terme arbitraire de l'obliquité de la Courbe.

899. Si on prend cette Asymptote pour axe infini, ou pour ordonnée infinie de la Courbe, alors on retombe dans le cas de l'Asymptotisme parallele ou perpendiculaire.

900. Le caractere général de l'Asymptotisme est que le cours de la Courbe étant infini, le dernier *Rm* ait un rapport fini au *Pp*, correspondant, ce qui arrive dans l'Asymptotisme oblique (895), ou que *Rm*, soit de deux ordres au dessous ou au dessus de *Pp*, ce qui arrive dans l'Asymptotisme parallele ou perpendiculaire (870).

901. Réciproquement si le cours de la Courbe étant infi-

ni, le dernier Rm a un rapport fini au Pp correſpondant, il y a un Aſymptotiſme oblique, & ſi Rm eſt de deux ordres au deſſus ou au deſſous de Pp, il y a Aſymptotiſme perpendiculaire ou parallele; perpendiculaire dans le 1er cas, parallele dans le 2d.

Que l'angle de contingence ne peut être fini.

902. Voilà tout ce qui regarde toutes les poſitions poſſibles de la Courbe par rapport à un axe, & l'on n'a vû aucun cas où l'angle de contingence de deux côtés conſécutifs pût être fini; mais il y a plus, il reſulte de tout ce qui a été dit, qu'il ne peut l'être, & c'eſt là ce qui a été laiſſé comme en ſuſpens dans l'art. 747.

Je ſuppoſe que le premier des deux côtés qui feront entre eux l'angle de contingence fini, ſoit oblique & montant, & d'une telle obliquité que le côté ſuivant ne puiſſe faire avec lui l'angle de contingence déterminé ſans redeſcendre vers l'axe, car tout cela pourra toûjours être par rapport à quelque axe que je donnerai à la Courbe; elle montera donc par ce premier côté, & redeſcendra par le ſuivant, ſans avoir paſſé par aucun Terme, ni moyen, ni commun, ce qui eſt impoſſible, & contraire à la douceur infinie qui fait l'eſſence de la variation des Courbes. Donc l'angle de contingence fini eſt impoſſible.

903. De plus l'angle de contingence fini ſeroit aigu, puiſqu'il ſeroit le dernier d'une Suite infinie d'angles aigus infiniment petits. Ce ſeroit donc un aigu toujours plus grand, ſelon que la Suite d'angles, dont il ſeroit la derniere grandeur, ſeroit plus croiſſante, & enfin elle pourroit l'être à tel point, qu'il ſeroit le plus grand de tous les aigus, c'eſt-à-dire, droit; & par conſéquent il y auroit un axe par rapport auquel la Courbe arrivée au parallėliſme, arriveroit auſſi-tôt après, & dès le côté ſuivant à la perpendicularité. Or deux Termes ne peuvent être contigus (682).

904. On peut ajouter enfin que ſi l'angle de contingence pouvoit être fini, la variation croiſſante qui l'y conduiroit, pourroit être croiſſante de moins en moins, & par conſéquent arriver à l'Egalité, c'eſt-à-dire, à deux angles de con-

tingence finis & égaux consécutifs. En ce cas il y auroit un côté de la Courbe dont les deux extrémités seroient les sommets de ces deux angles, & ces angles étant finis, les sommets en seroient sensibles & déterminables, & par conséquent la grandeur du côté le seroit aussi. Or il est impossible que la grandeur d'un côté infiniment petit soit déterminable.

Theorie de la courbure des Courbes.

905. Il ne reste plus presentement qu'à examiner ce qui appartient à la courbure des Courbes.

Pour cet examen il faut abandonner la supposition des *Pp* constans, & prendre l'une ou l'autre des deux suppositions de l'art. 752. qui ont toutes deux essentiellement rapport à la Courbure, car il faut toûjours quelque chose de constant (764). La 1re de ces deux suppositions, qui est celle des côtés constans, est la plus aisée dans la pratique, & nous la préférons. Donc la variation de la courbure sera celle des angles de contingence *DBC*. La courbure sera croissante, si ces angles croissent, décroissante, s'ils décroissent, & suivra le rapport de leurs accroissemens ou décroissemens.

906. La mesure de ces angles étant leur Sinus, qui sera une ligne infiniment petite du 2d ordre (741), la mesure de la courbure sera donc ce Sinus de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$.

Differens cas ou la courbure est nulle.

907. Ce Sinus existe, & par conséquent il y a courbure, tant que les côtés font entr'eux un angle de contingence infiniment petit, de quelque grandeur qu'il soit dans l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ mais dès qu'ils cessent d'en faire un, il n'y a plus de courbure. Or ils cessent d'en faire un, quand ils sont exactement posés ou bout à bout en ligne droite dans l'inflexion, ou l'un sur l'autre dans le rebroussement. Donc alors la courbure est nulle.

908. Donc alors la Courbe qui arrive ou à l'inflexion, ou au rebroussement, y est arrivée par une courbure toûjours décroissante.

909. La Courbe qui a une Asymptote quelconque, étant ligne droite pendant un cours infini, elle aura pendant tout ce cours une courbure nulle, & par conséquent sa

ſa courbure précédente aura été décroiſſante.

Ce qui fait la courbure infinie, & les cas où elle l'eſt.

910. La courbure croiſſante devroit aboutir à un angle de contingence fini, ce qui la rendroit infinie. Mais cet angle eſt impoſſible (902, 903, 904). Donc la courbure ne peut devenir infinie de cette maniere. Il faut donc voir de quelle maniere elle le peut devenir.

Tout côté oblique a un *Rm* & un *Pp* de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ qui lui répondent, & il eſt de ce même ordre; & parce qu'il eſt oblique d'une certaine obliquité néceſſairement déterminée, il a un certain rapport de grandeur déterminé à *Rm* & à *Pp* qui lui répondent, & cela, quelque ſuppoſition qu'on faſſe, ou des *Rm*, ou des *Pp*, ou des côtés *Mm* conſtans. Quand un côté eſt parallele, il eſt néceſſairement égal à quelque portion de l'axe, mais quand il eſt perpendiculaire, il n'a aucun rapport néceſſaire de grandeur à *Pp*, mais peut être plus grand ou plus petit, ſelon telle raiſon qu'on voudra (819), c'eſt-à-dire, dans le cas qu'il ſoit plus petit, qu'il peut l'être plus que tous les *Pp* qui répondront à des côtés obliques, & non pas plus que ſon *Pp* correſpondant, car il n'en a point, ou n'en a qu'un infiniment petit par rapport à lui.

En effet on a vû qu'un côté perpendiculaire $= \infty$ n'avoit qu'un $Pp = \frac{1}{\infty}$ (864 & 866), ce qui marque bien que la grandeur du côté perpendiculaire ne garde aucun rapport avec celle des *Pp*, qui ſont de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ tant qu'ils exiſtent.

Donc en renverſant cet exemple, il doit être poſſible auſſi que *Pp* étant zero abſolu pour un côté perpendiculaire, ce côté ſoit de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, puiſque rien ne l'aſſujettit à aucun rapport de grandeur à *Pp*, & qu'il lui ſuffit au contraire de n'en avoir point qui lui réponde (820).

Et comme un côté perpendiculaire eſt neceſſairement ou l'Origine ou le Terme d'un cours, ce ne peut être qu'en l'un ou l'autre de ces deux points qu'il ſe trouvera un côté ou infiniment plus grand, ou infiniment plus petit que les *Pp* qui ſeront dans tout le reſte du cours.

Donc il eſt poſſible qu'une Courbe commence ou termine

un cours par un côté $= \frac{1}{\infty^2}$, qui ſera perpendiculaire.

Après ce côté, s'il eſt le premier, en viendra néceſſairement un ſecond oblique, & de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ car ce n'eſt que la perpendicularité qui diſpenſe les côtés, pour ainſi dire, d'être de cet ordre. C'eſt la même choſe renverſée, ſi ce côté $= \frac{1}{\infty^2}$ eſt le dernier du cours.

On peut demander pourquoi à l'origine de la Courbe, par exemple, car cela ſuffit pour fixer l'idée, le côté perpendiculaire $= \frac{1}{\infty^2}$, & le ſuivant oblique $= \frac{1}{\infty}$, ne ſont pas plutôt conçus comme un ſeul côté oblique, puiſque le perpendiculaire eſt nul par rapport à l'oblique, ou pourquoi le perpendiculaire & l'oblique pris enſemble, étant $\frac{1}{\infty}$, on ne conçoit pas ce $\frac{1}{\infty}$ comme diviſé en deux parties du même ordre, dont la premiere ſera perpendiculaire, & la ſeconde oblique, puiſque la diviſion d'une Courbe en ſes côtés eſt entierement arbitraire.

On ne peut pas prendre les deux côtés pour un ſeul oblique, puiſqu'il y a là réellement une poſition perpendiculaire de la Courbe.

On ne peut pas prendre le perpendiculaire $= \frac{1}{\infty^2}$ & une partie de l'oblique $= \frac{1}{\infty}$ pour un même côté perpendiculaire de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, puiſque s'il eſt vrai que la Courbe commence par un côté $= \frac{1}{\infty^2}$, elle fait là un pas infiniment plus petit que tous ceux qu'elle fera enſuite, ou, ce qui eſt la même choſe, fait ſon premier détour infiniment plutôt qu'elle ne fera tous les autres; or c'eſt là quelque choſe de réel, qui vient de ſa nature, & qu'on ne lui peut ôter Et en effet il faut que ce premier côté $= \frac{1}{\infty^2}$, quand il exiſtera, ſoit néceſſaire par l'Equation de la Courbe.

Donc enfin un premier ou dernier côté perpendiculaire $= \frac{1}{\infty^2}$ eſt poſſible.

Or en ce cas la courbure de la Courbe ſera infinie, car ſi

elle commence par là, elle se détournera après un pas infiniment plus petit, ou infiniment plutôt que par tout ailleurs; & si elle termine un cours par là, elle ne fera après un détour ordinaire, qu'un pas infiniment plus petit que tous les autres.

Donc il est possible que la Courbe ait une courbure infinie à l'origine ou l'extrémité d'un cours.

911. L'angle de contingence fini, qui devroit être le Terme de la courbure croissante, étant impossible, c'est cette courbure infinie faite par un côté $= \frac{1}{\infty^2}$ qui prend sa place, & dans les cas où par l'accroissement continuel des angles de contingence, la courbure devroit devenir infinie par un angle de contingence fini, elle ne le deviendra que par un côté $= \frac{1}{\infty^2}$. Ainsi ce cas de courbure infinie ne fera que se substituer à celui où l'angle de contingence auroit dû être fini, & cela ne troublera en rien la considération de la courbure fondée sur les angles en tous les autres cas.

912. Cette courbure infinie ne peut avoir rien de sensible, ni qui frappe les yeux, car quelque exactement qu'une Courbe fût tracée ou décrite, il seroit toujours impossible d'y reconnoître aucune grandeur $\frac{1}{\infty^2}$, & encore moins $= \frac{1}{\infty^2}$, ou la différence de $\frac{1}{\infty^2}$ à $\frac{1}{\infty}$.

913. La courbure infinie qui demande un côté $= \frac{1}{\infty^2}$ n'est pas contraire à la supposition des côtés constans de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, comme les Pp nuls, ou de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ dans la perpendicularité, ne sont point contraires à la supposition des Pp constans. Les raisonnemens des art. 851. & 852. reviennent ici, & les Mm ne peuvent non plus que les Pp, être de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ qu'à l'origine ou à l'extrémité d'un cours.

914. Quand on appelle infinie la courbure qui se fait par un côté $= \frac{1}{\infty^2}$, on suppose que la courbure ordinaire, ou qui se fait par des côtés de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & dont les

angles de contingence ſont de cet ordre, eſt finie; par conſéquent la courbure qui ſe feroit par un côté $= \frac{1}{\infty^3}$ feroit infinie du 2d ordre, & ainſi de ſuite, les angles de contingence étant toujours de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$.

915. Il n'eſt point néceſſaire pour la courbure infinie, que le côté par lequel elle ſe fait ſoit $= \frac{1}{\infty^2}$, il ſuffit qu'il ſoit de cet ordre comme $\frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$ où $\frac{1}{\infty^{\frac{5}{4}}}$, &c. car il ſera toujours infiniment petit par rapport à $\frac{1}{\infty}$.

916. Et par la même raiſon ſi les côtés obliques étoient ſeulement, par ex. $= \frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$, il ſuffiroit que le côté perpendiculaire par lequel ſe feroit la courbure infinie fût $= \frac{1}{\infty}$. En général le raiſonnement qu'on a fait ſur la courbure infinie, ne demande autre choſe, ſinon que le côté, par lequel elle ſe fait, ſoit infiniment petit par rapport aux côtés obliques, de quelque maniere qu'il le ſoit.

917. Ce qui fait la courbure infinie eſt réel, c'eſt un côté qui par la nature de la Courbe n'eſt que de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, tandis que tous les autres ſont de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$. Nous l'avons ſuppoſé perpendiculaire pour mieux faire appercevoir que même dans la ſuppoſition des côtés conſtans il pouvoit être $= \frac{1}{\infty^2}$. Mais un côté perpendiculaire par rapport à un axe, ſera parallele, ou oblique par rapport à un autre, ainſi la perpendicularité du côté n'eſt point néceſſaire pour la courbure infinie. Tout ce qui reſte de néceſſaire, c'eſt que le côté par lequel elle ſe fait, commence ou finiſſe un cours, car une Courbe rapportée à différens axes, ne fait que changer ſes poſitions paralleles en perpendiculaires, ſa concavité en convexité, ou au contraire, mais ſes différens cours ou variations commencent & finiſſent toujours aux mêmes points.

918. Donc la courbure infinie peut ſe faire par un côté parallele; car il commence ou finit néceſſairement un cours.

919. Tout ce qu'exige la nature du côté parallele, c'eſt qu'il y ait un *Pp* égal qui lui réponde ſans *Rm* correſpondant. De-là il a ſuivi que tant qu'on a ſuppoſé que les côtés ne pouvoient être que de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, le côté parallele en étoit auſſi, & $= Pp = \frac{1}{\infty}$ ſuppoſé alors conſtant. Mais ici où le côté parallele eſt $= \frac{1}{\infty^2}$, il faut que *Pp* ſoit auſſi égal à ce même $\frac{1}{\infty^2}$.

920. La courbure infinie ne peut ſe faire par un côté oblique que quand ce côté oblique commencera ou terminera un cours. Prenons le cas où il le termine, qui eſt le plus naturel. Un côté oblique ne termine un cours que quand il eſt Terme arbitraire d'obliquité croiſſante ou décroiſſante, & alors ce côté oblique eſt double, & il y a inflexion ou rebrouſſement (829 & 845). Donc la courbure infinie qui termine un cours, ne peut ſe faire par un côté oblique ſans infléxion ou rebrouſſement.

921. Donc la courbure qui eſt toujours nulle dans l'infléxion, quand les côtés y ſont de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & dans le rebrouſſement, quand les côtés étant de cet ordre, y ſont exactement poſés l'un ſur l'autre, peut être infinie dans ces mêmes points, & ce ſera quand les deux côtés égaux y ſeront de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, ayant été par-tout ailleurs $= \frac{1}{\infty}$. Ils ne font entr'eux, à cauſe de la poſition que leur donne l'inflexion, ou le rebrouſſement, qu'un angle de contingence nul; mais cet angle nul ne rend pas alors la courbure nulle, car il ſe fait dans une étendue de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, & cette étendue rend la courbure infinie.

922. Il eſt clair que cela eſt général pour les inflexions ou rebrouſſemens, tant paralleles, ou perpendiculaires, qu'obliques.

923. La courbure infinie peut ſe faire à l'origine d'une Courbe par un côté oblique ſimple $= \frac{1}{\infty^2}$; car elle s'y peut faire par un côté perpendiculaire ſimple, qui deviendra oblique quand la Courbe ſera rapportée à un autre axe. C'eſt ainſi qu'une

qu'une Courbe peut avoir à son origine un côté simple oblique $= \frac{1}{\infty}$, mais elle ne peut pas de même avoir pour Terme d'obliquité croissante ou décroissante un côté simple oblique.

924. L'inflexion, qui est un Terme ou passage de la concavité à la convexité, ou réciproquement, & le rebroussement, qui est le Terme d'un cours direct, & l'Origine d'un rebroussant, sont toujours compliqués avec un Terme de courbure croissante ou décroissante, & ce Terme est une courbure ou nulle, ou infinie.

925. Donc aussi le Terme arbitraire d'obliquité, qui est toujours compliqué avec l'inflexion ou le rebroussement, est pareillement compliqué avec un Terme de courbure.

926. L'Inflexion & le rebroussement, où la courbure est nulle, & qui se font par deux côtés égaux de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, ont de plus ces deux côtés égaux, qui font un Terme, de sorte que les Pp ayant été supposés constans, la Courbe a dû, dans son cours précédent, tendre à cette égalité de côtés, c'est-à-dire, que ses côtés n'ont pu croître ou décroître que de moins en moins. Il y aura donc dans toute inflexion ou rebroussement de cette espece une complication de quatre Termes différens, 1°. D'inflexion, ou de rebroussement. 2°. De position parallele, ou perpendiculaire, ou la plus ou la moins oblique de toutes par rapport à l'axe. 3°. D'égalité des deux côtés. 4°. De courbure nulle.

927. Si l'inflexion ou le rebroussement sont accompagnés de courbure infinie, les deux 1ers Termes de l'art. précédent subsistent, & le 4me se change en une courbure infinie. Pour le 3me, il n'est plus question de considérer les deux côtés égaux de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, les Pp étant constans, car ces côtés de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ ne répondent à aucun Pp qui soit de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, mais parce que ces côtés sont deux, & $= \frac{1}{\infty^2}$, ils marquent non seulement une courbure infinie, mais une égalité de courbure infinie. Ils tiennent la place de deux angles de contingence finis égaux & consécutifs, auxquels la courbu-

re croiſſante ſeroit arrivée, en croiſſant toujours de moins en moins, ſi des angles finis avoient été poſſibles. Il y a donc encore ici quatre Termes compliqués.

928. Une Courbe qui ſe termine par un côté de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ comme tous les autres, ne peut avoir à ſon extrémité une courbure infinie: mais elle en peut avoir une nulle, parce que ce côté pourra faire avec le précédent un angle de contingence nul, & ces deux côtés, poſés bout à bout en ligne droite, ne produiront point d'inflexion à l'extrémité d'un cours infini où la Courbe ſe termine.

929. Quant à la Courbe qui ſe termineroit par un côté $= 1$ (860), il eſt bien viſible que ſa courbure eſt nulle à cette extrémité, puiſqu'elle y devient ligne droite finie. A plus forte raiſon, la Courbe qui a une Aſymptote.

930. Donc la Courbe peut avoir à ſon extrémité une courbure nulle, parce qu'elle y ſera ligne droite pendant une étendue infiniment petite, mais plus grande que partout ailleurs (928), ou qu'elle y ſera droite finie, ou infinie.

931. Comme il n'y a point de Terme naturel auquel un arbitraire ne puiſſe être ſubſtitué, il faut qu'il y ait un Terme arbitraire de courbure croiſſante ou décroiſſante, & ce ſera un angle de contingence plus grand ou plus petit que les précédens, & ſuivi par des angles plus petits ou plus grands. Il ne ſe fait là aucune complication néceſſaire d'autres Termes.

932. Rien n'empêche qu'une Courbe n'arrive par un cours infini à un ſimple Terme arbitraire de courbure: mais en ce cas il eſt viſible qu'elle ne doit pas avoir d'Aſymptote, ni même un dernier côté $= 1$. Ce ne peut donc être que dans le cas où elle aura un dernier côté $= \frac{1}{\infty}$, car il ſera poſſible qu'il faſſe encore un angle de contingence avec le précédent, ſoit plus grand, ſoit plus petit que les angles précédens.

Ordre des Changemens des Courbes. 933. Tout ce qui appartient aux variations & aux changemens des Courbes ayant été examiné, il eſt aiſé de voir quel ordre peuvent garder entr'eux les changemens, quand il y en a.

Une Courbe ne peut aller du parallélisme au parallélisme, ni de la perpendicularité à la perpendicularité, ni en général d'un Terme quelconque à un autre de même espece, parce que deux Termes de même espece ne peuvent être consécutifs (681), ou, ce qui est le même, une Courbe arrivée à un Terme ne peut tendre dans la variation suivante qu'à un Terme contraire, soit naturel, soit arbitraire.

934. Une Courbe peut aller d'un Terme naturel de sa position par rapport à l'axe à un autre Terme naturel contraire, c'est-à-dire, être alternativement parallele & perpendiculaire tant de fois qu'on voudra.

935. Une Courbe peut aller d'une Inflexion à une Inflexion, pourvû que dans la 1re la courbure ayant été nulle ou infinie, & pareillement le Terme d'obliquité ayant été celui d'une obliquité croissante ou décroissante (926), cette courbure & ce Terme soient dans la 2de Inflexion contraires à ce qu'ils étoient; cela peut arriver alternativement autant de fois qu'on voudra.

936. Il en faut dire autant des Rebroussemens.

937. Jusqu'ici nous n'avons considéré que les Courbes qui commençoient par s'élever au dessus de leur axe : mais elles peuvent aussi avoir leur origine à un point qui soit au dessus de cet axe, & descendre vers lui. Cette nouvelle supposition ne changera rien à tout ce qui a été dit, sinon que ce qui étoit montant sera descendant, une Ordonnée la plus grande de deux variations consécutives sera la plus petite, &c. mais tous les raisonnemens demeureront les mêmes.

938. Une Courbe peut même descendre au dessous de son axe, & cela ne change encore rien. Seulement si les Ordonnées tirées au dessus de l'axe ou supérieures ont été qualifiées de positives, les inférieures seront négatives. Il faut appliquer ici tout ce qui a été dit dans les articles 719, &c. 725.

939. Après que l'on a vû tout ce qui peut arriver aux Courbes en général, il ne reste plus qu'à voir comment on peut déterminer géométriquement tout ce qui doit arriver à *Equations des Courbes. Courbes géométriques & méchaniques.*

une Courbe ſelon ſa nature particuliere, c'eſt-à-dire, ſelon la Loi ou l'Equation qui la reglera.

Nous avons ſuppoſé d'abord dans les art. 761, &c. 765, que cette Equation conſiſtoit toujours dans quelque rapport perpétuel des Abſciſſes aux Ordonnées affectées ou conditionnées d'une certaine maniere. Mais comme on a vû dans toute la ſuite que les Courbes ne ſont compoſées que de grandeurs infiniment petites, ou réſultent de la combinaiſon de différentes grandeurs de cette eſpece, il eſt viſible que leur nature particuliere ſera déterminée, quand on aura déterminé le rapport de quelques-unes de ces grandeurs, par ex. des *Rm* aux *Pp*, ſans avoir déterminé celui des *AP* aux *PM*. Cela revient à l'art. 687.

Si le rapport perpétuel qui doit faire l'eſſence de la Courbe eſt établi entre des grandeurs infiniment petites, il ſe peut également qu'il s'enſuive ou ne s'enſuive pas de là un rapport perpétuel entre les Abſciſſes & les Ordonnées. Dans le 1er cas, il a été inutile, du moins à parler en général, mais non pas impoſſible, de régler la Courbe par cette ſorte de rapport, & on la peut ramener à une Equation qui exprime le rapport des Abſciſſes aux Ordonnées ; dans le 2^d^ cas, la Courbe n'a pu avoir d'autre Equation, & il n'y a point de rapport perpétuel entre ſes Abſciſſes & ſes Ordonnées.

Dans le 1er cas, la Courbe eſt appellée *géométrique*, parce que le rapport entre ſes Abſciſſes & ſes Ordonnées, qui ne ſont que des lignes droites, étant perpétuel, on peut la connoître & la décrire en tous ſes points par le moyen de ces droites qu'on peut tirer ou déterminer géométriquement.

Mais dans le 2^d^ cas, la Courbe eſt appellée *méchanique*, parce que ſon eſſence ne conſiſte que dans un rapport d'Infiniment petits qui ne peuvent être déterminés, & que les Abſciſſes & les Ordonnées n'ayant pas un rapport perpétuel, on ne peut déterminer géométriquement une Abſciſſe & une Ordonnée quelconques.

940. On voit par la nature des Courbes méchaniques que pour les connoître il faut une Théorie & un Calcul de

Infiniment petits, mais que les géométriques en doivent être plus indépendantes.

En effet, x exprimant toujours une Abſciſſe, & y une Ordonnée indéterminée, il y a certaines choſes que la ſeule Algebre ordinaire donne à la premiere vûe de l'Equation d'une Courbe géométrique. Par exemple, ſi cette équation eſt $ax = yy$, ou $1x = yy$, ou $x = yy$, ſoit en prenant la grandeur conſtante $a = 1$, ſoit en la ſouſentendant, on voit que cette Courbe, qui eſt la Parabole, a des Ordonnées négatives égales aux poſitives correſpondantes: car ſoit que chaque Ordonnée ſoit $= y$, ou $= -y$, on a toujours le quarré yy, & $x = yy$. Donc elle a des Ordonnées au deſſus & au deſſous de l'axe indéterminé x, égales chacune à chacune. On voit auſſi qu'elle n'a point d'Abſciſſes négatives, ou $= -x$, c'eſt-à-dire, priſes à la gauche du point de l'axe où l'on aura fixé l'origine de ſon cours vers la droite; car l'équation ſeroit $-x = -yy$, or elle deviendroit imaginaire, puiſque $-yy$ ne peut être un quarré réel. Un point étant donc fixé pour origine de l'axe, la Parabole n'a ſon cours qu'à la droite ou à la gauche de ce point, mais elle a un cours égal tant au deſſus qu'au deſſous de l'axe.

Si l'on prend la 1re Parabole cubique, qui eſt $aax = y^3$, ou $x = y^3$, on voit que l'équation $-x = -y^3$ eſt la même, & par conſéquent que cette Parabole peut avoir des Abſciſſes négatives en même temps que des Ordonnées négatives, auſſi-bien que des Abſciſſes poſitives en même temps que des Ordonnées poſitives, mais non les unes poſitives, & les autres négatives en même temps, & par conſéquent qu'à la droite du point de ſon origine elle aura ſeulement des Ordonnées au deſſus de l'axe, & à la gauche des Ordonnées ſeulement au deſſous.

De même dans la 2de Parabole cubique, $x^2 = y^3$, on voit que x^2 eſt auſſi-bien quarré de $-x$ que de x, & que par conſéquent la Courbe a des Abſciſſes négatives, mais que l'équation ne peut pas être $-x^2 = -y^3$, parce que $-x^2$ ſeroit un quarré imaginaire, & par conſéquent que la Courbe

n'a point d'Ordonnées négatives ; d'où il suit qu'elle a son cours tant à la droite qu'à la gauche du point de son origine, mais toujours au dessus de l'axe.

On verra pareillement par la seule équation d'une Courbe géométrique, si elle aura des Ordonnées, & par conséquent des portions imaginaires, ou des vuides (680), combien elle aura de Branches, car elle en aura autant que les Ordonnées *y*, élevées à une certaine puissance déterminée par l'équation de la Courbe, auront de valeurs ou racines réelles, & quelques autres choses qui sont connues par l'Algebre.

Mais il y a toujours dans la connoissance des Courbes, même géométriques, un grand nombre de choses qui demandent la Théorie de l'Infiniment grand ou petit, du moins pour être connues d'une maniere générale & commune à toutes les Courbes, & en même temps immédiatement tirée du fond de leur nature. Il faut donc aussi avoir l'Art de calculer les Infinis qui entrent dans les Courbes, & sur-tout les Infiniment petits, parce que, comme nous l'avons vû, les différences infiniment petites des grandeurs finies qui y entrent, sont ce qu'il y a de plus important à considérer. Par cette même raison, ce Calcul s'appelle *Différentiel*.

Il consiste à trouver quel est l'Infiniment petit d'une grandeur finie quelconque complexe ou incomplexe, conditionnée comme l'on voudra. Je suppose ces Regles connues, & elles le sont effectivement de tous les Géometres. Ces Infiniment petits étant déterminés, on opere sur eux comme nous avons fait dans tout cet Ouvrage. Il n'est plus question présentement que de faire voir comment par le Calcul différentiel on peut déterminer tout ce qui appartient à la connoissance des Courbes sans exception, & cela, en ne faisant que suivre les conséquences nécessaires qui naissent de tout ce qui a été établi jusqu'ici.



SECTION XI.

Regles générales pour déterminer par le Calcul Différentiel tout ce qui appartient au cours d'une Courbe rapporté à un Axe.

941. L'INDE'TERMINE'E AP étant appellée x, & PM correspondante y, Rm est dy, & Pp, dx, & Mm $\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Ainsi dx & dy sont Elémens aussi-bien que Différences de x & de y ; c'est-à-dire, que non seulement dx & dy sont les grandeurs de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, dont x & y croissent à chaque pas infiniment petit de la Courbe, mais encore que chaque dx & chaque dy est un nombre de fois infini dans x ou dans y finis, & le même nombre de fois, puisqu'à chaque dx répond un dy. FIG. II.

942. Je suppose dans toute cette Section les Pp ou dx constans.

Si l'on prend trois Ordonnées infiniment proches, correspondantes aux deux côtés consécutifs Mm, $m\mu$, & leurs différences Rm, $r\mu$, & qu'on veuille avoir la différence de ces différences, il faut prolonger le côté Mm en p jusqu'à la rencontre de $r\mu$ prolongée, moyennant quoi μp est la différence de Rm & de $r\mu$. Or μp est en même temps la base de l'angle de contingence $pm\mu$. D'ailleurs Rm & $r\mu$ étant toutes deux dy, leur différence, ou la différence 2[de] des trois Ordonnées est ddy, égale à la base de l'angle de contingence. FIG. VII.

943. ddy est la différence infiniment petite par rapport à $r\mu = dy$, dont $r\mu$ a décru dans la Figure, & est en même temps élément de $r\mu = dy$, comme dy est élément & différence de y. Il en faut dire autant de ddx à l'égard de dx, si dx n'est pas constant, car une grandeur qui ne croît ni ne décroît, n'a point de différence, c'est-à-dire, de grandeur infiniment petite par rapport à elle, dont elle croisse ou décroisse

à chaque inſtant. On pourroit lui concevoir un élément infiniment petit, mais cela ſeroit inutile.

944. Si ddy eſt variable, comme il eſt très-poſſible & ordinaire qu'il le ſoit, il aura encore un $dddy$ pour élément & pour différence, ce qui peut aller ſi loin qu'on voudra.

945. De-là il ſuit (412) que ddy & dy^2 ſont du même ordre, c'eſt-à-dire, de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, $dddy$ & dy^3 du 3me, &c. On a déja vû (740) que la baſe de l'angle de contingence $= ddy$ (942) étoit de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$.

946. L'Equation d'une Courbe renfermant toute ſon eſſence, le Principe général & invariable de toute la Théorie des Courbes eſt, que toutes les diverſes ſuppoſitions que l'on peut faire ſur les grandeurs indéterminées qui entrent dans l'équation, en leur conſervant le rapport preſcrit par l'équation, ſont autant de modifications ou *affections* qui appartiennent à la Courbe, & qu'elle doit avoir. Ainſi ſi l'équation permet qu'une grandeur indéterminée qu'elle renferme ſoit ſuppoſée d'une certaine valeur finie, ou infinie, ou infiniment petite, tout ce qui s'en enſuivra appartiendra à la Courbe, & en ſera quelque modification.

947. Quand une Courbe peut avoir ou x ou y, ou l'un & l'autre $= \infty$, ou de cet ordre, ſon cours eſt infini.

948. Si x étant $= \infty$, y n'eſt que fini, ou au contraire, la Courbe a un Aſymptote.

949. Par la raiſon contraire il n'y auroit point d'Aſymptote, lorſque x & y peuvent être l'un & l'autre $= \infty$, ſi ce n'étoit qu'une Courbe d'un cours infini, & qui ſe termine par être oblique à ſon axe, a $x = \infty$, & $y = \infty$, & a toujours cependant une Aſymptote (888, &c. 901). Donc afin qu'une Courbe qui a x & $y = \infty$, n'ait point d'Aſymptote, il faut qu'elle ſe termine par être parallele ou perpendiculaire à ſon axe.

Regle pour déterminer quand une Courbe d'un

950. Et comme une Courbe qui au bout d'un cours infini eſt parallele à ſon axe, & a une Aſymptote, a ſon dernier dy de deux ordres au moins au deſſous de dx (800 & 808),

&

& que celle qui est perpendiculaire, & a pareillement une Asymptote, a son dernier $dy = \infty$ (864 & 865), il s'ensuit cette Regle générale. *cours infini a une Asymptote, ou n'en a pas.*

Toute Courbe qui a un cours infini, & se termine par être oblique à son axe, ou se termine par être parallele, & a en même temps dy de deux ordres au dessous de dx, ou se termine par être perpendiculaire, & a en même temps $dy = \infty$, a une Asymptote. Et hors de-là elle a un cours infini sans Asymptote.

EXEMPLE I.

951. Soit l'Hyperbole rapportée à son premier axe, ou axe traversant, dont a est la moitié, b étant la moitié du second. Son équation est, $yy . xx - aa :: bb . aa$, les x étant comptés du centre de l'Hyperbole. Or on voit que x & y peuvent être tous deux infinis, & alors $y^2 . x^2 :: b^2 . a^2$, ou $y . x :: b . a$, & par conséquent y & x infinis ont un rapport fini. D'ailleurs la même équation donne selon le Calcul différentiel, $dy . dx :: b^2 x . a^2 y$, & par conséquent x & y étant infinis, dy & dx ont un rapport fini, donc la Courbe est oblique à son axe au bout d'un cours infini, donc elle a une Asymptote. *Exemple dans l'Hyperbole rapportée à ses axes.*

952. Cette Asymptote est oblique à l'axe (888, &c. 901).

953. Le rapport $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, qui est à l'extrémité de la Courbe, détermine l'angle de cette Asymptote sur l'axe. Si $a = b$, ce qui rend l'Hyperbole équilatere, cet angle est de 45.

EXEMPLE II.

954. Soit la Logarithmique où $dy . dx :: y . a$. Si $y = \infty$, donc dx étant toujours $= \frac{1}{\infty}$, dy est $= 1$. Donc dans cette supposition de $y = \infty$, la Courbe n'a point d'Asymptote, c'est-à-dire, que quand elle a un cours infini vertical, elle en a aussi un horisontal, ou un axe infini. *Dans la Logarithmique.*

955. Si $y = \frac{1}{\infty}$, dx étant toujours $= \frac{1}{\infty}$, dy eſt $= \frac{1}{\infty^2}$, & il n'y a point encore d'Aſymptote, mais auſſi on n'a rien ſuppoſé qui donne un cours infini à la Courbe. Que ſi on ſuppoſe $y = \frac{1}{\infty^2}$, ce que l'équation permet, dy devient $= \frac{1}{\infty^3}$, dx étant toujours $= \frac{1}{\infty}$, & la Courbe a un cours infini à cauſe de dy^3 (797), & une Aſymptote parallele à l'axe à cauſe de dy^3 inférieur de deux ordres à dx.

956. Donc la Logarithmique, rapportée au même axe, n'a point d'Aſymptote du côté où ſon cours vertical eſt croiſſant, & elle en a une du côté où ſon cours vertical eſt décroiſſant, & cette Aſymptote eſt l'axe même.

957. On peut auſſi-bien dans la Logarithmique ſuppoſer $y = \frac{1}{\infty^3}$ que $= \frac{1}{\infty^2}$, & enfin on peut le ſuppoſer d'un ordre ſi bas qu'on voudra, ce qui rendra toujours dy de l'ordre immédiatement inférieur, & de tant d'ordres qu'on aura voulu au deſſous de dx, & par conſéquent la Logarithmique en auroit toujours d'autant plus, s'il ſe pouvoit, une Aſymptote; mais du moins elle en ſera toujours d'autant plus exactement & plus rigoureuſement parallele, & confondue avec ſon axe. Et enfin elle ſe terminera par $y = \frac{1}{\infty^\infty}$, & par $dy = \frac{1}{\infty^{\infty+1}}$.

958. Lorſque $y = \infty$, dy eſt $= 1$ (954), & $y = \infty$ eſt la ſomme de la Suite des dy, qui étant infiniment infinie & terminée par 1, devroit avoir une ſomme de l'ordre de ∞^2, ſi les dy, dont elle eſt originairement formée, avoient des rapports déterminables (549 & 633), mais ils n'en ont pas. Car dans la Logarithmique les dx étant conſtans, ou les Abſciſſes en progreſſion arithmétique, les Ordonnées ſont en progreſſion géométrique, & par conſéquent leurs différences dy ſont en même progreſſion. Donc cette Courbe étant priſe du côté que ſon cours vertical eſt croiſſant, & une premiere Ordonnée $= 1$ étant déterminée, la Suite de ſes Ordonnées eſt la progreſſion géométrique infinie compriſe entre 1 & ∞,

c'eſt-à-dire, $\div 1 . \infty^{\frac{1}{\infty}} . \infty^{\frac{2}{\infty}}$, &c. ∞, compoſée de grandeurs, dont les rapports ſont tous indéterminables. Ces grandeurs ayant des différences finies, & ne repréſentant que des Ordonnées de la Courbe, qui ont entr'elles des diſtances finies, il faut, pour avoir les Ordonnées infiniment proches, concevoir entre 1 & $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ une infinité de moyens géométriques, de même entre $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ & $\infty^{\frac{2}{\infty}}$, &c. & ces moyens géométriques en nombre infiniment infini ont des rapports encore plus indéterminables, & toutes ces grandeurs enſemble font la Suite infiniment infinie des y en progreſſion géométrique, à laquelle répond une Suite pareille de dy, dont par conſéquent tous les rapports ſont toujours indéterminables. Cela confirme les Théories de la Sect. VII.

959. Quand on peut déterminer ſur l'axe d'une Courbe ſes Ordonnées diſtantes d'une diſtance finie, ſi petite qu'on voudra, cette Courbe peut être décrite *par points*, qui ſeront les extrémités de ces Ordonnées, car quoique finiment diſtantes, elles pourront l'être ſi peu, qu'elles feront ſenſiblement la Courbe. Mais les Ordonnées finiment diſtantes de la Logarithmique étant $\div 1 . \infty^{\frac{1}{\infty}} . \infty^{\frac{2}{\infty}}$, &c. grandeurs finies abſolument indéterminables, la Logarithmique ne peut être décrite même par points. De-là vient *à priori* que ſa deſcription eſt miſe au nombre des Problemes impoſſibles, ou non encore réſolus.

Pourquoi la Logarithmique eſt indeſcriptible.

960. C'eſt principalement dans les Courbes méchaniques, comme la Logarithmique, dans l'équation deſquelles x & y n'entrent pas tous deux, que la Regle de l'art. 950 pour l'Aſymptotiſme peut être utile, car pour les géométriques on voit tout d'un coup ſi elles ont une Aſymptote, puiſque x & y étant dans leur équation, il n'y aura que l'un ou l'autre qui puiſſe devenir $= \infty$, à moins qu'elles ne ſe terminent par être obliques à l'axe. Cependant pour faire mieux voir que $dy = \frac{1}{\infty^3}$ ou $= \infty$ eſt toujours lié avec l'Aſymptotiſme,

Exemple dans l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes.

nous en allons donner encore quelques exemples dans des Courbes géométriques, quoique cette considération n'y soit pas absolument nécessaire pour juger de l'Asymptotisme, mais elle servira à faire voir ce que signifient ces valeurs extremes de dy, dont il semble qu'on a négligé jusqu'ici de rechercher l'effet.

EXEMPLE III.

Soit l'Hyperbole entre ses Asymptotes, $ab = xy$. y est $= \frac{ab}{x}$. $dy = \frac{-abdx}{xx}$.

Si $x = \infty$, $dy = \frac{-abdx}{\infty^2}$. Donc $dy = \frac{1}{\infty^3}$ pour l'ordre.

Si $y = \infty$, ce qui emporte $x = dx = \frac{1}{\infty}$, dy est $= \frac{-abdx}{dx^2} = \frac{-ab}{dx} = \infty$. On supprime le $-$ dont ce ∞ est affecté, parce qu'il ne fait rien à l'ordre.

EXEMPLE IV.

Dans la Conchoïde.

961. Dans la Conchoïde prise comme elle l'est, p. 65 de l'*An. des Inf. petits*, $dy = \frac{x^3 dx + aabdx}{xx\sqrt{aa - xx}}$. Donc si $x = dx$, $dy = \frac{dx^4 + aabdx}{dx^2 \sqrt{aa - dx^2}} = \frac{aabdx}{adx^2} = \frac{ab}{dx} = \infty$. Donc la Conchoïde a un cours infini dans le sens des y, & d'ailleurs elle a un cours seulement fini dans le sens des x, puisque x ne peut être plus grand que a. Donc elle a une Asymptote.

EXEMPLE V.

Dans une Courbe de l'An. des Inf. petits.

962. Dans la Courbe $axx = xxy + aay$ (p. 63 & 64 de l'*An. des Inf. petits*) $dy = \frac{2a^3 xdx}{\overline{xx + aa}^2}$. Donc si $x = \infty$, $dy = \frac{2a^3 \infty \times \frac{1}{\infty}}{\infty^4} = \frac{2a^3}{\infty^4}$. Donc $dy = \frac{1}{\infty^4}$ est de trois ordres au dessous de dx. Donc la Courbe a une Asymptote.

EXEMPLE VI.

963. On verra aisément que la Parabole ordinaire $ax = yy$ n'a point d'Asymptote, car $dy = \frac{adx}{2y}$, & y étant $= \infty$, dy est $= \frac{adx}{2\infty} = \frac{1}{\infty^2}$, & par conséquent n'est que d'un ordre au dessous de dx. *Dans deux Paraboles.*

Mais dans la 1re Parabole cubique $a^2 x = y^3$, & où par conséquent $dy = \frac{a^2 dx}{3y^2}$, $y = \infty$ rend $dy = \frac{a^2 dx}{3\infty^2}$, & par conséquent de deux ordres au dessous de dx; donc il devroit y avoir une Asymptote selon la Regle, cependant il est bien sûr qu'il n'y en a point.

L'erreur vient de ce que y, supposée infinie, n'a pas été bien caractérisée ou bien exprimée. On voit par l'équation $a^2 x = y^3$, que x & y ne peuvent devenir infinis qu'ensemble, & supposant $a^2 = 1$, on a donc $\infty = \infty^3$, ce qui ne se peut en mettant le même Infini dans les deux membres de l'équation. Il faut donc entendre par ∞^3 un Infini moindre que ∞, qui soit élevé au cube. Soit cet Infini $\propto$. Donc $\infty = \propto^3$, ce qui se peut. Donc $\infty^{\frac{1}{3}} = \propto = y$ infini. Donc dans l'Infini, $y^2 = \infty^{\frac{2}{3}}$. Donc $dy = \frac{a^2 dx}{3y^2} = \frac{1}{\infty \times 3\infty^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\infty^{\frac{5}{3}}}$. Or $\infty^{\frac{5}{3}}$ est de l'ordre de ∞^2, donc $dy = \frac{1}{3\infty^{\frac{5}{3}}}$ n'est que de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, & par conséquent n'est que de l'ordre potentiel immédiatement inférieur à celui de dx.

964. Il ne s'est point glissé d'erreur dans les exemples précédens, faute de cette attention de bien caractériser les Infinis, parce que x & y n'y devenoient pas infinis en même temps, & que ce n'est qu'en ce cas-là qu'il faut considérer leur différent caractere. Mais de-là naît la Remarque générale, que quand deux ou plusieurs grandeurs, qui ont rapport ensemble,

deviennent en même temps infinies, ou, ce qui eſt une ſuite néceſſaire du même raiſonnement, infiniment petites, il faut en juger, non par le caractere vague & indéterminé d'Infiniment grand ou petit, qu'elles prennent, mais par le caractere particulier que leur donne la néceſſité de leur rapport; & cela fait voir l'uſage de ces différens ordres potentiels & radicaux dont nous avons tant parlé.

Sans cette Théorie des Infinis radicaux, on trouveroit une difficulté inſurmontable dans l'équation même de la Parabole ordinaire, où $\div a . y . x$. Car comment concevoir que y & x, croiſſant toujours enſemble, & ne devenant infinis qu'en même temps, il arrive cependant, quand ils le deviennent, que y ſoit infiniment moindre que x? Cette difficulté diſparoît entierement, quand on voit, ſelon l'art. précédent, qu'on ne peut avoir $\infty = \infty^2$, mais ſeulement $= \infty^2$, ce qui donne y infini $= \infty^{\frac{1}{2}}$, & la proportion $\div a . y . x$, changée en $\div 1 . \infty^{\frac{1}{2}} . \infty$.

Regle pour déterminer quand une Courbe arrive au parallélisme, ou à la perpendicularité.

965. De toute la Section précédente réſulte la Regle générale pour le parallélisme & la perpendicularité, que dans le parallélisme dy eſt nul, & dans la perpendicularité, infini par rapport à dx, & ce qu'on a déja vû montre aſſez que le calcul différentiel doit donner auſſi-tôt ce rapport, & les cas où il arrive. Car le rapport de dy à dx ayant été tiré de l'équation de la Courbe géométrique, ou étant donné par celle de la méchanique, on voit auſſi-tôt s'il peut, & dans quels cas il peut devenir nul ou infini.

Voyons d'abord, ſelon l'ordre que nous avons toujours ſuivi, les cas où la Courbe arrive au parallélisme ou à la perpendicularité par un cours infini, & premierement le parallélisme. dx y ſubſiſte toujours tel qu'il a été par-tout ailleurs, c'eſt-à-dire, de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & égal au même $\frac{1}{\infty}$, & dy eſt nul par rapport à dx. Donc dy eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, ou d'un ordre inférieur. On vient de voir que s'il eſt d'un ordre inférieur à $\frac{1}{\infty^2}$, la Courbe a une Aſymptote. Donc il ne reſte

à examiner que le cas où la Courbe arrive au parallélisme par un cours infini sans avoir d'Asymptote.

En ce cas, je dis qu'il n'est point nécessaire que dy, nul par rapport à dx, soit $= \frac{1}{\infty^2}$, mais qu'il suffit qu'il soit de cet ordre, ou, ce qui est le même, qu'il soit de quelque ordre radical compris entre $\frac{1}{\infty}$ & $\frac{1}{\infty^2}$, de sorte que dy pourra se trouver indifféremment dans tout l'intervalle compris depuis $\frac{1}{\infty}$ exclusivement jusqu'à $\frac{1}{\infty^2}$ inclusivement.

Cela est clair par soi-même ; car dy devant être de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, il en sera nécessairement selon la Théorie des ordres potentiels & radicaux, s'il est de quelque ordre radical compris entre $\frac{1}{\infty}$ & $\frac{1}{\infty^2}$. Mais on va le voir encore par des exemples.

EXEMPLE I.

966. Dans la Parabole ordinaire ou du 2[d] degré, où $dy . dx :: 1 . 2y$, on voit d'abord que la supposition de $y = \infty$ rend dy nul par rapport à $dx = \frac{1}{\infty}$. Il semble aussi que dy devienne $= \frac{1}{\infty^2}$, parce que 1 est d'un ordre potentiel au dessous de $2y = 2\infty$. Mais cela n'est pas ainsi.

Exemples dans le parallélisme que les premieres Paraboles de chaque degré ont à leur extrémité infiniment éloignée, parallélisme toujours croissant.

Car y infini est $= \infty^{\frac{1}{2}}$ (964). Donc alors $dy = \frac{dx}{2\infty^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\infty \times 2\infty^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\infty^{\frac{3}{2}}}$. Donc $dy . dx :: \frac{1}{2\infty^{\frac{3}{2}}} . \frac{1}{\infty} :: \infty . 2\infty^{\frac{3}{2}}$. Or il s'en faut un ordre radical que $\infty^{\frac{3}{2}}$ ne soit $= \infty^{\frac{4}{2}} = \infty^2$. Donc dy, quoique nul par rapport à dx, & de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ par rapport au Fini, est cependant d'un ordre radical au dessus de $\frac{1}{\infty^2}$, & n'est que de cet ordre au dessous de dx.

EXEMPLE II.

967. Dans la 1[re] Parabole du 3[me] degré, $x = y^3$, dy à

l'extrémité eſt $= \frac{1}{3\infty^{\frac{5}{3}}}$ (963). Donc il eſt encore d'un ordre radical au deſſus de $\frac{1}{\infty^{\frac{6}{3}}} = \frac{1}{\infty^2}$, mais il eſt de deux ordres radicaux au deſſous de $dx = \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^{\frac{3}{3}}}$.

EXEMPLE III.

968. De même dans la 1re Parabole du 4me degré, $x = y^4$, le dernier dy eſt $= \frac{1}{4\infty^{\frac{7}{4}}}$ d'un ordre radical au deſſus de $\frac{1}{\infty^2}$, & de trois ordres radicaux au deſſous de dx.

969. Les derniers dy de chaque 1re Parabole de chaque degré étant $\frac{1}{2\infty^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{1}{3\infty^{\frac{5}{3}}}$, $\frac{1}{4\infty^{\frac{7}{4}}}$, (966, 967, 968), on voit aſſez, & on peut s'en aſſurer encore par une plus longue induction, que n étant le degré de la Parabole, le dernier dy de la 1re Parabole de chaque degré ſera $\frac{1}{n\infty^{\frac{2n-1}{n}}}$. D'où il ſuit que le dernier dy d'une 1re Parabole quelconque ſera toujours de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, & jamais $= \frac{1}{\infty^2}$, tant que n ſera fini, car l'expoſant $\frac{2n-1}{n}$ ne ſera jamais $= 2$. Or il eſt aiſé de voir que n ſera toujours fini, ou qu'une Parabole d'un degré infini eſt impoſſible.

970. Plus n eſt grand, plus 1 eſt petit par rapport à n, ou plus $\frac{2n-1}{n}$ approche d'être $= 2$. Donc plus le degré d'une 1re Parabole eſt élevé, plus le parallélisme qu'elle a à ſon extrémité approche de ſe faire par un $dy = \frac{1}{\infty^2}$, c'eſt-à-dire, qu'elle en eſt d'autant plus parallele à ſon axe.

EXEMPLE IV.

Exemples 971. Au lieu des Paraboles précédentes qui étoient les 1res

1[res] de chaque degré, c'est-à-dire, celles où x n'a qu'une dimension, je prens maintenant les dernieres, c'est-à-dire, celles où x a toutes les dimensions horsmis une.

dans le parallélisme que les dernieres Paraboles de chaque degré ont à leur extrémité, parallélisme toujours décroissant.

Soit donc $x^2 = y^3$, seconde ou derniere Parabole cubique, $dy = \frac{2xdx}{3y^2}$. L'équation $x^2 = y^3$ portée dans l'Infini, donne $x = \infty$ & $y = \infty^{\frac{2}{3}}$. Donc le dernier $dy = \frac{2\infty \times \frac{1}{\infty}}{3\infty^{\frac{4}{3}}} = \frac{4}{3\infty^{\frac{4}{3}}}$, de deux ordres radicaux au dessus de $\frac{1}{\infty^{\frac{6}{3}}} = \frac{1}{\infty^2}$.

EXEMPLE V.

972. De même dans la 2[de] & derniere Parabole du 4[me] degré, $x^3 = y^4$, $dy = \frac{3x^2dx}{4y^3}$, & y infini étant $= \infty^{\frac{3}{4}}$, le dernier dy est $= \frac{3\infty^2 \times \frac{1}{\infty}}{4\infty^{\frac{9}{4}}} = \frac{3\infty}{4\infty^{\frac{9}{4}}} = \frac{3}{4}\infty^{\frac{4}{4} - \frac{9}{4}} = \frac{3}{4}\infty^{-\frac{5}{4}} = \frac{3}{4\infty^{\frac{5}{4}}}$.

973. En général le dernier dy de la derniere Parabole de chaque degré n est $\frac{n-1}{n\infty^{\frac{n+1}{n}}}$, d'où il suit encore qu'il est toujours de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, mais jamais $= \frac{1}{\infty^2}$, car l'exposant $\frac{n+1}{n}$ est toujours $= 1 + \frac{1}{n}$.

974. Plus n est grand, plus $\frac{n+1}{n}$ approche d'être $= 1$, & par conséquent le dernier dy d'être $= \frac{1}{\infty}$, ou de cet ordre, auquel cas il n'y auroit plus de parallélisme. Donc plus le degré de ces dernieres Paraboles est grand, moins à leur extrémité elles sont paralleles, ce qui est le contraire des 1[res] Paraboles (970).

975. Le dernier dy d'une 1[re] Parabole est au dernier dy

de la derniere Parabole du même degré :: $\frac{1}{n\infty^{\frac{2n-1}{n}}}$. $\frac{n-1}{n\infty^{\frac{n+1}{n}}}$, ou, en ne considérant que l'ordre, :: $\frac{1}{\infty^{\frac{2n-1}{n}}}$. $\frac{1}{\infty^{\frac{n+1}{n}}}$ :: $\infty^{\frac{n+1}{n}}$. $\infty^{\frac{2n-1}{n}}$. D'où il suit que le dernier dy d'une 1[re] Parabole est d'autant d'ordres radicaux au dessous du dernier dy d'une derniere du même degré qu'il y a d'unités depuis $n+1$ jusqu'à $2n-1$, les deux dy étant toujours compris dans l'intervalle qui est entre $\frac{1}{\infty}$ & $\frac{1}{\infty^2}$, ou, ce qui est le même, la 1[re] Parabole est infiniment plus parallele que la derniere, & infiniment plus parallele selon le rapport de deux différens ordres radicaux compris dans le même intervalle potentiel.

EXEMPLE VI.

Parallélisme des Paraboles moyennes de chaque degré.

976. Dans le 3[me] & 4[me] degré il n'y a que deux Paraboles, mais dans le 5[me] il commence à y en avoir de moyennes, & il y en a deux dans ce degré.

La 1[re] de ces moyennes est $x^2 = y^5 . dy = \frac{2xdx}{5y^4}$, & le dernier $dy = \frac{2}{5\infty^{\frac{8}{5}}}$.

La 2[de] des moyennes est $x^3 = y^5 . dy = \frac{3x^2dx}{5y^4}$, & le dernier $dy = \frac{3}{5\infty^{\frac{7}{5}}}$.

D'où il suit qu'aucune de ces Paraboles n'a un dernier $dy = \frac{1}{\infty^2}$, quoiqu'elles l'aient toutes de cet ordre.

977. Les derniers dy des quatre Paraboles du 5[me] degré étant $\frac{1}{5\infty^{\frac{9}{5}}}$ (969) $\frac{2}{5\infty^{\frac{8}{5}}}$. $\frac{3}{5\infty^{\frac{7}{5}}}$ (976) & $\frac{4}{5\infty^{\frac{6}{5}}}$ (973), on voit que les dy des deux Paraboles moyennes remplissent

l'intervalle que laiſſoient entr'eux ceux des deux extremes, d'où l'on voit qu'il en ira de même pour les Paraboles des degrés plus élevés, & que 1 étant toujours le numérateur de la fraction qui exprimera le dernier dy de la 1re Parabole d'un degré quelconque, & $n - 1$ le numérateur de celle qui exprimera le dernier dy de la derniere Parabole, les numérateurs des dy des Paraboles moyennes ſeront les nombres naturels qui ſeront entre 1 & $n - 1$, c'eſt-à-dire, ſeront en progreſſion arithmétique, auſſi-bien que les expoſans de ∞ qui ſera dans les dénominateurs.

978. Dans un même degré le parallélisme des différentes Paraboles diſpoſées ſelon leur ordre, à commencer par celle où x n'a qu'une dimenſion, ira toujours en diminuant depuis cette 1re juſqu'à la derniere.

979. D'un degré à celui qui eſt immédiatement ſupérieur, par ex. du 5me au 6me, la 1re Parabole du 5 ſera moins parallele que celle du 6 (970), & la derniere Parabole du 5 ſera plus parallele que celle du 6 (974).

980. Donc en général la plus petite différence déterminée qui puiſſe être entre deux ordres radicaux, ou entre un radical & un potentiel, comme celle qui ſeroit entre $\infty^{\frac{99}{100}}$ & $\infty^{\frac{100}{100}}$, & toute autre plus petite à l'indéfini, ſuffit pour rendre dy nul par rapport à dx, autant qu'il le doit être dans le parallélisme, qui n'eſt point accompagné d'Aſymptotiſme. Et dès que dy tombe au deſſous de $\frac{1}{\infty^2}$, ou eſt différent de dx de plus qu'un ordre potentiel, il y a parallélisme avec Aſymptotiſme, parce que le moindre abaiſſement de dy au deſſous de $\frac{1}{\infty^2}$ doit ſuffire auſſi pour cela.

981. Maintenant examinons les cas où la Courbe arrive à la perpendicularité par un cours infini. *Détermination de la perpendicularité des Courbes à leur extrémité infiniment éloignée.*

dx y eſt toujours nul par rapport à dy. On a vu que lorſque la Courbe a une Aſymptote, dy eſt toujours $= \infty$, & par conſéquent dx, toujours ſuppoſé $= \frac{1}{\infty}$, eſt de deux ordres potentiels au deſſous de dy. Lorſque le dernier dy de

la Courbe eſt $= 1$, elle n'a point d'Aſymptote, & $dx = \frac{1}{\infty}$ eſt d'un ordre potentiel au deſſous de dy. Juſques-là il n'y a nulle difficulté. Mais quand le dernier dy eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, ce qui eſt poſſible (854), auquel cas il eſt viſible que la Courbe n'a point d'Aſymptote, il s'agit de ſavoir comment dx devient nul par rapport à dy.

Cela ne peut être que de deux manieres.

Ou dx n'exiſtera plus, ſelon l'idée de l'art. 851.

Ou il exiſtera encore, mais infiniment moindre que dy.

Le 1[er] cas paroît d'abord le ſeul poſſible. Alors $dx = 0$; ou $= \frac{1}{\infty^2}$ (857).

En cas que le 2[d] le ſoit, il faut, puiſque dy eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & que dx exiſte, & par conſéquent eſt $= \frac{1}{\infty}$, que dy ſoit de quelque ordre radical du même ordre potentiel que $\frac{1}{\infty}$ par rapport au Fini, mais ſupérieur à $\frac{1}{\infty}$, & cet ordre ſera en général $\frac{1}{\infty^{\frac{n}{m}}}$, n étant moindre que m, de ſorte que dy ſera à $dx :: \frac{1}{\infty^{\frac{n}{m}}} . \frac{1}{\infty^{\frac{m}{m}}} :: \infty^{\frac{m}{m}} = \infty . \infty^{\frac{n}{m}}$, & d'autant d'ordres radicaux au deſſus de dx que m aura d'unités de plus que n.

Or je dis que cette 2[de] maniere eſt poſſible.

Le parallélíſme ou la perpendicularité d'une Courbe ſont réellement la même choſe, puiſque l'un devient l'autre par une ſimple tranſpoſition d'axe qui n'eſt rien de réel par rapport à la Courbe, & n'y change rien de ce qui étoit abſolu. Au cas où une Courbe eſt parallele, & a une Aſymptote, & où dy eſt de deux ordres potentiels au deſſous de dx, répond celui où une Courbe eſt perpendiculaire & a une Aſymptote, & où $dy = \infty$ eſt de deux ordres potentiels au deſſus de $dx = \frac{1}{\infty}$. Au cas où une Courbe eſt parallele ſans avoir d'Aſymptote, & a un dernier $dy = dy^2$, & par conſéquent d'un ordre potentiel au deſſous de dx, répond celui où une

Courbe perpendiculaire, fans avoir d'Afymptote, a un dernier $dy = 1$, & par conféquent d'un ordre potentiel au deffus de $dx = \frac{1}{\infty}$. Donc aux cas où des Courbes paralleles fans Afymptote ont des dy nuls par rapport à dx, quoiqu'ils ne foient que de quelques ordres radicaux au deffous, & non d'un ordre potentiel entier, doivent répondre ceux où des Courbes perpendiculaires fans Afymptote auront des dy infinis par rapport à $dx = \frac{1}{\infty}$, quoiqu'ils ne foient que de quelques ordres radicaux, & non d'un ordre potentiel au deffus de dx.

Il eft vrai que dans le parallélifme les dy qui ne feront au deffous de dx que de quelques ordres radicaux, feront en même temps, par rapport au Fini, du 2ᵈ ordre potentiel, dx étant du 1ᵉʳ, & que dans la perpendicularité les dy qui feront de quelques ordres radicaux au deffus de $dx = \frac{1}{\infty}$, feront du même ordre potentiel que $\frac{1}{\infty}$ par rapport au fini, mais ce *par rapport au fini* fignifie feulement que ces différences d'ordres radicaux nous échappent, & cela n'empêche pas que réellement & abfolument dy qui fera d'un ordre radical au deffus de dx, ne foit autant infini par rapport à dx, qu'il eft infiniment petit ou nul par rapport à ce même dx, quand il eft d'un ordre radical au deffous, & que fi dans le 2ᵈ cas fa petiteffe infinie par rapport à dx fuffit pour le parallélifme, fa grandeur infinie par rapport à dx dans le 1ᵉʳ cas ne doive fuffire pour la perpendicularité.

982. dx peut n'exifter plus dans la perpendicularité, & alors il eft $= 0$, ou $= \frac{1}{\infty^2}$, ou à tel Infiniment petit qu'on voudra d'un ordre plus bas. Mais s'il exifte, il ne peut jamais être d'un ordre plus élevé que $\frac{1}{\infty}$, non pas même plus grand que $\frac{1}{\infty}$, parce qu'il a été fuppofé conftant. Donc toute fuppofition qui rendra dx plus grand que $\frac{1}{\infty}$ fera impoffible. Donc fi une Courbe étant arrivée à la perpendicularité par un cours infini, la fuppofition de $dy = 1$, rend dx plus grand que $\frac{1}{\infty}$, il n'eft point vrai que le dernier dy de cette

Courbe ſoit $= 1$, mais ſeulement de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & c'eſt alors qu'il faut voir de laquelle des deux manieres de l'art. précédent dx eſt nul par rapport à dy, car il eſt viſible que les deux ne peuvent pas être enſemble. Donc en ce cas ſi la ſuppoſition de $dx = \frac{1}{\infty^2}$ tombe dans l'impoſſible, la perpendicularité ſe fait de la 2[de] maniere.

EXEMPLE I.

Exemples dans la perpendicularité des premieres Paraboles de chaque degré tranſpoſées, perpendicularité toujours croiſſante.

983. Si on tranſpoſe l'axe de la Parabole ordinaire, ce qui la rendra perpendiculaire à ſon extrémité, au lieu qu'elle y étoit parallele, & changera les x en y, & les y en x, l'équation ſera $y = x^2$, d'où ſuit $dy = 2xdx$, ou $dy \,.\, dx :: 2x \,.\, 1$.

On voit d'abord que x infini rend dy infini par rapport à dx, & par conſéquent on voit, mais ſeulement d'une vue générale & confuſe, que la Courbe arrive à la perpendicularité par un cours infini.

Ici x infini eſt $= \infty^{\frac{1}{2}}$ (964).

Si $dy = 1$, ce qui ne paroît point impoſſible à la ſeule vue de l'équation, donc $2\infty^{\frac{1}{2}}$ $(2x) \,.\, 1 :: 1$ $(dy) \,.\, \frac{1}{2\infty^{\frac{1}{2}}}$ (dx), & dx feroit d'un ordre radical au deſſus de $\frac{1}{\infty}$, ce qui eſt impoſſible (982). Donc dy eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$. Donc la Courbe eſt dans le cas que dx y ſoit nul par rapport à dy de l'une des deux manieres de l'art. 981.

Si $dx = \frac{1}{\infty^2}$, donc $\frac{1}{\infty}$ $(dy) \,.\, \frac{1}{\infty^2}$ $(dx) :: 2\infty^{\frac{1}{2}}$ $(2x) \,.\, 1$, donc $dy = \frac{2\infty^{\frac{1}{2}}}{\infty^2} = \frac{2}{\infty^{\frac{3}{2}}}$. Mais il étoit dans tout le cours de la Courbe de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$. Donc il étoit ce qu'il feroit devenu à l'extrémité $:: \infty^{\frac{3}{2}} \,.\, \infty^{\frac{2}{2}}$. Donc à l'extrémité du cours il feroit moindre d'un ordre radical, ou feroit décrû, ce qui eſt impoſſible dans une Courbe qui va à la perpendiculari-

té. Donc dx subsiste, & la perpendicularité se fait de la seconde maniere.

Et comme dx existant est constant, c'est à lui à régler la grandeur de dy. Donc $1 . 2\infty^{\frac{1}{2}} (2x) :: \frac{1}{\infty} (dx) . \frac{2}{\infty^{\frac{1}{2}}} (dy)$.

Donc la perpendicularité se fait par un dy qui est à dx $:: \infty . \infty^{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire, du même ordre potentiel par rapport au fini, mais élevé d'un ordre radical.

EXEMPLE II.

984. Si l'on rend perpendiculaire à son extrémité la 1re Parabole cubique par la transposition de l'axe, l'équation sera $y = x^3$, d'où suit $dy = 3x^2dx$, ou $dy . dx :: 3x^2 . 1$.

On trouvera, en faisant les mêmes raisonnemens que dans l'art. précédent,

Que dy ne peut être $= 1$, parce que dx deviendroit $= \frac{1}{3\infty^{\frac{2}{3}}}$ infiniment plus grand que $\frac{1}{\infty}$.

Que dy étant donc de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, dx ne peut être $= \frac{1}{\infty^2}$, parce que dy seroit $= \frac{3}{\infty^{\frac{4}{3}}}$ d'un ordre au dessous de $\frac{1}{\infty}$.

Et qu'enfin dx étant $= \frac{1}{\infty}$, dy sera $= \frac{3}{\infty^{\frac{1}{3}}}$, & par conséquent l'ordre de dx à celui de $dy :: \infty^{\frac{1}{3}} . \infty^{\frac{3}{3}}$, ou dx de deux ordres radicaux au dessous de dy, quoiqu'ils soient tous deux du même ordre potentiel par rapport au fini.

985. On voit assez par-là que n étant le degré des Paraboles, le dernier dy des 1res Paraboles de chaque degré rendues perpendiculaires à leur extrémité, sera $\frac{n}{\infty^{\frac{1}{n}}}$, ou, en négligeant le coëfficient n, $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$, & que par conséquent dx

étant toujours $= \frac{1}{\infty^{\frac{n}{n}}}$, dx & dy de cette extrémité perpendiculaire seront toujours :: $\infty^{\frac{1}{n}} . \infty^{\frac{n}{n}}$, c'est-à-dire, que dx & dy étant toujours par rapport au fini de l'ordre potentiel de $\frac{1}{\infty}$, dx sera d'autant d'ordres radicaux au dessous de dy que 1 aura d'unités moins que n.

986. Puisque la perpendicularité consiste dans le rapport infini de dy à dx, plus ce rapport sera grand, plus la perpendicularité sera grande. Or plus n est grand, plus le rapport de $\infty^{\frac{n}{n}}$ à $\infty^{\frac{1}{n}}$, ou de dy à dx (985) est grand. Donc plus le degré est élevé, plus les 1res Paraboles de chaque degré sont perpendiculaires à leur extrémité, ce qui doit être en effet, puisqu'elles en étoient d'autant plus paralleles, lorsqu'elles étoient paralleles (970), & que le parallélisme & la perpendicularité ne sont réellement que la même chose.

EXEMPLE III.

Exemples dans la perpendicularité des dernieres Paraboles de chaque degré transposées, perpendicularité toujours décroissante.

987. Soit la 2de Parabole cubique $y^2 = x^3$ rendue perpendiculaire à son extrémité.

On trouvera, en suivant les raisonnemens des deux Exemples précédens, que son dernier dy est $= \frac{3}{2\infty^{\frac{2}{3}}}$.

988. En général le dernier dy de la derniere Parabole de chaque degré, ainsi rendue perpendiculaire à son extrémité, est $\frac{n}{\overline{n-1} \times \infty^{\frac{n-1}{n}}}$ ou $\frac{1}{\infty^{\frac{n-1}{n}}}$. D'où il suit que dy dans ces dernieres Paraboles étant toujours de l'ordre de $\frac{1}{\infty^{\frac{n-1}{n}}}$, il approche d'autant plus de n'être que de l'ordre de $\frac{1}{\infty^{\frac{n}{n}}}$ ou de l'ordre de dx que n est plus grand, & que par conséquent le rapport infini de dy à dx, ou la perpendicularité est

est toujours d'autant moindre que ces dernieres Paraboles sont d'un degré plus élevé, ce qui revient à l'art. 974.

Il est aisé d'appliquer aux Paraboles moyennes, rendues perpendiculaires à leur extrémité, ce qui en a été dit dans les art. 976, &c. 980, lorsqu'elles étoient paralleles.

Tout ce que nous avons dit sur ces Paraboles paralleles ou perpendiculaires à leur extrémité, pourroit se démontrer par un calcul général, & sans les tentatives que nous avons faites; mais nous avons cru que ces tentatives mêmes, quoique moins élégantes, feroient mieux entrer dans la nature de la chose, & dans les principes essentiels.

989. Maintenant examinons le parallélisme & la perpendicularité à l'origine des Courbes. *Détermination du parallélisme & de la perpendicularité à l'origine des Courbes.*

Pour avoir le point de cette origine, il faut supposer $x = 0$, ou, ce qui est le même, $= dx$; car l'étendue de l'axe à laquelle la Courbe se rapporte est nulle, quand la Courbe commence à s'y rapporter, ou commence son cours.

Si la supposition de $x = dx$ rend $y = 0 = dy$, non-seulement la Courbe ne commence à se rapporter à l'axe qu'au point où $x = dx$, mais elle part de l'axe en ce point-là.

Si $x = dx$ rend y finie, la Courbe ne part point d'un point de l'axe, mais d'un point élevé au-dessus.

Si $x = dx$ rend $y = \infty$, ce n'est pas là proprement une origine de la Courbe, puisqu'au point où $x = dx$, répond un cours vertical infini, par où il n'est pas naturel de concevoir que la Courbe ait commencé. Ainsi dans l'Hyperbole entre ses Asymptotes, $ab = xy$, la supposition de $x = dx$ rend $y = \infty$. En ce cas on fixe arbitrairement l'origine de la Courbe à quelque point où x sera fini, afin d'avoir une y finie. Dans l'Hyperbole, par exemple, si $x = a$, $y = b$, & la Courbe à son origine a un point élevé au-dessus de l'axe de la quantité b.

Si x n'entre point dans l'équation de la Courbe, y y entrera, & en le supposant $= dy$, on aura le point de son origine, & où elle part de son axe. Ainsi dans la Logarithmique, où $dy. dx :: y. a$, on a une origine de la Courbe, en

ſuppoſant $y = dy$. Ce n'eſt pas cependant une origine abſolue, car on peut ſuppoſer y de tel ordre d'Infiniment petit qu'on voudra (957).

990. Il faut juger du parallèliſme ou de la perpendicularité à l'origine d'une Courbe, comme on en a jugé à ſon extrémité infiniment éloignée. Le rapport de dy à dx ayant été tiré de l'équation de la Courbe géométrique, ou donné par celle de la méchanique, il doit devenir nul, ou infini: mais parce qu'il s'agit de l'origine de la Courbe, il faut que x ſoit $= dx$, & $y = dy$, s'ils peuvent l'être tous deux, ou du moins l'un des deux, après quoi on voit de quel ordre ſont dy & dx, l'un par rapport à l'autre, ce qui eſt la détermination préciſe du rapport.

991. Dans le parallèliſme, dx étant néceſſairement $= \frac{1}{\infty}$, c'eſt lui qui doit régler la valeur dont deviendra dy. Et ſi l'origine de la Courbe a donné $y = dy$, il faut prendre garde qu'alors ce dy eſt une Ordonnée infiniment petite, & non la différence de deux Ordonnées, comme il l'eſt par-tout ailleurs, & que le parallèliſme conſiſtant en deux Ordonnées égales, il y a donc alors deux Ordonnées $= dy$, qui ont leur différence infiniment plus petite que ces dy, ou $= ddy$.

EXEMPLE I.

Exemples dans le parallèliſme de l'origine des premieres Paraboles de chaque degré tranſpoſées, parallèliſme toujours croiſſant.

992. Si on tranſpoſe l'axe de la Parabole ordinaire, ou du 2[d] degré, on a $dy. dx :: 2x. 1$ (983), d'où l'on voit auſſi-tôt que ſi $x = dx$, ce qui détermine l'origine de la Courbe, dy eſt nul par rapport à dx, & par conſéquent la Courbe parallele à ſon origine.

993. Puiſque $dy = 2axdx = 2dx^2$, dy eſt du 2[d] ordre d'Infiniment petit. Et parce que le dy de cette équation eſt toujours une différence, il faut concevoir à l'origine de la Courbe, où elle eſt parallele, deux Ordonnées égales de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, ou $= dy$, dont la différence eſt $= \frac{1}{\infty^2} = ddy$ (991). Donc l'équation ou l'analogie eſt devenue $ddy. dx :: 2dx. 1.$

EXEMPLE II.

994. Si on transpose l'axe de la 1[re] Parabole cubique, on a $dy. dx :: 3x^2. 1$ (*984*). D'où suit à l'origine, $dy. dx :: 3dx^2. 1$, & par conséquent le parallélisme. Donc, selon le raisonnement de l'art. précédent, l'analogie devient $dddy. dx :: 3dx^2. 1$, c'est-à-dire, que la différence des deux Ordonnées égales & de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ qui causent le parallélisme à l'origine de la Courbe, est de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$, & que par conséquent cette Courbe à son origine est plus parallele que la Parabole du 2[d] degré, de même qu'elle est plus perpendiculaire à son extrémité (*986*).

995. En général les 1[res] Paraboles de chaque degré auront toujours par la transposition de l'axe le dy de l'origine $= \frac{1}{\infty^n}$, n étant le degré.

996. Il n'y a point d'inconvenient que la Suite des dy, qui doivent dans tout le cours de ces Courbes être de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, commence par $dy^3 = \frac{1}{\infty^3}$, ou $dy^4 = \frac{1}{\infty^4}$, &c. car elle auroit pu commencer par o, c'est-à-dire, par la différence absolument nulle de deux Ordonnées absolument égales, à plus forte raison peut-elle commencer par un dy plus grand.

EXEMPLE III.

997. Dans la 2[de] Parabole cubique, dont l'axe est transposé, $dy. dx :: 3x^2. 2y$. D'où suit le parallélisme à l'origine.

Exemples dans le parallélisme de l'origine des dernieres Paraboles de chaque degré transposées, parallélisme toujours décroissant.

998. De cette analogie suit, en négligeant les coëfficiens, $dy^2 = dx^3$; & parce que dx est $= \frac{1}{\infty}$, $dy^2 = \frac{1}{\infty^3}$. Donc $dy = \frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$. Donc dy n'est ici que d'un ordre radical au-dessous de $dx = \frac{1}{\infty^{\frac{2}{2}}}$.

999. De même dans la derniere Parabole transposée du 4[me] degré, $y^3 = x^4$, $dy. dx :: 4x^3. 3y^2$. D'où suit le dy de

l'origine $= \frac{1}{\infty^{\frac{4}{3}}}$. Et en général dans la derniere Parabole de chaque degré le *dy* de l'origine eſt $= \frac{1}{\infty^{\frac{n}{n-1}}}$, d'où il ſuit que ces Paraboles ſeront toujours à leur origine d'autant moins paralleles que le degré ſera plus élevé. Il eſt aiſé de voir le rapport de cet art. aux art. 974 & 987.

Détermination de la perpendicularité des Courbes à leur origine.

1000. Il reſte à voir les Courbes perpendiculaires à leur origine.

dy y eſt infini par rapport à *dx*, qui eſt ou zero, ou de quelque ordre inférieur à $\frac{1}{\infty}$. Donc après avoir fait la ſuppoſition qui détermine l'origine de la Courbe, il faut toujours ſuppoſer $dy = \frac{1}{\infty}$, & l'équation donne enſuite ce que devient *dx*.

EXEMPLE I.

Exemples dans la perpendicularité de l'origine des premieres Paraboles de chaque degré, perpendicularité toujours croiſſante.

1001. Soit la Parabole ordinaire où $dy.\ dx :: 1.\ 2y$, on voit que la ſuppoſition de $y = dy$, qui détermine l'origine de la Courbe, rend *dy* infini par rapport à *dx*, & par conſéquent la Courbe perpendiculaire, & $dx = \frac{1}{\infty^2}$. Ou, ſi on veut tenir compte des coëfficiens, $\frac{1}{2}\ dx = \frac{1}{\infty^2}$.

EXEMPLE II.

1002. Dans la 1re Parabole cubique où $dy.\ dx :: 1.\ 3y^2$, *dx* à l'origine eſt $= \frac{1}{\infty^3}$. Et en général dans toutes les 1res Paraboles *dx* à l'origine eſt $= \frac{1}{\infty^n}$; d'où il ſuit qu'elles y ſont toujours d'autant plus perpendiculaires que leur degré eſt plus élevé.

EXEMPLE III.

Exemples dans la perpendicularité de l'origine des dernieres

1003. Dans la 2de Parabole cubique, $dy.\ dx :: 2x.\ 3y^2$, & à l'origine $dx^2 = \frac{1}{\infty^3}$, puiſque $dy = \frac{1}{\infty}$ (1000), donc $dx = \frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$.

Paraboles de chaque degré, perpendicularité toujours décroissante.

1004. De même dans la derniere Parabole du 4[me] degré, où $dy.\ dx :: 3x^2.\ 4y^3$, dx de l'origine est $= \frac{1}{\infty^{\frac{4}{3}}}$. Et en général le dx de l'origine de la derniere Parabole de chaque degré est $= \frac{1}{\infty^{\frac{n}{n-1}}}$, d'où il suit que dx est toujours, par rapport au fini, de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, & toujours d'un ordre radical seulement au-dessous de dy, que le rapport infini de dy à dx est d'autant moindre que le degré n de ces Paraboles est plus élevé, & que par conséquent elles en sont à leur origine d'autant moins perpendiculaires.

1005. Puisque dans les 1[res] Paraboles de chaque degré transposées, le dy de l'origine est $= \frac{1}{\infty^n}$ (995), que dans les dernieres Paraboles transposées de même, il est $= \frac{1}{\infty^{\frac{n}{n-1}}}$ (999), que dans les 1[res] & dernieres Paraboles prises à l'ordinaire, le dx de l'origine est $= \frac{1}{\infty^n}$, ou $= \frac{1}{\infty^{\frac{1}{n-1}}}$ (1002 & 1004), il est aisé de juger que dans les degrés qui auront des Paraboles moyennes, ces dy ou dx seront des $\frac{1}{\infty}$, où ∞ ayant toujours n pour numérateur de son exposant, les dénominateurs seront la Suite des nombres naturels qui seront entre 1 & $n - 1$. Ainsi dans le 5[me] degré le dy ou dx des deux Paraboles extremes étant $\frac{1}{\infty^5} = \frac{1}{\infty^{\frac{5}{1}}}$ & $\frac{1}{\infty^{\frac{5}{4}}}$, ceux des deux Paraboles moyennes seront $\frac{1}{\infty^{\frac{5}{2}}}$ & $\frac{1}{\infty^{\frac{5}{3}}}$.

Regle des Tangentes, ou Soutangentes, appliquée seulement aux cas extremes.

1006. Nous avons vû tout ce qui appartient à la position des Courbes par rapport à un axe, tant à leur extrémité qu'à leur origine, c'est-à-dire, dans les cas extremes où elles vont dans l'Infini, ou tombent dans l'Infiniment petit, & ces cas sont ceux qui par eux-mêmes peuvent avoir le plus de difficulté. Restent ceux où le cours de la Courbe n'étant

pris que fini, il s'agit de trouver sa position par rapport à l'axe, en quelque point que ce soit, ou, ce qui est le même, de tirer sa Tangente à un point quelconque, ou, ce qui est encore le même, de déterminer l'étendue de la Soutangente sur l'axe. Cela est compris, & même les cas extremes, dans la Formule générale des Soutangentes $\frac{ydx}{dy}$, présentement si connue par le Livre des *Infiniment petits*, & par l'usage que les Géometres en font tous les jours. Il seroit inutile d'en faire de nouvelles applications aux cas où il ne s'agit que de tirer des Tangentes à un point quelconque d'une Courbe pris dans un cours fini. Je considérerai seulement les Soutangentes dans les cas extremes, où l'on se contente de voir en gros que la Courbe se perd dans l'infiniment grand ou petit, sans rechercher les variétés de ces Infinis.

Fig. II. Un côté quelconque Mm étant prolongé jusqu'à l'axe en T, ce qui fait la Tangente MT au point M, la ligne PT, comprise entre le point T & P d'où part l'Ordonnée PM correspondante à Mm, est la Soutangente, & il est très-facilement démontré que Rm (dy). $MR = Pp$ (dx) :: PM (y). PT $\left(\frac{ydx}{dy}\right)$. Donc le principe fondamental de la Théorie des Soutangentes est que le rapport de dy à dx est le même que celui de l'Ordonnée à la Soutangente.

Donc dans le parallélisme, dy étant nul par rapport à dx ou dx infini par rapport à dy, la Soutangente est infinie par rapport à l'Ordonnée. Et dans la perpendicularité, dy étant infini par rapport à dx, l'Ordonnée est infinie par rapport à la Soutangente, & on le verra à l'œil, si on veut, par des Figures.

Voyons d'abord les Soutangentes dans le parallélisme, & premierement celles de l'extrémité des Courbes.

EXEMPLE I.

Soutangentes infinies crois-

1007. Si l'on cherche quelle est la Soutangente de la Parabole ordinaire à son extrémité, où selon les idées ordinaires

$y = \infty$ à cause de l'extrémité, $dy = \frac{1}{\infty^2}$, & $dx = \frac{1}{\infty}$ à cause du parallélisme, on aura $\frac{ydx}{dy} = \infty \times \frac{1}{\infty}$ divisé par $\frac{1}{\infty^2}$, & par conséquent la Soutangente $= \infty^2$. Il est bien vrai qu'elle doit être infinie, mais pourquoi du 2[d] ordre?

santes dans un seul ordre, à l'extrémité parallele des premieres Paraboles.

On comprend bien qu'une partie de cette Soutangente étant l'axe même tiré depuis l'extrémité du cours de la Courbe jusqu'à son origine, la Soutangente est déja infinie, quand elle vient à l'origine de la Courbe, & que de-là elle doit encore avoir une étendue infinie, ce qui la rend un plus grand Infini que si, comme la Soutangente du point où le Cercle est parallele à son axe, elle n'étoit que finie, lorsqu'elle viendroit à l'origine de la Courbe : mais la Soutangente de la Parabole ne doit pas être pour cela d'un ordre supérieur. Aussi n'en est-elle pas, & l'erreur est venue des Infinis mal caractérisés.

A l'extrémité de la Parabole $y = \infty^{\frac{1}{2}}$ (964), $dx = \frac{1}{\infty}$ à cause du parallélisme, & $dy = \frac{1}{2\infty^{\frac{3}{2}}}$ (966). Donc $\frac{ydx}{dy}$

$$= \infty^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{\infty} \text{ divisé par } \frac{1}{2\infty^{\frac{3}{2}}}, = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}} \text{ divisé par } \frac{1}{2\infty^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\infty^{\frac{3}{2}}}{\infty^{\frac{1}{2}}} = 2\infty.$$

Et en effet la Soutangente de la Parabole est par-tout $= 2x$, & par conséquent dans l'Infini $= 2\infty$.

Il est vrai qu'en appliquant à l'Infini la Formule de la Soutangente de la Parabole $= 2x$, on l'eût trouvée d'abord $= 2\infty$: mais cela ne se fût plus trouvé en appliquant immédiatement à l'extrémité de la Parabole la Formule générale $\frac{ydx}{dy}$, & l'on seroit tombé dans une difficulté.

EXEMPLE II.

1008. Dans toutes les 1[res] Paraboles y infini est $=$

$\infty^{\frac{1}{n}}$, $dy = \frac{1}{n\infty^{\frac{2n-1}{n}}}$ (969), & $dx = \frac{1}{\infty}$, à cauſe du parallélifme de l'extrémité. Donc $ydx = \infty^{\frac{1}{n}} \times \frac{1}{\infty} = \frac{\infty^{\frac{1}{n}}}{\infty}$

$= \infty^{\frac{1n-1}{n}} = \frac{1}{\infty^{\frac{n-1}{n}}}$, & $\frac{ydx}{dy} = \frac{1}{\infty^{\frac{n-1}{n}}}$, diviſé par $\frac{1}{n\infty^{\frac{2n-1}{n}}}$

$= \frac{n\infty^{\frac{2n-1}{n}}}{\infty^{\frac{1-n}{n}}} = n\infty$.

1009. Donc dans toutes les 1[res] Paraboles la Soutangente de l'extrémité eſt toujours de l'ordre de ∞, & toujours d'autant plus grande que le degré des Paraboles eſt plus élevé. Cela répond à ce que les Paraboles ſont d'autant plus paralleles à leur extrémité que leur degré eſt plus éleve (970). Car ſi le parallélifme rend la Soutangente infinie, un plus grand parallélifme la doit rendre un plus grand Infini. Et comme le parallélifme croiſſant de ces Paraboles eſt renfermé dans un ſeul ordre potentiel (970), auſſi leurs Soutangentes croiſſantes ſont renfermées toutes dans le ſeul ordre de ∞.

EXEMPLE III.

Soutangentes infinies décroiſſantes dans un ſeul ordre à l'extrémité parallelle des dernieres Paraboles.

1010. Dans toutes les dernieres Paraboles, y infini eſt $= \infty^{\frac{n-1}{n}}$. $dy = \frac{n-1}{n\infty^{\frac{n+1}{n}}}$ (973) & $dx = \frac{1}{\infty}$. Donc $ydx = \frac{\infty^{\frac{n-1}{n}}}{\infty} = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$, & $\frac{ydx}{dy} = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$ diviſé par $\frac{n-1}{n\infty^{\frac{n+1}{n}}}$

$= \frac{n\infty^{\frac{n+1}{n}}}{n-1 \times \infty^{\frac{1}{n}}} = \frac{n\infty}{n-1}$.

Par exemple, la Soutangente de la derniere Parabole du 5[me] degré à ſon extrémité eſt $\frac{5\infty}{4}$.

1011. Donc dans toutes ces Paraboles les Soutangentes infinies

infinies de l'extrémité sont d'autant moindres que le degré des Paraboles est plus élevé; ce qui répond à ce qu'elles en sont d'autant moins paralleles (974). Il ne faut qu'appliquer ici l'art. 1009 renversé.

1012. Il sera aisé de trouver les Soutangentes des Paraboles moyennes. Et en général la Soutangente d'aucune Parabole ne passera l'ordre de ∞.

Soutangentes infinies de tous les ordres à l'extrémité parallele des Courbes Asymptotiques, qui s'élevent au dessus de l'axe.

1013. Lorsqu'une Courbe qui va en s'élevant au dessus de son axe par un cours infini, & est parallele à son extrémité, a une Asymptote, elle a donc une derniere Ordonnée finie, & dy d'un ordre inférieur à celui de $\frac{1}{\infty^2}$ (800, &c. 809). Soit $dy = \frac{1}{\infty^3}$. Donc alors $dy \left(\frac{1}{\infty^3}\right)$. $dx \left(\frac{1}{\infty}\right)$ :: 1 (y). $\frac{\infty^3}{\infty} = \infty^2 \left(\frac{ydx}{dy}\right)$. Donc la Soutangente est un Infini du 2d ordre. Et comme ce raisonnement est général, & que les Courbes paralleles à leur extrémité & qui ont une Asymptote, peuvent avoir un dernier dy d'un ordre d'Infiniment petit si bas qu'on voudra (808 & 809), la Soutangente en général sera de l'ordre de ∞^n, n plus grand que 1 exprimant le nombre d'ordres dont dy est au dessous de dx.

EXEMPLE IV.

1014. Dans la Courbe de l'art. 962, $x = \infty$ rend $y = a$, & dy est alors $\frac{2a^3}{\infty^4}$. Donc $\frac{ydx}{dy} = \frac{a}{\infty}$ divisé par $\frac{2a^3}{\infty^4} = \frac{a\infty^4}{2a^3\infty} = \frac{\infty^3}{2a^2}$, Soutangente du 3me ordre d'Infini, parce que dy étoit de trois ordres au dessous de dx.

1015. Le parallélisme qui se fait par dy^3 étant infiniment plus grand que celui qui se fait par dy^2, & toujours ainsi de suite, parce que dy^2 est infini par rapport à dy^3, &c. les Soutangentes qui répondent à ces parallélismes sont aussi infiniment plus grandes selon la même raison, ce qui fait une analogie parfaite avec l'art. 1009.

1016. On voit assez par l'art. 1013, & par l'Exemple qui le suit, qu'une Courbe qui auroit à son extrémité parallele

une Soutangente de l'ordre de ∞^2, auroit auſſi une Aſymptote, & par conſéquent qu'il n'y a que les Courbes à Aſymptotes qui à leur extrémité parallele aient des Soutangentes d'un ordre ſupérieur à ∞.

Soutangentes finies à l'extrémité parallele des Courbes, qui viennent joindre leur axe par un cours fini ou infini.

1017. Si une Courbe qui deſcend vers ſon axe, vient à le joindre, & lui eſt parallele à ſon extrémité, ou, ce qui eſt le même, à un dernier côté qui ſoit une partie infiniment petite de cet axe, ſes deux dernieres Ordonnées ſont néceſſairement au moins de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & leur dy de l'ordre immédiatement inférieur. C'eſt ſa valeur tirée de l'équation différentielle qui régle celle de y correſpondant, puiſqu'il eſt toujours de l'ordre immédiatement ſupérieur.

Si $dy = \frac{1}{\infty^2}$, donc $dy \left(\frac{1}{\infty^2}\right) \cdot dx \left(\frac{1}{\infty}\right) :: y \left(\frac{1}{\infty}\right) \cdot 1 \left(\frac{y\,dx}{dy}\right)$.

Si $dy = \frac{1}{\infty^3}$, donc $dy \left(\frac{1}{\infty^3}\right) \cdot dx \left(\frac{1}{\infty}\right) :: y \left(\frac{1}{\infty^2}\right) \cdot 1 \left(\frac{y\,dx}{dy}\right)$.

Et il eſt clair qu'il en ira toujours de même, & que quelque valeur qu'ait dy, la Soutangente ſera toujours finie, au lieu qu'elle eſt toujours infinie dans le parallélisme des Courbes qui s'élevent au deſſus de leur axe, ſoit finiment, ſoit infiniment. Il faut entendre par 1, toujours égal à la Soutangente, l'unité indéterminée, c'eſt-à-dire, ſeulement une grandeur finie plus grande ou plus petite, ſelon les conditions de chaque Courbe particuliere.

1018. La Soutangente 1 eſt toujours infinie par rapport à l'Ordonnée, qui eſt $\frac{1}{\infty}$, ou $\frac{1}{\infty^2}$, &c.

1019. Si $dy = \frac{1}{\infty^2}$, la Courbe n'a point d'Aſymptote, & la Soutangente n'eſt que d'un ordre au deſſus de l'Ordonnée $= \frac{1}{\infty}$. Mais ſi $dy = \frac{1}{\infty^3}$, ou inférieur, la Courbe a une Aſymptote qui eſt ſon axe, & la Soutangente eſt d'autant d'ordres au deſſus de l'Ordonnée $= \frac{1}{\infty^2}$ ou $\frac{1}{\infty^3}$, &c. qu'il y a d'ordres, dont dy eſt au deſſous de dx, ce qui fait voir l'analogie parfaite de cet art. avec l'art. 1013.

EXEMPLE V.

1020. Soit l'Hyperbole entre ses Asymptotes, où lorsque $x = \infty$, ce qui la rend parallele, dy est $= \frac{1}{\infty^3}$ (960). Donc $y = \frac{1}{\infty^2}$. Donc $\frac{ydx}{dy} = \frac{\infty^3}{\infty^3} = 1$.

EXEMPLE VI.

1021. De même dans la Logarithmique, où $dy \,.\, dx :: y \,.\, a$, en supposant $dy = \frac{1}{\infty^3}$ pour donner à la Courbe un cours infini (955), & par conséquent $y = \frac{1}{\infty^2}$, on a la Soutangente $= 1$, & cet 1 est $= a$ par la nature de la Logarithmique, dont la Soutangente est constante & $= a$.

1022. Si dans cette Courbe on n'avoit supposé dy que $= \frac{1}{\infty^2}$, ce qui étoit possible, on n'auroit eu la Soutangente $= 1 = a$ que d'un ordre au dessus de l'Ordonnée $= \frac{1}{\infty}$, mais aussi la Courbe ainsi prise, n'auroit pas eu un cours infini, ni une Asymptote.

1023. Pour se représenter nettement ces Soutangentes finies de l'extrémité de l'Hyperbole & de la Logarithmique du côté qu'elles deviennent paralleles, il faut concevoir que si ces Courbes sont tracées à la droite du point qu'on leur a donné pour origine, leurs Tangentes & par conséquent leurs Soutangentes sont toujours à la droite du point de la Courbe auquel elles appartiennent, & par conséquent lorsque ces Courbes sont devenues paralleles ou confondues avec l'axe à l'extrémité de cet axe infini, il faut concevoir encore au de-là une ligne finie ou prolongement fini de l'axe, qui est la Soutangente, & en même temps la Tangente, comme il est aisé de le voir. Ainsi la Tangente de ces Courbes à leur extrémité n'est pas l'axe infini ou l'Asymptote, ce qu'on auroit pu s'imaginer, car cette extrémité étant posée ou conçue, l'axe infini est à sa gauche, & la Tangente ou Soutangente doit être à la droite, & c'est effectivement une ligne finie qui y est. Il en ira de même des autres Courbes confondues

avec leur axe au bout d'un cours infini ; & il eſt aiſé de voir que la raiſon eſſentielle en eſt que par la ſuppoſition préſente elles deſcendent vers leur axe, & s'inclinent toujours vers cet axe, puiſqu'elles tendent au paralléliſme.

Soutangentes finies à l'origine parallele des Courbes.

1024. Si une Courbe à ſon origine eſt parallele à ſon axe, ou confondue avec une portion infiniment petite de cet axe, y ſera au moins $= \frac{1}{\infty}$, & dy au moins $= \frac{1}{\infty^2}$, & ce cas eſt entierement le même que celui de l'art. 1017, & en effet il doit l'être, puiſque ce n'eſt que le même parallèliſme qui ſe fait à l'origine ou à l'extrémité d'un cours. Toute la différence des deux cas eſt que dans le premier dy d'un ordre inférieur à $\frac{1}{\infty^2}$ marque un Aſymptotiſme, parce qu'il s'agit de l'extrémité d'un cours infini, & ici il n'en marque point, parce qu'il s'agit de l'origine d'un cours. Donç ici comme là la Soutangente eſt finie.

EXEMPLE VII.

1025. Dans toutes les 1res Paraboles rendues à leur origine paralleles à leur axe, le dy de l'origine eſt $= \frac{1}{\infty^n}$ (995), donc $y = \frac{1}{\infty^{n-1}}$ (1017), donc $y\,dx = \frac{1}{\infty^{n-1}} \times \frac{1}{\infty}$ $= \frac{1}{\infty^n}$, & $\frac{y\,dx}{dy} = 1$.

EXEMPLE VIII.

1026. Dans toutes les dernieres Paraboles rendues à leur origine paralleles à leur axe, le dy de l'origine eſt $\frac{1}{\infty^{\frac{n}{n-1}}}$ (998), donc $y = \frac{1}{\infty^{\frac{n-n+1}{n-1}}}$ (1017) $= \frac{1}{\infty^{\frac{1}{n-1}}}$, donc $y\,dx$ $= \frac{1}{\infty^{\frac{1}{n-1}}} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^{\frac{n}{n-1}}}$, donc $\frac{y\,dx}{dy} = 1$.

1027. Puiſque les Soutangentes des Paraboles extremes rendues paralleles à leur origine ſont finies, il eſt aiſé de juger que celles des Paraboles moyennes le ſeront auſſi.

1028. Dans les 1res Paraboles, les y de l'origine étant $= \frac{1}{\infty^{n-1}}$ (1025), plus le degré n de la Parabole est élevé, plus $y = \frac{1}{\infty^{n-1}}$ est d'un ordre inférieur à la Soutangente toujours finie, ou plus la Soutangente infinie, par rapport à l'Ordonnée, est d'un ordre élevé au dessus de l'Ordonnée. Et en effet cela doit être, puisque ces Paraboles à leur origine sont d'autant plus paralleles que n est plus grand (970), & que de plus le parallélisme qui se fait par dy^3 est infiniment plus grand que celui qui se fait par dy^2, & toujours ainsi de suite.

Soutangentes finies à l'origine parallele des premieres Paraboles transposées; toujours d'un ordre plus élevé par rapport à leurs Ordonnées correspondantes.

1029. Dans les dernieres Paraboles $y = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{n-1}}}$ (1026) est d'un ordre d'autant moins inférieur à la Soutangente finie, que n est plus grand, & cela, parce que ces Paraboles en sont aussi d'autant moins paralleles (974).

Soutangentes finies à l'origine parallele des dernieres Paraboles transposées, toujours d'un ordre moins élevé par rapport à leurs Ordonnées.

1030. Voyons maintenant les Soutangentes dans la perpendicularité, & premierement à l'extrémité du cours infini des Courbes.

Soutangentes de l'extrémité perpendiculaire du cours infini des Courbes, qui peuvent être ou infinies, ou finies, ou infiniment petites.

y sera toujours $= \infty$. dy sera ou $= \frac{1}{\infty}$, ou $= 1$, ou $= \infty$ (981).

Si $dy = \frac{1}{\infty}$, & qu'en même temps dx existe, ce qui est possible (981), la Soutangente est infinie; car $ydx = \infty \times \frac{1}{\infty} = 1$, & $\frac{ydx}{dy} = 1$ divisé par $\frac{1}{\infty} = \infty$.

Si $dy = 1$, la Soutangente est finie, car $\frac{ydx}{dy} = \frac{1}{1} = 1$.

Si $dy = \infty$, la Soutangente est infiniment petite, car dy étant $= y$, $\frac{ydx}{dy} = dx = \frac{1}{\infty}$.

1031. Il passe pour constant que la Soutangente est toujours nulle dans la perpendicularité, & la premiere des trois propositions précédentes paroîtra fort paradoxe. Mais 1°. l'idée commune s'est établie sur ce qu'effectivement à l'origine des Courbes, ou à l'extrémité d'un cours fini, la Soutangente est nulle dans la perpendicularité, & ici il s'agit de

l'extrémité d'un cours infini. 2°. La grandeur infiniment grande ou petite de la Soutangente dans le parallélisme ou dans la perpendicularité n'est point absolue, mais relative à l'Ordonnée, & on va voir que quand la Soutangente est infinie dans la perpendicularité, elle est infiniment moindre que l'Ordonnée.

EXEMPLE I.

Soutangentes infinies & décroissantes de l'extrémité perpendiculaire des premieres Paraboles transposées.

1032. Dans les 1[res] Paraboles rendues perpendiculaires à leur extrémité, le dernier dy est $= \frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$ (985). Donc $\frac{ydx}{dy} =$ 1 divisé par $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}} = \infty^{\frac{1}{n}}$.

Par exemple, dans la Parabole ordinaire, la Soutangente de son extrémité perpendiculaire est $\infty^{\frac{1}{2}}$, l'Ordonnée étant ∞.

1033. Et pour faire encore mieux voir la possibilité que cette Soutangente soit infinie malgré la perpendicularité, c'est que malgré la perpendicularité à laquelle tend la Courbe, les Soutangentes vont toujours en croissant.

Car l'équation de la Courbe étant $y = x^2$, d'où suit $dy = 2xdx$;

Si $y = 1$, donc $x = 1$, & $dy = 2dx$, & $\frac{ydx}{dy} = \frac{1}{2}$.

Si $y = 2$, donc $x = \sqrt{2}$, & $dy = dx\, 2\sqrt{2}$, & $\frac{ydx}{dy} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Or $\frac{1}{2} . \frac{1}{\sqrt{2}} :: \sqrt{2} . 2$, donc les Soutangentes vont en croissant.

On trouvera de même que si $y = 3$, la Soutangente sera $\frac{3}{2\sqrt{3}}$. Or $\frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{3}{2\sqrt{3}} :: 2\sqrt{3} . 3\sqrt{2}$, & $2\sqrt{3}$ est moindre que $3\sqrt{2}$, ainsi qu'on le verra en quarrant ces grandeurs. Il en ira de même des autres valeurs plus grandes qu'on donnera à y. Donc puisque les Soutangentes sont croissantes malgré

la perpendicularité où la Courbe tend, il est naturel qu'elles arrivent à l'Infini, quand la Courbe arrive à la perpendicularité.

Mais en même temps que les Soutangentes sont croissantes, elles sont toujours plus petites par rapport aux Ordonnées. Par ex. la Soutangente $\frac{1}{\sqrt{2}}$ est plus petite par rapport à son Ordonnée 2, que la Soutangente $\frac{1}{2}$ ne l'est par rapport à son Ordonnée 1. Car $\frac{1}{\sqrt{2}} . 2 :: 1 . 2\sqrt{2}$, & $\frac{1}{2} . 1 :: 1 . 2$.

De même $\frac{3}{2\sqrt{3}}$ est moindre par rapport à 3, que $\frac{1}{\sqrt{2}}$ par rapport à 2. Car $\frac{3}{2\sqrt{3}} . 3 :: 3 . 6\sqrt{3} :: 1 . 2\sqrt{3}$.

1034. En poussant cette idée plus loin, on verra que si $y = 4$, $\frac{ydx}{dy} = 1$. Et comme $4 = 2\sqrt{4}$, on trouvera que les Ordonnées croissant comme les nombres naturels, le rapport de chaque Soutangente à son Ordonnée sera celui de 1 à $2 = 2\sqrt{1}$, de 1 à $2\sqrt{2}$, de 1 à $2\sqrt{3}$, de 1 à $2\sqrt{4}$, &c. & en général celui de 1 à $2\sqrt{y}$.

1035. Donc le rapport de la derniere Soutangente à la derniere Ordonnée $= \infty$, sera celui de 1 à $2\infty^{\frac{1}{2}}$, ou en négligeant le coëfficient 2, celui de 1 à $\infty^{\frac{1}{2}}$. Or $1 . \infty^{\frac{1}{2}} :: \infty^{\frac{1}{2}} . \infty$; & l'Ordonnée est $= \infty$. Donc la Soutangente malgré la perpendicularité est de l'ordre de $\infty^{\frac{1}{2}}$, ce qui revient à l'art. 1030, par une voie toute différente.

1036. Si on veut avoir non seulement l'ordre, mais encore la grandeur précise de cette derniere Soutangente, il faut la prendre $= \frac{\infty^{\frac{1}{2}}}{2}$. Et en effet dans l'art. 985, qui a produit l'art. 1032, dy est $= \frac{n}{\infty^{\frac{1}{n}}}$, & ce n'est qu'en ne considérant que l'ordre, qu'il est $= \frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$.

1037. Donc les dernieres Soutangentes des 1[res] Paraboles seront $\frac{\infty^{\frac{1}{2}}}{2}$, $\frac{\infty^{\frac{1}{3}}}{3}$, $\frac{\infty^{\frac{1}{4}}}{4}$, &c. c'est-à-dire, toujours d'un

ordre radical inférieur, ou toujours moins infinies ou plus infiniment petites par rapport à la derniere Ordonnée toujours $= \infty$, & en même temps elles seront toujours moindres dans leur ordre, ce qui vient de ce que ces Paraboles sont toujours à leur extrémité plus perpendiculaires (986).

EXEMPLE II.

Soutangentes infinies & croissantes de l'extrémité perpendiculaire des dernieres Paraboles transposées.

1038. Dans toutes les dernieres Paraboles rendues perpendiculaires à leur extrémité, le dernier dy est $= \frac{1}{\infty^{\frac{n-1}{n}}}$ (988), donc $\frac{ydx}{dy} = \infty^{\frac{n-1}{n}}$, Soutangente infinie toujours d'un ordre radical inférieur à ∞.

Par ex. dans la 2[de] Parabole cubique, la derniere Soutangente est de l'ordre de $\infty^{\frac{2}{3}}$; & en remettant les coëfficiens finis de l'art. 988, sa grandeur est $\frac{2\infty^{\frac{2}{3}}}{3}$.

1039. Et en effet si dans cette Parabole on prend successivement $y = 1, = 2, = 3$, on aura pour Soutangentes correspondantes $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 1^{\frac{2}{3}}}{3} \cdot \frac{2 \times 2^{\frac{2}{3}}}{3} \cdot \frac{2 \times 3^{\frac{2}{3}}}{3}$. D'où l'on voit que l'expression générale des Soutangentes de cette Parabole sera $\frac{2 \times y^{\frac{2}{3}}}{3}$, & que y étant $= \infty$, la Soutangente sera $\frac{2\infty^{\frac{2}{3}}}{3}$.

Tout ce qui appartient à ces Soutangentes pourroit être prouvé par un calcul général, tiré de l'équation générale des Paraboles.

Il seroit inutile de s'arrêter aux réflexions qui naissent de-là. Elles se présentent d'elles-mêmes.

1040. Les Soutangentes de toutes les Paraboles rendues paralleles à leur origine, & perpendiculaires à leur extrémité, commencent

commencent donc par être finies (1033 & 1039), & finissent par être infinies, de sorte qu'elles forment des Suites toujours croissantes en elles-mêmes, mais décroissantes par rapport aux Suites des Ordonnées correspondantes.

1041. Si dans la Courbe qui arrive à la perpendicularité par un cours infini, le dernier dy est $= 1$, la Soutangente est finie (1030), & par conséquent infiniment petite par rapport à l'Ordonnée, qui ne peut être qu'infinie, puisque la Courbe est arrivée à la perpendicularité par un cours infini. *Soutangentes finies à l'extrémité perpendiculaire d'un cours infini.*

EXEMPLE III.

1042. Dans la Logarithmique, si $y = \infty$, $dy = 1$ (954). Donc $\frac{ydx}{dy} = 1$. Et en effet la Soutangente de cette Courbe est constante.

1043. C'est par sa nature particuliere que cette Courbe, devenue perpendiculaire à son extrémité, a une Soutangente la même qu'elle avoit eue partout ailleurs, & par conséquent finie, mais ce n'est pas par sa nature particuliere qu'elle en a une finie, & par conséquent une infinité d'autres Courbes auront aussi une derniere Soutangente finie, pourvû que leur dernier dy soit $= 1$. Et comme la Suite des Soutangentes de la Logarithmique est composée de grandeurs toutes égales, mais toujours décroissantes par rapport aux Ordonnées, les Suites des Soutangentes de ces autres Courbes pourront être croissantes ou décroissantes en elles-mêmes, mais toujours nécessairement décroissantes par rapport aux Ordonnées.

1044. Si le dernier $dy = \infty$, auquel cas seulement une Courbe, qui arrive à la perpendicularité, a une Asymptote (864 & 865), la Soutangente est $= \frac{1}{\infty}$ (1030). On en verra aisément un exemple dans l'Hyperbole, du côté qu'elle devient perpendiculaire. *Soutangentes infiniment petites à l'extrémité perpendiculaire d'un cours infini Asymptotique.*

1045. Dans ces Courbes, la Suite des Soutangentes ne peut être que décroissante, tant en elle-même que par rapport aux Ordonnées.

1046. En rassemblant tout ce qui regarde les Courbes perpendiculaires à l'extrémité d'un cours infini, on voit que celles qui finissent par $dy = \infty$, étant infiniment plus perpendiculaires que celles qui finissent par $dy = 1$, & celles-ci infiniment plus que celles qui finissent par $dy = \frac{1}{\infty}$, leurs Soutangentes sont aussi, selon cette même raison, toujours infiniment plus petites.

Soutangentes de l'origine perpendiculaire des Courbes toujours infiniment petites.

1047. Il ne reste plus que les Soutangentes des Courbes perpendiculaires à leur origine.

Alors y étant $= dy$, $\frac{ydx}{dy} = dx$. Et comme dx est ou zero, ou de quelque ordre inférieur à $\frac{1}{\infty}$, la Soutangente sera toujours absolument nulle, ou de quelque ordre inférieur à $\frac{1}{\infty}$. Il seroit inutile d'en rapporter des exemples. Les différentes Paraboles prises à l'ordinaire (1001, &c. 1005) en fourniront de toutes les variétés des Soutangentes infiniment petites, puisqu'elles en fournissent de toutes les variétés de dx, nul par rapport à dy.

Soutangentes infinies de l'extrémité oblique des Courbes d'un cours infini.

1048. Quant aux Courbes obliques à leur axe à l'extrémité d'un cours infini, comme le rapport de dx à dy sera fini à cause de l'obliquité, & que y sera $= \infty$, la Soutangente $\frac{ydx}{dy}$ sera un Infini multiplié & divisé par deux coëfficiens finis.

EXEMPLE IV.

1049. Soit l'Hyperbole rapportée à son premier axe $2a$ (951), on aura à l'extrémité $\frac{ydx}{dy} = \frac{a \times \infty}{b}$.

1050. Donc si l'Hyperbole est équilatere, la Soutangente est $= y = \infty$. Mais dans ce même cas, y infini est $= x$. Donc la Soutangente est $= x$. Cependant il est certain qu'elle est plus grande que x de a, mais a est une grandeur finie.

Soutangentes infiniment petites de l'origine oblique.

1051. Si une Courbe à son origine est oblique à son axe, il est clair que y étant alors $= dy$, la Soutangente est $= dx$.

1052. Venons présentement à la considération des *plus grandes* ou *plus petites* Ordonnées des Courbes, quand elles en ont, car elles n'en ont pas toutes.

Détermination de la plus grande *ou* plus petite *Ordonnée.*

On n'appelle point *plus grande* Ordonnée, celle qui termine le cours infini d'une Courbe qui n'a qu'une variation sans changement, & qui s'éleve toujours au dessus de son axe, car il faut bien que cette derniere Ordonnée soit la plus grande de toutes, & la seule supposition de l'axe infini la donne aussi-tôt; de plus, elle n'est point suivie par des Ordonnées plus petites.

On n'appelle point non plus de ce nom la derniere d'une Suite croissante des Ordonnées d'un cours fini, quand les Ordonnées ne continuent pas leur cours vers un même côté (881), car quoiqu'il y ait ensuite de plus petites Ordonnées, l'axe a manqué, & la seule supposition de l'axe égal à la plus grande grandeur finie qu'il puisse avoir de ce côté-là, donnera cette derniere Ordonnée.

C'est la même chose pour la *plus petite* Ordonnée, à cela près qu'alors la Courbe descend vers son axe.

On n'appelle donc *plus grande* ou *plus petite* Ordonnée, que la derniere d'un cours fini qui continue ensuite à s'étendre sur l'axe, toujours vers un même côté, comme dans la Fig. v.

Il est impossible qu'il y ait une *plus grande* Ordonnée ainsi conditionnée, à moins que la Courbe qui se sera élevée par rapport à son axe, ne redescende ensuite, en continuant son cours vers un même côté. Or il est impossible qu'une Courbe, qui s'est élevée par rapport à son axe, redescende sans passer par un Terme ou par un côté qui ne soit ni montant ni descendant, ou qui soit montant & descendant en même temps.

Si c'est le 1er, la Courbe passe par un côté parallele.

Si c'est le 2d, la Courbe peut passer par un côté oblique, qui sera en même temps montant & descendant (875, &c. 887). Mais ce côté sera nécessairement rebroussant, de sorte que le cours des Ordonnées rebroussera aussi, & par conséquent il n'y aura point de plus grande Ordonnée.

Mais si le côté montant & descendant en même temps est

FIG. V. perpendiculaire, il ſera auſſi rebrouſſant, mais de ſorte que le cours des Ordonnées ne le ſera pas.

Donc il n'y a point de *plus grande*, ou, ce qui revient au même, de *plus petite* Ordonnée, que dans le cas du côté parallele ou perpendiculaire, qui eſt le Terme moyen ou commun d'un changement.

1053. Et comme dans le parallélifme & dans la perpendicularité le rapport $\frac{dy}{dx}$ eſt toujours nul ou infini, de-là s'enſuit, pour la détermination des points où ſe trouvent les *plus grandes* ou *plus petites* Ordonnées, la Regle générale ſi connue & ſi uſitée, qu'il faut égaler ce rapport $\frac{dy}{dx}$ à zero, ou à l'Infini.

1054. C'eſt le rapport $\frac{dy}{dx}$, & non, comme on le dit fauſſement, & pourtant ſans erreur, dy qui devient nul ou infini. dy devient toujours nul dans le parallélifme, ou d'un ordre inférieur à celui dont il étoit, mais dans la perpendicularité il ne devient jamais infini, c'eſt-à-dire $= 1$, ou $= \infty$, ſi ce n'eſt à l'extrémité d'une Courbe infinie, ce qui eſt un cas particulier, & qui de plus n'appartient point à la Théorie des *plus grandes* Ordonnées ſelon le ſens qu'on donne à ce terme. Mais il eſt vrai que ſoit qu'on opere ſur $\frac{dy}{dx}$, qui doit toujours devenir infini dans la perpendicularité, ſoit qu'on opere ſur dy ſeul, qui ne le devient jamais pour une *plus grande* Ordonnée proprement dite, le calcul eſt toujours le même.

Car dy eſt alors toujours exprimé par $\frac{ndx}{m}$, n & m étant des grandeurs finies complexes, & par conſéquent $\frac{dy}{dx} = \frac{ndx}{mdx} = \frac{n}{m}$. Or toute l'opération conſiſte à égaler à zero la grandeur complexe n, quand cela ſe peut, ou la grandeur complexe m, d'où il ſuit que c'eſt la même choſe d'opérer ſur $\frac{ndx}{m}$ ou ſur $\frac{ndx}{mdx}$. Mais réellement ce n'eſt que le rapport $\frac{dy}{dx}$

qui devient nul ou infini. Il eſt bien vrai que quand il devient nul, dy devient réellement infiniment moindre qu'il n'étoit, mais il n'eſt pas vrai au contraire que quand ce rapport devient infini, dy devienne réellement infiniment plus grand qu'il n'étoit, il ſuffit qu'il demeure dans l'ordre dont il étoit, pourvû que dx ſoit $= 0$.

Il ſeroit inutile de donner des Exemples de *Maxima* ou de *Minima*, il y en a une infinité de connus.

1055. Il y en a une infinité de Suites de grandeurs, ſoit lignes, ſoit nombres, qui ſont croiſſantes dans une certaine étendue de leur cours, après quoi elles deviennent décroiſſantes, ou au contraire. Ces grandeurs, quelles qu'elles ſoient, peuvent toujours être conçues comme des Ordonnées de Courbes diſpoſées ſur un axe continu, entre leſquelles il y en aura une plus grande, ou plus petite, & par conſéquent il n'y a qu'à prendre leur différentielle dy, ce qui ſuffit (1054), & en égaler le numérateur ou le dénominateur à zero, ce qui donnera la plus grande ou plus petite de ces grandeurs. Ainſi la Regle eſt abſolument générale.

Regle pour les Inflexions & les Rebrouſſemens.

1056. Il n'y a plus rien qui appartienne à la poſition des Courbes, par rapport à un axe, que les inflexions & les rebrouſſemens.

Les inflexions & les rebrouſſemens ſont toujours compliqués avec une courbure nulle ou infinie (924, &c. 927).

Dans le 1er cas, l'angle de contingence devient nul, & par conſéquent auſſi ſa baſe, qui eſt ddy, & en même temps la différence 2de de trois Ordonnées conſécutives (942). Donc alors $ddy = 0$, ou, plus exactement parlant, il devient d'un ordre inférieur à celui de $\frac{1}{\infty^2}$, dont il étoit.

En effet on a vû dans les art. 832, 841, 846, que dans toutes les inflexions ou rebrouſſemens de cette eſpece, il y a toujours trois Ordonnées conſécutives, qui ſont ou en progreſſion ou en contre-progreſſion, ou en la moindre progreſſion ou contre-progreſſion arithmétique poſſible, ce qui donne toujours une différence 2de $= 0$.

1057. Dans le 2^{d} cas, la courbure ne peut devenir infinie sans avoir été croissante, & par conséquent la Suite croissante des angles de contingence infiniment petits du 1er ordre, ou de leurs bases *ddy* du 2^{d}, aboutiroit alors à un angle fini, ou à une base de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, infiniment plus grande qu'elle n'étoit, ou, ce qui est le même, à un *ddy* de l'ordre de *dy*. Mais parce qu'un angle de contingence fini est impossible, non en lui-même, mais dans une Courbe, & par conséquent aussi un *ddy* de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, il se substitue à ce Terme, qui eût fait la courbure infinie, un autre Terme, qui est un côté $= \frac{1}{\infty^2}$ (911). Cela cependant n'a pas dû, ni pu empêcher que la Suite des *ddy*, tirée de l'Equation de la Courbe, n'ait été croissante, & n'aboutisse réellement à un *ddy* de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, tout comme si l'angle de contingence fini étoit possible, & qu'en traçant dans la Courbe ses *ddy*, on y en dût trouver un $=$ *dy*. Seulement il ne faudra pas s'attendre à trouver dans cette Courbe aucune marque sensible de sa courbure infinie (912) ni un $ddy = dy$. Mais par le calcul on trouvera toujours ce $ddy = dy$, ou de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, puisque la Suite des *ddy* est toujours telle qu'elle est indépendamment de ce que la Courbe admet, ou n'admet pas.

1058. Donc c'est une Regle générale, que dans les points d'inflexion, ou de rebroussement, *ddy* est $= 0$, ou $= \infty$, ou plutôt qu'il tombe au dessous de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, dont il est naturellement, ou s'éleve au dessus.

1059. M. le M. de l'Hopital a donné des Exemples de l'un & de l'autre cas. J'en prendrai seulement un pour faire voir que $ddy = \infty$ est lié avec la courbure infinie, car il est très-évident que $ddy = 0$ l'est avec la courbure nulle.

Dans la Courbe $y - a = \overline{x - a}^{\frac{3}{5}}$ (*p. 64 des Inf. petits*) on a $dy = \frac{3}{5}\,\overline{x - a}^{-\frac{2}{5}}\,dx$, & $ddy = -\frac{6}{25}\,\overline{x - a}^{-\frac{7}{5}}\,dx^2$, les *dx* étant constans. Or au point où $x = a$, on a *ddy* d'un ordre supérieur à $\frac{1}{\infty^2}$. Car $x - a$ est alors $= \frac{1}{\infty}$, &

ce $\frac{1}{\infty}$ est élevé à $-\frac{7}{5}$. Or un $\frac{1}{\infty}$ élevé à une puissance négative, est ∞ élevé à cette même puissance positive, comme ∞ élevé à une puissance négative, est $\frac{1}{\infty}$ élevé à cette même puissance positive. Donc $ddy = -\frac{6}{25}\infty^{\frac{7}{5}} \times \frac{1}{\infty^2} = -\frac{6}{25}\frac{\infty^{\frac{7}{5}}}{\infty^2} = -\frac{6}{25}\infty^{-\frac{3}{5}} = \frac{-6}{25\infty^{\frac{3}{5}}}$, grandeur qui est même au dessus de $\frac{1}{\infty}$.

Or je dis que dans ce même point où $x - a = \frac{1}{\infty}$, le Rayon de la Développée est infiniment petit, & par conséquent la courbure infinie.

Car la Formule générale pour déterminer ce Rayon, ou plutôt une ligne qui le détermine, & est du même ordre, étant $\frac{dy^2 + dx^2}{-ddy}$, on a ici $dy^2 + dx^2 = \frac{9\overline{x-a}^{-\frac{4}{5}} + 25 \times dx^2}{25} = \frac{9\infty^{\frac{4}{5}}}{25\infty^2} = \frac{9\infty^{-\frac{6}{5}}}{25} = \frac{9}{25\infty^{\frac{6}{5}}}$. Et cette grandeur divisée par $-ddy$ est $\frac{9\infty^{\frac{3}{5}}}{6\infty^{\frac{6}{5}}} = \frac{3\infty^{-\frac{3}{5}}}{2} = \frac{3}{2\infty^{\frac{3}{5}}}$, grandeur infiniment petite. Donc, &c.

1060. On trouvera aussi qu'au point où $x - a = \frac{1}{\infty}$, ddy est du même ordre que dy. Car alors $dy = \frac{3}{5}\overline{x-a}^{-\frac{2}{5}}$ dx est $= \frac{3\infty^{\frac{2}{5}}}{5\infty} = \frac{3\infty^{-\frac{3}{5}}}{5} = \frac{3}{5\infty^{\frac{3}{5}}}$, & ddy est $\frac{-6}{25\infty^{\frac{3}{5}}}$ (1059).

1061. S'il étoit possible que parmi les Courbes que nous connoissons, il y en eût dont tous les côtés fussent infiniment petits du 2[d] ordre, & fissent entr'eux des angles de contingence du 1[er], il est certain que la même courbure que nous

trouvons ici infinie dans les inflexions, & les rebroussemens, seroit nulle pour ces Courbes-là. Il faudroit, afin de leur trouver une courbure infinie, leur concevoir quelques côtés du 3me ordre. Mais ces sortes de Courbes ne seroient ni descriptibles, ni de la nature de celles que nous connoissons (735). Nous en transportons seulement dans nos Courbes la maniere dont se feroient leurs inflexions & leurs rebroussemens avec une courbure nulle, & cela y produit une courbure infinie, par la raison de l'art. 921, & à cause de la différence des deux hipotheses.

On va voir plus particulierement ce qui appartient à la Courbure.



SECTION

SECTION XII.

Regle générale pour déterminer, par le Calcul Différentiel, la courbure des Courbes.

1062. COMME nous n'avons considéré les Courbes qu'en elles-mêmes, nous allons tirer de leur nature seule la détermination de tout ce qui appartient à leur courbure, & à la variation de cette courbure, & nous n'emploierons point pour cela les Rayons des Développées qui y ont été employés jusqu'à present; car ces développées sont des lignes étrangeres à celles dont on considere la courbure. *Regle générale pour la courbure des Courbes.*

Ici les côtés seront supposés constans (905), & la mesure de la courbure est le Sinus de l'angle de contingence, & ce Sinus est de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ (741).

Soient *Mm* & $m\mu$ deux côtés d'une Courbe qui tend au parallélisme. Dans la supposition ordinaire des dx constans, on a $MR = mr$, & $m\mu$ moindre que *Mm*, parce que la Courbe tend au parallélisme. De-là il suit que *Mm* étant prolongé jusqu'à la rencontre de $r\mu$ prolongé en h, & l'arc de Cercle $K\mu$ infiniment petit du 2[d] ordre étant décrit du centre m & du rayon $m\mu$, Kh est la quantité dont le côté *Mm* est plus grand que $m\mu$, & par conséquent Kh est la différence des deux côtés. En même-temps $h\mu$ est la base de l'angle de contingence $hm\mu$, & est ddy, & $K\mu$ est le Sinus de cet angle : car à cause de l'infinie petitesse, l'arc qui mesure cet angle & son Sinus, sont la même chose. Fig. VIII.

Mais si maintenant on suppose les côtés constans, il se fait des changemens. *Mm* est $= m\mu$, & par conséquent il n'y a plus de Kh, différence des deux côtés, & puisqu'il n'y a plus de Kh, ddy n'est plus $h\mu$, mais quelqu'autre grandeur. Le côté $m\mu$ se termine toujours au point μ, mais il ne commence plus au point m, & puisque $m\mu$, auparavant moindre

que *Mm*, lui eſt maintenant égal, le point *m* s'eſt reculé vers *M*, d'où il ſuit que *mr*, auparavant $= MR$, eſt devenue plus grande. Soit $dr = ddx$, la quantité dont *mr* eſt augmentée. Du point *d* je tire ſur *mr* une perpendiculaire *dK* juſqu'à la rencontre de *mK*, & par le point μ une ligne μc parallele à *mr* juſqu'à la rencontre de *dK*. $c\mu$ eſt $= dr = ddx$, & $dc = r\mu = dy$. Donc $Kc = ddy$. Donc $K\mu$ ſinus cherché $= \sqrt{Kc^2 + c\mu^2} = \sqrt{ddy^2 + ddx^2}$, Formule de la courbure dans la ſuppoſition des côtés conſtans.

Il eſt clair que ddy^2 & ddx^2 étant des Infiniment petits du 4me ordre, $\sqrt{ddy^2 + ddx^2}$ eſt du 2^d^, comme doit être le Sinus de l'angle de contingence.

1063. Cette Formule ſeroit embaraſſante dans la pratique du calcul, & il faut la rendre plus ſimple & plus commode, en ramenant *ddy* & *ddx* à la même expreſſion.

J'appelle *ds* le côté $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$. *dy* eſt $= \sqrt{ds^2 - dx^2}$, & *ddy*, puiſque *ds* eſt conſtant, eſt $= \frac{-dx\,ddx}{\sqrt{ds^2 - dx^2}}$. Donc $\frac{-dy\,ddy}{dx} = ddx$. Donc $\frac{dy^2 ddy^2}{dx^2} = ddx^2$. Donc $ddy^2 + ddx^2 = \frac{dx^2 ddy^2 + dy^2 ddy^2}{dx^2} = \frac{\overline{dx^2 + dy^2} \times ddy^2}{dx^2} = \frac{ds^2 ddy^2}{dx^2}$. Donc $\sqrt{ddx^2 + ddy^2} = \frac{ds\,ddy}{dx}$, Formule très-ſimple de la courbure.

1064. Puiſque le côté eſt conſtant, ſi on prend la différence de $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, & qu'on l'égale à zero, on trouvera auſſi $\frac{-dy\,ddy}{dx} = ddx$, d'où ſuivra la même conſéquence de l'art. précédent.

1065. On peut encore démontrer autrement la Formule, & directement.

Les raiſonnemens de l'art. 1062 ſur la Fig. VIII, étant faits, les Triangles $Kc\mu$ & μcg ſont ſemblables, à cauſe des

angles droits $K\mu g$ & $Kc\mu$. Les Triangles μcg & $mr\mu$ ſont ſemblables auſſi. Donc les Triangles $mr\mu$ & $Kc\mu$ ſont ſemblables. Donc $mr\ (dx).\ m\mu\ (ds) :: Kc\ (ddy).\ K\mu = \frac{ds\,ddy}{dx}$.

1066. Comme en appliquant la Formule $\frac{ds\,ddy}{dx}$, on trouvera toujours l'expreſſion de *ddy* mêlée de *ddx*, il faudra toujours ſubſtituer à *ddx* ſa valeur $\frac{-dy\,ddy}{dx}$, moyennant quoi non-ſeulement on n'aura plus que des *ddy*, mais encore l'opération portera eſſentiellement le caractere des *ds* ſuppoſés conſtans, puiſque ce n'eſt qu'en cette ſuppoſition que $ddx = \frac{-dy\,ddy}{dx}$ (1063).

EXEMPLE I.

1067. On a dans le Cercle $dy = \frac{adx - 2xdx}{2y}$, *a* étant le diametre, & de-là on tire, en ne ſuppoſant rien de conſtant, $ddy = \frac{ayddx - 2ydx^2 - 2yxddx - adydx + 2xdydx}{2yy}$, & en mettant au lieu de *ddx*, ſa valeur $\frac{-dy\,ddy}{dx}$, ce qui emporte les *ds* conſtans (1066), on a $ddy = \frac{\overline{2ydx + ady - 2xdy} \times dx^2}{\overline{-2ydx - ady + 2xdy} \times y}$.

Courbure du Cercle constante.

Or toutes les grandeurs du numérateur qui multiplient dx^2, étant les mêmes que celles du dénominateur qui multiplient *y*, mais avec des ſignes contraires, elles ſont toutes $= -1$, d'où ſuit $ddy = \frac{-dx^2}{y}$, & $\frac{ds\,ddy}{dx} = \frac{-ds\,dx}{y}$. Or on trouvera très-aiſément que dans le Cercle, *ds* étant ſuppoſé conſtant, $dx.\ y :: ds.\ \frac{a}{2}$, & que par conſéquent le rapport $\frac{dx}{y}$ eſt conſtant. Donc $\frac{-ds\,dx}{y}$ exprime une courbure conſtante ; & on ſait aſſez que celle du Cercle l'eſt.

Quand le Sinus de la courbure est positif ou négatif.

1068. L'expression $\frac{-dsdx}{y}$ de la courbure du Cercle est affectée du signe —, parce que c'est l'expression du Sinus de l'angle de contingence, & que ce Sinus est nécessairement du côté de la convexité du Cercle, au lieu que les dx & y sont du côté de la concavité, & par conséquent ce Sinus est négatif par rapport aux dx & y qu'on suppose positifs, & qui entrent dans son expression.

1069. Et comme cette raison est générale, il s'ensuit que le Sinus de l'angle de contingence sera négatif toutes les fois qu'il sera, par rapport à la Courbe, du côté opposé à celui où seront les grandeurs qui entreront dans son expression.

1070. Et parce que ce Sinus ne peut être que du côté de la convexité de la Courbe, il sera négatif toutes les fois que ces autres grandeurs n'y seront pas, ou, ce qui est la même chose, que la Courbe sera concave vers l'axe auquel on la rapportera. Et dans le cas contraire, il sera positif.

1071. Si on applique $\frac{-dsdx}{y}$, Formule de la courbure constante du Cercle, au point de son origine, où, à cause de l'origine $y = dy$, & à cause de la perpendicularité $dy = ds$, & $dx = ddx$, on a $-ddx$ pour la courbure de ce point. Et si on applique la même Formule au point du Quart de Cercle, où $y = \frac{a}{2}$, & à cause du parallélisme $ds = dx$, on a $\frac{-2ds^2}{a}$ pour la courbure de ce point. Mais ddx & $\frac{2ds^2}{a}$ ne paroissent pas d'abord égaux, comme ils doivent l'être, puisque la courbure est constante. Ils le sont cependant. Car on a par-tout dans le Cercle $2ydy = adx - 2xdx$, & par conséquent $\frac{2dy^2 + 2dx^2 + 2yddy}{a - 2x} = ddx$. Or à l'origine du Cercle, $2dx^2 = 2ddx^2$ & $2yddy = 2dyddy$ disparoissent dans le numérateur de cette fraction devant $2dy^2$, & $2x = 2ddx$ disparoît dans le dénominateur devant a. Donc la fraction se réduit à $\frac{2dy^2}{a} = ddx$. Or à ce point, $\frac{2dy^2}{a} = \frac{2ds^2}{a}$.

1072. Puisque a, diametre du Cercle, n'entre point dans $\frac{-dsdx}{y}$, expression du Sinus des angles de contingence du Cercle, ce Sinus est indépendant du diametre, & par conséquent les angles de contingence sont les mêmes dans tous les différens Cercles. Et en effet, si l'on conçoit d'abord un Triangle équilatéral inscrit au Cercle, ensuite un Exagone, ensuite un Dodécagone, & toujours ainsi, en doublant toujours le nombre des côtés du Polygone précédent, le Polygone deviendra enfin le Cercle, quand le nombre des côtés sera infini. Et comme cette inscription étant faite en deux différens Cercles, les Polygones correspondans auront toujours les mêmes angles obtus, les deux derniers Polygones devenus les deux Cercles, auront aussi les mêmes angles obtus, & par conséquent des angles de contingence égaux.

Courbures de différens Cercles en raison renversée de leurs diametres.

1073. Deux Cercles inégaux sont deux Polygones formés d'un nombre infini de côtés égal : mais les côtés infiniment petits du plus grand sont plus grands en même raison que son diametre. Donc le Point qui décrit un plus grand Cercle, faisant de plus grands pas en ligne droite, & des détours qui ne sont qu'égaux à ceux qu'il feroit en décrivant un plus petit Cercle, il décrit une ligne moins courbe, dans la raison que les côtés sont plus grands. Donc la courbure de deux Cercles inégaux est en raison renversée de leurs diametres.

Qu'un Cercle, qui paroît passer dans l'angle de contingence d'un plus petit, n'y passe point.

1074. Il est démontré qu'il ne peut passer aucune ligne droite entre la Tangente d'un Cercle & sa circonférence. La raison essentielle en est que l'angle compris entre cette Tangente & la circonférence est un angle de contingence infiniment petit, qui par conséquent est indéterminable, & ne peut être divisé en parties déterminées : or si une droite passoit entre la Tangente & la circonférence, elle diviseroit nécessairement cet angle en deux parties déterminées. Cependant un Cercle quelconque étant posé, un plus grand Cercle qui aura la même Tangente, passera dans l'angle de contingence. On demande comment cela est possible, & la difficulté paroît considérable. Car la portion infiniment petite du grand Cercle

qui passe dans l'angle est une droite, qui peut être prolongée tant qu'on voudra, & par conséquent une droite y passe.

La Solution dépend de ce qui vient d'être dit. L'angle de contingence du grand Cercle & de celui du petit, tous deux ayant leur sommet au point d'attouchement commun aux deux Cercles, sont le même angle, & par conséquent le grand Cercle ne passe point dans l'angle du petit. Mais le grand & le petit décrivent ensemble la même petite droite pendant un temps, après quoi le petit qui doit faire de plus petits pas, se détourne, tandis que le grand poursuit encore la petite droite qui leur avoit été commune, & de-là vient que le petit devient intérieur au grand, & que le grand paroît passer entre le petit & la Tangente commune, quoique réellement il n'y passe pas.

Ce qui rend deux Courbes semblables.

1075. Par la même raison que deux Triangles, & en général deux Polygones quelconques d'un même nombre de côtés sont semblables, lorsqu'ayant des côtés inégaux, ceux de l'un à ceux de l'autre, ils ont les angles correspondans égaux, deux Cercles différens sont toujours semblables, puisque l'un ayant le même nombre infini de côtés que l'autre, & les côtés de chacun étant tous égaux, quoique ceux de l'un inégaux à ceux de l'autre, ils ont tous deux les mêmes angles de contingence.

1076. Et comme cette idée est générale, deux Courbes sont semblables, lorsqu'étant conçues divisées en un nombre infini égal de côtés égaux dans chacune, les angles de contingence correspondans de l'un à l'autre sont égaux, le 1er au 1er, le 2d au 2d, &c.

1077. Mais parce que cette division en côtés infiniment petits égaux ne peut se faire que par la pensée, on fait réellement l'équivalent, en inscrivant dans des Courbes des Polygones semblables, dont les côtés sont finis, & celles où ils peuvent être inscrits sont semblables.

1078. La circonférence d'un plus grand Cercle est à celle d'un plus petit, comme le diametre du plus grand au diametre du plus petit, & en même-temps le plus petit est plus

courbe que le plus grand, en même raiſon que ſon diametre eſt plus petit (1073). Donc un plus grand diametre détermine en même-temps & une plus grande étendue ou longueur, & une moindre courbure de la circonférence circulaire, & au contraire.

1079. Comme il faut un diametre pour régler la grandeur abſolue d'un Cercle, qui ſans cela pourroit être différente à l'infini, ainſi & par la même raiſon il faut, pour régler la grandeur abſolue de toute autre Courbe, quelque ligne conſtante que l'on appelle *Parametre*. Dans le Cercle, le diametre ou axe eſt diametre ou axe, parce qu'il porte les Ordonnées, & en même-temps parametre, parce qu'il regle la grandeur abſolue de la Courbe: mais dans les autres Courbes le diametre ou axe & le parametre ſont différens. Donc les étendues ou longueurs de deux Courbes ſemblables ſont entr'elles comme leurs parametres. *Ce que c'eſt que les Parametres.*

1080. Et comme ce qui fait qu'une Courbe eſt plus longue qu'une Courbe ſemblable, la rend auſſi moins courbe en même raiſon, les longueurs de deux Courbes ſemblables ſont en raiſon directe, & les courbures en raiſon renverſée des parametres. Ainſi ſi a & $2a$ ſont les parametres de deux Paraboles, la 1re eſt une fois moins longue, & une fois plus courbe que la 2de; car elle fait les mêmes détours après des pas une fois plus petits. Et en général les courbures de deux Courbes ſemblables ſont en raiſon renverſée de leurs longueurs.

Il eſt clair que cela doit s'entendre non-ſeulement de la courbure totale d'une Courbe comparée à celle de l'autre Courbe ſemblable, mais encore de la courbure d'un point quelconque de l'une comparée à la courbure du point correſpondant dans l'autre.

1081. Si la grandeur abſolue d'une Courbe ne peut être réglée par un ſeul parametre, elle le ſera par deux, & en ce cas-là la longueur d'une Courbe de cette eſpece ſera à celle d'une 2de Courbe ſemblable comme le produit des deux parametres de la 1re au produit des deux parametres de la 2de,

& leur courbures feront en cette même raifon renverfée.

1082. Si on prend dans deux Cercles différens deux arcs infiniment petits, égaux en longueur, celui qui appartient au plus grand Cercle peut paffer pour ligne droite, & l'autre ne le peut pas par rapport à lui. Car celui du grand Cercle pouvant toujours être un des côtés de fon Cercle, celui du petit qui a la même étendue, ne peut être que plus d'un côté du fien, & par conféquent il contient un ou plufieurs angles de contingence, & ne peut être conçu que comme courbe, étant comparé à l'autre.

Ce fera la même chofe de deux arcs infiniment petits égaux de deux autres Courbes quelconques femblables.

EXEMPLE II.

Courbure de l'Ellipfe.

1083. Soit une Ellipfe, dont l'équation eft $yy = \frac{abx - bxx}{a}$, a étant le grand axe. $dy = \frac{abdx - 2bxdx}{2ay}$, & ddy, après avoir fubftitué aux ddx, leur valeur $\frac{-dyddy}{dx}$, eft $= \frac{\overline{4ab^2x - 4aby^3 - a^2b^2 - 4b^2x^2} \times dx^2}{\overline{4a^2y^2 + a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2} \times y}$. Donc $\frac{dsddy}{dx} = \frac{\overline{4ab^2x - 4aby^2 - a^2b^2 - 4b^2x^2} \times dsdx}{\overline{4a^2y^2 + a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2} \times y}$, grandeur variable.

1084. A l'origine de l'Ellipfe, où à caufe de l'origine $y = dy$, & $x = dx$, & à caufe de la perpendicularité $dy = ds$, & $dx = ddx$, toutes les grandeurs du numérateur de la fraction qui exprime $\frac{dsddy}{dx}$ difparoiffent devant $-a^2 b^2$, & pareillement toutes celles du dénominateur devant a^2b^2, & par conféquent il ne refte que $\frac{-a^2b^2dsddx}{a^2b^2dy} = -ddx$. Il faut donc voir ce que vaut ddx.

On a par-tout dans l'Ellipfe $dx. y :: 2ady. ab - 2bx$. Donc à l'origine $ddx. dy :: 2ady. ab :: 2dy. b$. Donc $ddx = \frac{2dy^2}{b} = \frac{2ds^2}{b}$.

1085.

1085. Au quart de l'Ellipse, où $x = \frac{a}{2}$, & par conséquent $y = \frac{\sqrt{ab}}{2}$, on a $ddy = \frac{-2bdx^2}{a\sqrt{ab}}$. Et comme en ce point, à cause du parallélisme $dx = ds$, $\frac{dsddy}{dx}$ est $= ddy = \frac{-2bdx^2}{a\sqrt{ab}} = \frac{-2bds^2}{a\sqrt{ab}}$, courbure de ce point.

1086. Donc la courbure de l'origine est à celle du quart $:: -ddx = \frac{-2ds^2}{b} . \frac{-2bds^2}{a\sqrt{ab}} :: \frac{2}{b} . \frac{2b}{a\sqrt{ab}} :: a\sqrt{ab} . bb$. *Décroissante depuis l'origine jusqu'au quart.*

Or $a\sqrt{ab}$ est plus grand que bb, a étant le grand axe, donc la courbure de l'origine est plus grande que celle du quart selon cette raison qui sera connue. Si $a = 4$, & $b = 1$, la courbure de l'origine sera à celle du quart :: 8 . 1.

1087. Donc l'origine de l'Ellipse étant prise à l'extrémité de son grand axe, sa courbure va toujours en diminuant de-là jusqu'au quart, & depuis le quart elle va en croissant jusqu'à la demi-Ellipse.

1088. Puisque la courbure de l'origine est à celle du quart :: $a\sqrt{ab} . bb$, plus a est grand par rapport à b, c'est-à-dire plus l'Ellipse est allongée, plus la courbure de l'origine surpasse celle du quart, ou, ce qui en est une suite, plus la courbure est décroissante depuis l'origine jusqu'au quart. *Et d'autant plus décroissante que le grand axe est plus grand par rapport au petit.*

1089. Si $a = b$, les deux courbures sont égales, & en effet l'Ellipse est alors un Cercle.

1090. Si on compare deux Ellipses semblables, c'est-à-dire, telles que les deux grandeurs A & B de la grande soient en même raison que les deux a & b de la petite, les longueurs ou étendues de leurs circonférences seront comme les produits AB & ab; par ex. si $A = 6$, $B = 2$, $a = 3$, $b = 1$, ces circonférences seront :: 12 . 3 :: 4 . 1, & les courbures seront en cette même raison renversée. *Courbures de deux Ellipses semblables en raison renversée de leurs axes ou parametres.*

On a par-tout dans l'Ellipse, $dy . dx :: ab - 2bx . 2ay$. Donc $dy^2 . dx^2 :: a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 . 4a^2y^2$. Donc

quand il ne s'agit que de rapports, je puis prendre $a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2$, au lieu de dy^2, & $4a^2y^2$, au lieu de dx^2. Donc $dy^2 + dx^2$ quarré du côté quelconque de l'Ellipse est $= a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2y^2$. Et si je prens ce quarré pour celui d'un côté de la moindre de deux Ellipses semblables, le quarré du côté de la grande sera $A^2B^2 - 4AB^2X + 4B^2X^2 + 4A^2Y^2$. Or ces deux quarrés sont entr'eux $:: A^2B^2 . a^2b^2$.

Car à cause de la similitude des Ellipses, $X . x :: A . a$. Donc $AB^2X . ab^2x :: A^2B^2 . a^2b^2$. De même $X^2 . x^2 :: A^2 . a^2$. Donc $X^2B^2 . x^2b^2 :: A^2B^2 . a^2b^2$. Enfin $Y . y :: B . b$. Donc $A^2Y^2 . a^2y^2 . A^2B^2 . a^2b^2$. Donc $A^2B^2 - 4AB^2X + 4B^2X^2 + 4A^2Y^2 . a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2y^2 :: A^2B^2 . a^2b^2$. Donc les côtés de chaque Ellipse étant supposés constans, les côtés de deux Ellipses semblables & les sommes de ces côtés ou les circonférences elliptiques sont $:: AB . ab$. Donc aussi (1080) la courbure de la grande est à celle de la petite $:: ab . AB$.

1091. b n'a pas été ici le petit axe de l'Ellipse, mais le parametre du grand axe a, c'est-à-dire, la 3me proportionnelle au grand axe & au petit, qui par conséquent étoit $\sqrt{ab}$. Mais on verra aisément, en comparant les deux Ellipses semblables de l'art. précédent, que les deux produits du grand axe & du petit, qui sont $A\sqrt{AB}$ & $a\sqrt{ab}$, sont $:: AB . ab$. D'où il suit que les longueurs & les courbures de deux Ellipses semblables se reglent aussi par les produits de leurs axes, & qu'à cet égard on peut prendre les axes pour parametres des Ellipses selon l'idée de l'art. 1081.

EXEMPLE III.

Courbure de la Parabole.

1092. Dans la Parabole $dy = \frac{adx}{2y}$, & après les substitutions néceſſaires que nous supposerons toujours dans la suite, $ddy = \frac{-a^2dx^2}{4y^3 + a^2y}$ & $\frac{dsddy}{dx} = \frac{-a^2dsdx}{4y^3 + a^2y}$.

1093. A son origine, où $y = dy = ds$, & $dx = ddx$, il vient $\frac{-a^2 ds ddx}{a^2 dy} = - ddx$, courbure de ce point.

On a par-tout dans la Parabole $dx . y :: 2dy . a$. Donc à l'origine $ddx . dy :: 2dy . a$. Donc $ddx = \frac{2dy^2}{a} = \frac{2ds^2}{a}$, ou $ddx = \frac{2}{\infty^2}$, parce que $ds = \frac{1}{\infty}$.

1094. Au point qui répond au Foyer, où $x = \frac{a}{4}$, & $y = \frac{a}{2}$, $dx = dy$, & par conséquent $ds^2 = 2dx^2$, & $ds = dx\sqrt{2}$, ou $dx = \frac{ds}{\sqrt{2}}$, on a $ddy = \frac{-dx^2}{a}$, & $\frac{ds ddy}{dx} = \frac{-ds dx}{a} = \frac{-ds^2}{a\sqrt{2}}$, courbure de ce point.

1095. Donc la courbure du sommet est à celle du Foyer $:: \frac{2ds^2}{a} . \frac{ds^2}{a\sqrt{2}} :: 2 . \frac{1}{\sqrt{2}} :: 2\sqrt{2} . 1$.

1096. A l'extrémité de la Parabole, où $y = \infty^{\frac{1}{2}}$, on a $\frac{ds ddy}{dx} = \frac{-a^2 ds dx}{4\infty^{\frac{3}{2}}}$. Or à cause du parallélisme $ds = dx$, & ds constant est toujours $= \frac{1}{\infty}$. Donc $\frac{-a^2 ds dx}{4\infty^{\frac{3}{2}}}$, ou, en négligeant les coëfficiens finis & le signe négatif, $\frac{ds dx}{\infty^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\infty^2}$ divisé par $\infty^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\infty^2 \times \infty^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\infty^{\frac{7}{2}}}$. Or $\frac{1}{\infty^{\frac{7}{2}}}$ est du 4me ordre potentiel d'Infiniment petit par rapport au Fini, parce qu'il est d'un ordre radical au dessous de $\frac{1}{\infty^{\frac{6}{2}}} = \frac{1}{\infty^3}$. Donc la courbure est nulle & du 4me ordre potentiel d'Infiniment petit.

1097. Tant que le Sinus de l'angle de contingence est du 2d ordre d'Infiniment petit, la courbure est ordinaire ou

finie. Donc dès qu'il tombe au deſſous de cet ordre, ſoit juſqu'à $\frac{1}{\infty^3}$, ſoit ſeulement dans quelque ordre radical compris entre $\frac{1}{\infty^2}$ & $\frac{1}{\infty^3}$, la courbure eſt infiniment petite & nulle, du moins par rapport à une courbure finie & ſenſible. A plus forte raiſon, s'il tombe au deſſous de $\frac{1}{\infty^3}$.

Décroiſſante depuis l'origine juſqu'à l'extrémité où elle eſt nulle.

1098. Il eſt clair que la courbure de la Parabole va en décroiſſant depuis l'origine juſqu'à l'extrémité.

1099. Les courbures de deux différentes Paraboles ſont en raiſon renverſée de leurs parametres.

EXEMPLE IV.

Courbure de l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes.

1100. Soit une Hyperbole équilatere entre ſes Aſymptotes, $aa = xy \,.\, dy = \frac{-aadx}{xx} \,.\, ddy = \frac{2a^2xdx^2}{a^4+x^4} \,.\, \frac{dsddy}{dx} = \frac{2a^2xdsdx}{a^4+x^4}$.

1101. On voit déja que ſelon les art. 1068, 1069, 1070, ce Sinus de l'angle de contingence n'eſt point négatif, comme dans les autres Courbes qu'on a conſidérées juſqu'ici, parce qu'elles étoient concaves vers leur axe, & que l'Hyperbole, ainſi qu'on la prend ici, eſt convexe.

1102. Au ſommet de cette Courbe $x = a$, donc $ddy = \frac{dx^2}{a}$. Or à ce même point $dx = -dy$, & par conſéquent $ds^2 = 2dx^2$, $ds = dx\sqrt{2}$, ou $dx = \frac{ds}{\sqrt{2}}$. Donc $\frac{dsddy}{dx} = \frac{ds^2}{a\sqrt{2}}$, courbure de ce point.

1103. Si on prend un autre point, comme celui qui répond à $x = 2a$, on a $ddy = \frac{4dx^2}{17a}$, & $\frac{dsddy}{dx} = \frac{4dsdx}{17a}$. Or à ce point $dy = \frac{-dx}{4}$, d'où ſuit $ds^2 = \frac{17dx^2}{16}$, $ds = \frac{dx\sqrt{17}}{4}$, & $dx = \frac{4ds}{\sqrt{17}}$. Donc $\frac{4dsdx}{17a} = \frac{16ds^2}{17a\sqrt{17}}$.

1104. Donc la courbure du sommet est à celle du point où $x = 2a :: \frac{ds^2}{a\sqrt{2}} . \frac{16ds^2}{17a\sqrt{17}} :: \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{16}{17\sqrt{17}} :: 17\sqrt{17} . 16\sqrt{2}$, c'est-à-dire, plus que triple.

1105. A l'extrémité de l'Hyperbole où $x = \infty$, on a $\frac{dsddy}{dx} = \frac{2a^2dsdx}{\infty^3}$. Or puisque dans cette Courbe $dy . dx :: 1 . x^2$, le dx de l'extrémité est $= \frac{1}{\infty}$, car alors dy étant $= \frac{1}{\infty^3}$ (960), on a $dy . dx :: 1 . \infty^2 :: \frac{1}{\infty^3} . \frac{1}{\infty}$. Donc ds étant constant, & $= \frac{1}{\infty}$, $dsdx = \frac{1}{\infty^2}$. Cela suit aussi de ce que la Courbe est alors parallele. Donc $\frac{2a^2dsdx}{\infty^3} = \frac{2a^2}{\infty^2}$ divisé par ∞^3, $= \frac{2}{\infty^5}$, ou de l'ordre de $\frac{1}{\infty^5}$. Donc la courbure de l'extrémité de l'Hyperbole, du côté qu'elle devient parallele à son axe, est non seulement nulle, mais de trois ordres d'Infiniment petit au dessous de la courbure ordinaire ou finie.

1106. L'Hyperbole a une Asymptote, & par conséquent est *censée* ligne droite dans une étendue infinie, & cela convient parfaitement avec ce qu'on vient de trouver, qu'à son extrémité sa courbure est de trois ordres d'Infiniment petit au dessous de la courbure finie. On peut déja juger par-là que quand la courbure nulle d'une Courbe à son extrémité, descend jusqu'au 5me ordre d'Infiniment petit, cette Courbe a une Asymptote, & est droite dans une étendue infinie.

Décroissante depuis l'origine jusqu'à l'extrémité où elle est nulle, & plus que nulle.

1107. Si $x = \frac{1}{\infty}$, $\frac{2a^2xdsdx}{a^4+x^4} = \frac{2xdsdx}{a^2}$. Or puisque $dy . dx :: 1 . x^2$, on a alors $dy . dx :: 1 . \frac{1}{\infty^2}$. Donc à cause de la perpendicularité, dy étant $= ds$, & ds constant, & toujours $= \frac{1}{\infty}$, on a $ds . dx :: 1 . \frac{1}{\infty^2} :: \frac{1}{\infty} . \frac{1}{\infty^3}$. Donc $\frac{2xdsdx}{a^2} = \frac{2}{a^2 \times \infty \times \infty \times \infty^3} = \frac{2}{\infty^5}$, même courbure que celle de l'autre branche de l'Hyperbole, ce qui effectivement doit être, puisque l'Hyperbole est parfaitement la même dans ses deux branches.

Ceci n'eſt point contraire à ce qui a été trouvé dans l'art. 960, que de ce côté-là de l'Hyperbole dy eſt $= \infty$. Car ici, à cauſe des ds conſtans, $dy = ds$ a dû être $= \frac{1}{\infty}$, ce qui n'empêche pas que ce même dy ne ſoit le dernier d'une infinité d'infinités de $dy = \frac{1}{\infty}$ poſés en ligne droite, qui font une ſomme $= \infty$.

EXEMPLE V.

Courbure de la Logarithmique.

1108. Soit la Logarithmique où $dy = \frac{ydx}{a}$, $ddy = \frac{ydx^2}{a^2 + y^2}$, $\frac{dsddy}{dx} = \frac{ydsdx}{a^2 + y^2}$.

1109. Si on prend l'origine au point où $y = \frac{1}{\infty}$, on a $dx = \frac{1}{\infty}$, & à cauſe du parallélisme $ds = dx = \frac{1}{\infty}$. Donc alors $\frac{ydsdx}{a^2 + y^2} = \frac{ydsdx}{a^2}$ eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$. Mais comme on peut dans cette Courbe ſuppoſer y de l'ordre d'Infiniment petit qu'on voudra, on voit que ſa courbure de ce côté-là deviendra d'un ordre d'Infiniment petit quelconque, & par conſéquent que la Courbe eſt ligne droite dans une étendue infinie, ce qui doit être, puiſqu'elle a une Aſymptote en ce ſens-là.

1110. Si $y = \infty$, $dx = \frac{1}{\infty^2}$, & ds toujours $= \frac{1}{\infty}$, Donc $\frac{ydsdx}{a^2 + y^2} = \frac{1}{\infty^2}$ diviſé par ∞^2, $= \frac{1}{\infty^4}$. On ſait d'ailleurs que dans la ſuppoſition des dx conſtans, le dernier dy de la Logarithmique, du côté qu'elle eſt perpendiculaire, eſt $= 1$ (954), c'eſt-à-dire, qu'elle eſt à ſon extrémité ligne droite dans une étendue finie. Or c'eſt là une propriété réelle qui doit ſe retrouver toujours, de quelque maniere qu'on diviſe la Courbe. Donc on peut juger que comme la courbure de l'extrémité d'une Courbe, lorſqu'elle eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty^5}$, marque que cette Courbe eſt alors droite dans une étendue infinie (1106), ainſi la courbure de l'extrémité de l'ordre de $\frac{1}{\infty^4}$, marque que la Courbe n'eſt droite que dans une étendue finie.

Ici, quoiqu'à cause des ds constans on ait pris le dernier $ds = \frac{1}{\infty}$, il est clair qu'il a pû être précédé d'une infinité d'autres égaux, tous posés bout à bout en ligne droite, selon l'art. 1107.

1111. La courbure de la Logarithmique étant nulle tant à son origine qu'à son extrémité, il faut que depuis l'origine elle ait été toujours en croissant jusqu'à un certain point, après quoi elle aura toujours décrû.

Croissante depuis l'origine jusqu'à un certain point, après lequel elle décroît.

Pour trouver ce *plus grand* de courbure, il faut (1055) différentier $\frac{ydsdx}{a^2+y^2}$, expression de la courbure de la Logarithmique, & après les substitutions nécessaires, on aura la différentielle de cette expression ou grandeur, & cette différentielle étant égalée à zero, donnera $y = \frac{a}{\sqrt{2}}$, comme M. de l'Hopital l'a trouvé (*p.* 88) par une voie toute différente. C'est donc au point de la Courbe, qui répond à $y = \frac{a}{\sqrt{2}}$, que se trouve la plus grande courbure.

1112. Comme on sait que la Logarithmique a un cours continu sans inflexion ni rebroussement, & que par conséquent elle ne peut arriver dans la suite de ce cours à un Terme naturel de courbure, elle n'arrive donc qu'à un Terme arbitraire, c'est-à-dire (931) à un angle de contingence plus grand que tous les précédens & les suivans.

EXEMPLE VI.

1113. Soit la Cycloïde (*p.* 91. *des Inf. petits*) dont le Cercle générateur a pour diametre $2a$, ce diametre étant aussi l'axe de la Cycloïde. Une Ordonnée quelconque de la Cycloïde est toujours égale à l'arc u du Cercle générateur plus l'Ordonnée correspondante du Cercle, qui est $z = \sqrt{2ax - xx}$. Donc l'Ordonnée y de la Cycloïde est $= u + \sqrt{2ax - xx}$. Donc $dy = du + \frac{adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Et comme du, qui est la

Courbure de la Cycloïde.

différentielle d'un arc fini du Cercle, en eſt par conſéquent un côté quelconque infiniment petit, & que le côté du Cercle eſt $\frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}$, on a pour la Cycloïde $dy = \frac{2adx - xdx}{\sqrt{2ax-xx}}$.

Donc $ddy = \frac{\overline{x-2a} \times dx^2}{\overline{4a-2x}\sqrt{2ax-xx}}$, où je vois que $\frac{x-2a}{2a-x}$ ſeroit $= -1$, & que par conſéquent $\frac{x-2a}{4a-2x}$ eſt $= -\frac{1}{2}$, puiſque $4a-2x$ eſt double de $2a-x$. Donc $ddy = \frac{-dx^2}{2\sqrt{2ax-xx}}$.

Donc $\frac{dsddy}{dx} = \frac{-dsdx}{2\sqrt{2ax-xx}}$.

1114. La Cycloïde à ſon origine ayant $x = dx$ à cauſe de l'origine, & $dx = ddx$ à cauſe de la perpendicularité, $\frac{-dsdx}{2\sqrt{2ax-xx}}$ eſt alors $= \frac{-dsddx}{2\sqrt{2addx}} = \frac{-ds\sqrt{ddx}}{2\sqrt{2a}}$, courbure ordinaire & finie, puiſque ds & $\sqrt{ddx}$ ſont tous deux du 1er ordre d'Infiniment petit.

1115. On a par-tout dans la Cycloïde $dy . dx :: 2a - x . \sqrt{2ax-xx}$. Donc à l'origine $dy . ddx :: 2a . \sqrt{2addx}$. Donc alors $dy = \frac{2addx}{\sqrt{2addx}} = \sqrt{2addx}$. Et comme en ce point $dy = ds$, on a donc $\frac{-ds\sqrt{ddx}}{2\sqrt{2a}} = \frac{-\sqrt{2addx} \times \sqrt{ddx}}{2\sqrt{2a}} = \frac{-ddx}{2}$.

1116. Pour avoir en ds l'expreſſion de la courbure de la Cycloïde à ſon origine, il ne faut que tirer de $dy = \sqrt{2addx}$, $dy^2 = 2addx$, & $ddx = \frac{dy^2}{2a}$. Donc $\frac{-ddx}{2} = \frac{-dy^2}{4a} = \frac{-ds^2}{4a}$, puiſqu'alors $ds = dy$.

1117. Si $x = \frac{a}{2}$, $\frac{-dsdx}{2\sqrt{2ax-xx}} = \frac{-dsdx}{a\sqrt{3}}$.

1118.

1118. Pour comparer $\frac{-ds^2}{4a}$ & $\frac{-dsdx}{a\sqrt{3}}$, ou $\frac{ds}{4}$ & $\frac{dx}{\sqrt{3}}$, il faut avoir en ds la valeur de dx au point où $x = \frac{a}{2}$. On a à ce point $dy \,.\, dx :: \frac{3a}{2} \,.\, \frac{a\sqrt{3}}{2} :: 3 \,.\, \sqrt{3} :: \sqrt{3} \,.\, 1$. Donc $dy = dx\sqrt{3} \,.\, dy^2 = 3dx^2 \,.\, dy^2 + dx^2 = 4dx^2 = ds^2$. Donc $dx = \frac{ds}{2}$. Donc $\frac{dx}{\sqrt{3}} = \frac{ds}{2\sqrt{3}}$. Donc la courbure de l'origine est à celle du point où $x = \frac{a}{2} :: \frac{ds}{4} \,.\, \frac{ds}{2\sqrt{3}} :: 2\sqrt{3} \,.\, 4 :: \sqrt{3} \,.\, 2$. Donc la courbure est croissante depuis l'origine jusqu'au point où $x = \frac{a}{2}$.

On trouvera de même, en donnant à x différentes valeurs toujours plus grandes que $\frac{a}{2}$, que la courbure sera toujours croissante.

1119. A l'extrémité de la Cycloïde $\frac{-dsdx}{2\sqrt{2ax-xx}} = \frac{-dsdx}{2dz}$. *Infinie à son extrémité.* Car la Cycloïde étant alors parallele à son axe, elle a un dx, & $\sqrt{2ax-xx}$ qui est l'Ordonnée du Cercle $= z$, devient dz, parce que le Cercle à ce point a une Ordonnée infiniment petite du 1er ordre. Or $\frac{-dsdx}{2dz}$, Sinus de l'angle de contingence de ce point, est un Infiniment petit du 1er ordre, donc cet angle seroit Fini, s'il étoit possible, & la courbure infinie. Mais comme un angle de contingence fini est impossible, il faut qu'à ce Terme naturel de courbure croissante il s'en substitue un autre, qui ne peut être qu'un côté nul, ou infiniment petit du 2d ordre (911). *Et pourquoi.*

1120. Et en effet cela est nécessaire par la génération de la Cycloïde, ou par sa correspondance avec le Cercle. Les Ordonnées du Cercle prolongées sont celles de la Cycloïde, & par conséquent deux Ordonnées quelconques infiniment proches comprennent entr'elles un arc infiniment petit ou côté tant du Cercle que de la Cycloïde. D'ailleurs ces Or-

données perpendiculaires à l'axe, tant du Cercle que de la Cycloïde, sont paralleles à la base de la Cycloïde. A l'origine commune ces deux Courbes sont perpendiculaires à leur axe, mais à l'extrémité le Cercle est encore perpendiculaire à l'axe, & la Cycloïde y est parallele, ou, ce qui revient au même, le Cercle est parallele à la base de la Cycloïde, & la Cycloïde y est perpendiculaire. De-là il suit que les Ordonnées de l'une & de l'autre Courbe étant toujours paralleles à la base de la Cycloïde, les deux dernieres Ordonnées n'ont point dans le Cercle, parallele alors à la base de la Cycloïde, & couché sur cette base, de dx qui les sépare, au lieu qu'il y en avoit un partout ailleurs, elles n'ont pour intervalle qu'un ddx, & par conséquent au lieu que partout ailleurs deux Ordonnées consécutives comprenoient entr'elles, étant prolongées, un côté de la Cycloïde de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, celles-là n'en peuvent plus comprendre qu'un qui soit nul, ou de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$.

1121. Si l'on veut suivre encore cela plus loin, on trouvera que le 1[er] côté de la Cycloïde étant plus grand que celui du Cercle, ceux de la Cycloïde vont toujours ensuite en décroissant par rapport à ceux du Cercle, de sorte qu'il n'est pas étonnant qu'au dernier côté du Cercle $= \frac{1}{\infty}$ il en réponde un de la Cycloïde $= \frac{1}{\infty^2}$.

Car le côté du Cercle est toujours $\frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Donc à l'origine du Cercle le côté est $= \frac{addx}{\sqrt{2addx}}$. Et le 1[er] côté de la Cycloïde est $= dy = \frac{2addx}{\sqrt{2addx}}$ (1115), donc ddx étant le même de part & d'autre, le 1[er] côté de la Cycloïde est au 1[er] du Cercle :: 2 . 1.

Au point où $x = \frac{a}{2}$, le côté du Cercle est $= \frac{dx}{\sqrt{\frac{3}{4}}}$, & celui de la Cycloïde est $ds = 2dx$ (1118), donc dx étant

le même de part & d'autre, le côté de la Cycloïde est alors à celui du Cercle :: $2 . \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}$ :: $2 . \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}$ :: $2 . \frac{2}{\sqrt{3}}$ :: $\sqrt{3} . 1$. Donc le côté de la Cycloïde, quoiqu'encore plus grand que celui du Cercle, le surpasse moins qu'il ne le surpassoit à l'origine, il en ira de même des autres. Et comme les côtés de la Cycloïde ont été supposés constans, il faut concevoir que ceux du Cercle croissent toujours par rapport à ceux de la Cycloïde, de sorte qu'à la fin le Cercle en a encore un de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, lorsque la Cycloïde n'en a plus, ou n'en a un que de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$.

1122. Quand on a trouvé dans l'art. 1119, $\frac{-ds\,dx}{2dz}$, courbure infinie de l'extrémité de la Cycloïde, on a pris dx pour dx, & non pour ddx, comme on a trouvé depuis qu'il l'étoit, & de même ds pour ds, & non pour dds : mais il ne faut pas remettre à présent dans l'expression de la courbure infinie ddx pour dx, ni dds pour ds. La raison en est que $\frac{ds\,dx}{dz}$ signifie par soi-même le Sinus d'un angle de contingence fini, & le doit toujours signifier. Mais parce que cet angle fini est impossible, non par lui-même, mais dans une Courbe, il faut, sans rien changer à cette expression, entendre par-là une autre maniere équivalente dont la courbure est infinie.

1123. Dans toutes les Courbes qui à leur origine étoient perpendiculaires, on a toujours trouvé pour le Sinus de l'angle de contingence de l'origine ddx, soit sans coëfficient comme dans le Cercle (1071), dans l'Ellipse (1084), dans la Parabole (1093), soit avec un coëfficient comme ici dans la Cycloïde (1115). Il est aisé d'en voir la raison générale.

Remarque sur la courbure des Courbes perpendiculaires à leur origine.

Soit Mm le 1[er] côté d'une Courbe qui est perpendiculaire à son axe, & $m\mu$ le 2[d]. La petite ligne ma étant tirée du point m sur l'axe, de sorte qu'elle ne differe de Mm que parce qu'elle fait avec elle l'angle amM, dont la base aM est de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, cette base aM est ddx, & la Courbe est

Fig. IX.

perpendiculaire, parce que aM ou ddx eſt infiniment petit par rapport à Mm ou dy. D'un autre côté, l'angle $Km\mu$ eſt le 1[er] angle de contingence de la Courbe, dont le Sinus eſt auſſi ce même ddx avec ou ſans coëfficient, puiſqu'on l'a trouvé pour meſure de ce 1[er] angle, & par conſéquent l'angle $Km\mu$ a toujours rapport à l'angle amM. Si le 2[d] côté $m\mu$ prolongé tombe ſur la ligne ma, les deux angles $Km\mu$ & amM ſont égaux. Si $m\mu$ prolongé tombe entre ma & mM, l'angle de contingence $Km\mu$ eſt plus petit que l'angle amM, ſi c'eſt le contraire, il eſt plus grand.

Quand aM ſeroit du 1[er] ordre, elle pourroit être priſe pour un arc circulaire infiniment petit qui meſureroit l'angle amM, à plus forte raiſon étant du 2[d] ordre par la ſuppoſition. Donc ſi $m\mu$ prolongé tombe ſur am, l'angle de contingence eſt meſuré par $aM = ddx$, & ſoit que $m\mu$ prolongé tombe entre am & Mm, ſoit le contraire, les angles de contingence ſeront toujours exprimés par $\frac{aM}{n}$ ou par $n \times aM$, n étant un coëfficient fini, c'eſt-à-dire par $\frac{ddx}{n}$, ou $nddx$.

1124. Donc dans la Cycloïde, où le Sinus de l'angle de contingence de l'origine eſt $= \frac{ddx}{2}$, la courbure de l'origine eſt la moitié moindre que ſi elle étoit exprimée par ddx. Et comme dans le Cercle elle eſt exprimée par ddx, qui eſt le même de part & d'autre, la courbure de la Cycloïde eſt donc la moitié moindre que celle du Cercle à leur origine commune.

1125. Donc ſi l'on imagine que le Cercle & la Cycloïde aient un même côté à leur origine, il faut que l'angle de contingence que fait le Cercle par ſon 2[d] côté ſoit double de celui que fait la Cycloïde par le ſien, ce qui eſt poſſible, puiſque par-là le Cercle eſt intérieur à la Cycloïde, comme effectivement il doit l'être. Mais d'ailleurs cela n'eſt plus poſſible, quand on ſuppoſe les côtés de la Cycloïde conſtans, comme l'on fait ici en conſidérant ſa courbure, car ils ſeroient donc tous égaux à ce 1[er] côté du Cercle, & ſi le Cercle étoit auſſi

conçu divisé en côtés tous égaux à ce 1[er], les deux sommes d'un nombre infini égal de grandeurs égales seroient égales, ou la circonférence du Cercle à celle de la Cycloïde, ce qui certainement n'est pas. Donc il faut concevoir une autre maniere dont la courbure de la Cycloïde sera la moitié moindre que celle du Cercle à leur origine commune, & cette autre maniere consistera nécessairement en ce que le 1[er] côté de la Cycloïde sera double de celui du Cercle, ce qui revient à l'art. 1121, moyennant quoi les deux Courbes auront leur 1[er] angle de contingence égal.

1126. Donc ce n'est pas seulement dans le cas de la courbure infinie qu'il faut transporter aux côtés ce qui devroit naturellement & ne peut cependant appartenir aux angles de contingence. Cela vient visiblement de l'équivalence des deux manieres de mesurer la courbure.

EXEMPLE VII.

1127. Soit la 1[re] Parabole cubique $a^2x = y^3$. $dy = \frac{aadx}{3y^2}$. *Courbure de la premiere Parabole du 3[me] degré.*

$ddy = \frac{-2a^4dx}{a^4+9y^5}$. $\frac{dsddy}{dx} = \frac{-2a^4dsdx}{a^4y+9y^5}$.

1128. A l'origine, où $y = dy$, & à cause de la perpendicularité $dy = ds$, & $dx = ddx$, $\frac{-2a^4dsdx}{a^4y+9y^5} = \frac{-2a^4dsddx}{a^4dy}$ $= -2ddx$.

Or on a par tout, $dy . dx :: 1 . 3y^2$, & à l'origine, $dy . ddx :: 1 . 3dy^2$. Donc $dy = ds$ étant $= \frac{1}{\infty}$, ddx est de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$, & $= \frac{3}{\infty^3}$. Donc $-2ddx = \frac{-6}{\infty^3}$. Donc la courbure est nulle.

1129. Il faut entendre par-là que la petite ligne aM FIG. IX. qui détermine la perpendicularité, & qui ordinairement est de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, est dans cette Parabole de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$, ainsi qu'il est fort possible qu'elle en soit, & même de tous les ordres inférieurs, de sorte que $m\mu$, 2[d] côté de la Courbe, étant prolongé jusqu'à l'axe, tomberoit sur le point a, dont

la distance au point M seroit de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$, car on n'a point d'égard au coëfficient 6, qui se trouve ici, & de-là il suit que le Sinus de l'angle de contingence $Km\mu$ est un Infiniment petit de cet ordre, & que le côté $m\mu$ a la position mK, à cet angle près, qui n'est rien par rapport aux angles ordinaires de contingence, ou enfin que les deux 1[ers] côtés Mm & $m\mu$ sont *censés* posés bout à bout en ligne droite, & le sont sensiblement.

1130. Cette Parabole à son origine a une inflexion, parce que (940) à la droite du point de son origine elle n'a des Ordonnées qu'au dessus de l'axe, & à la gauche elle n'en a qu'au dessous, & comme l'inflexion produit ordinairement une courbure nulle, on auroit pû croire que c'est elle qui rend la courbure de l'origine nulle. Mais on voit par l'art. précédent que cela n'est point ainsi, puisqu'on n'a considéré que l'origine de la branche supérieure à l'axe, dont les deux 1[ers] côtés sont nécessairement posés en ligne droite. Donc la courbure nulle de cette Parabole à son origine est indépendante de l'inflexion qui se fait à cette même origine de la branche supérieure à l'inférieure. Donc en considérant l'inflexion, il faudra concevoir quatre côtés consécutifs de cette Courbe posés bout à bout en ligne droite, deux de la branche supérieure, & deux de l'inférieure.

1131. Si l'on prend dans cette Courbe $y = \frac{a}{2}$, on a $\frac{-2a^4 ds dx}{a^4 y + 9y^5} = \frac{-64 ds dx}{25 a}$. Et si $y = a$, $\frac{-2a^4 ds dx}{a^4 y + 9y^5} = \frac{-ds dx}{5a}$.

1132. Pour comparer $\frac{64 ds dx}{25 a}$ & $\frac{ds dx}{5a}$ ou $\frac{64 dx}{5}$ & dx, on peut, comme on a fait jusqu'ici, exprimer ces dx en ds, ou les laisser en dx, mais après les avoir égalés à ds, ce qui reviendra au même. En prenant ce dernier tour, je distingue ces dx, parce qu'ils sont différens, & j'appelle le 1[er] Dx. y étant $= \frac{a}{2}$, $dy^2 + Dx^2 = ds^2 = \frac{25 Dx^2}{9}$. Et y étant $= a$, $ds^2 = \frac{10 dx^2}{9}$. Donc les ds étant constans, $25 Dx^2 = 10 dx^2$.

Donc $Dx^2 . dx^2 :: 10 . 25$, & $Dx . dx :: \sqrt{10} . 5$. Donc, comme il ne s'agit ici que de rapports, en mettant au lieu de Dx & de dx, les nombres qui ont même rapport, $\frac{64Dx}{5} = \frac{64\sqrt{10}}{5}$, & $dx = 5$. Or $\frac{64\sqrt{10}}{5} . 5 :: 64\sqrt{10} . 25$, c'est-à-dire, que la courbure du point où $y = \frac{a}{2}$ est plus de huit fois plus grande que celle du point où $y = a$.

1133. La courbure nulle à l'origine ne va donc pas toujours en croissant depuis ce point-là, & il faut qu'il y ait plus près de l'origine que le point où $y = a$, un point où elle arrive à un Terme de grandeur, qui ne peut être qu'arbitraire, puisque la Courbe n'a au dessus de son axe qu'un cours continu sans inflexion ni rebroussement.

Croissante depuis l'origine où elle est nulle, jusqu'à un certain point, & de-là décroissante.

Il faut trouver ce *plus grand* comme dans l'art. 1111, & il vient $y = \frac{a}{\sqrt[4]{45}}$.

Comme $\sqrt[4]{45}$ est entre 2 & 3, $y = \frac{a}{\sqrt[4]{45}}$ est plus petite, & par conséquent plus proche de l'origine que $y = \frac{a}{2}$.

1134. Si dans cette Parabole $y = \infty$, ou plutôt $y = \infty^{\frac{1}{3}}$, car sans cela il y auroit beaucoup d'erreur, $\frac{-2a^4 ds dx}{a^4 y + 9y^5} = \frac{-2a^4 ds dx}{9\infty^{\frac{5}{3}}}$. Et comme à cause du parallélisme $dx = ds = \frac{1}{\infty}$, on a $\frac{-2a^4 ds dx}{9\infty^{\frac{5}{3}}} = \frac{1}{\infty^2}$ divisé par $\infty^{\frac{5}{3}}$, & en ne considérant que l'ordre $= \frac{1}{\infty^2 \times \infty^{\frac{5}{3}}} = \frac{1}{\infty^{\frac{11}{3}}}$, courbure du 4me ordre potentiel d'Infiniment petit par rapport au Fini, & de deux ordres radicaux au dessous de $\frac{1}{\infty^{\frac{9}{3}}} = \frac{1}{\infty^3}$.

1135. Donc cette courbure nulle de l'extrémité est du

même ordre potentiel par rapport au Fini que celle de la Parabole du 2^d degré (1096).

1136. De ce que la courbure de cette Parabole est nulle, tant à son origine qu'à son extrémité, il suit, indépendamment des art. 1132, 1133, qu'elle doit avoir un *plus grand* de courbure entre l'origine & l'extrémité.

EXEMPLE VIII.

Courbure de la 1re Parabole du 4me degré.

1137. Soit la 1re Parabole du 4me degré, $a^3 x = y^4$.

$$dy = \frac{a^3 dx}{4y^3} \cdot ddy = \frac{-3a^6 dx^2}{a^6 y + 16 y^7} \cdot \frac{ds\,ddy}{dx} = \frac{3a^6 ds\,dx}{a^6 y + 16 y^7}.$$

1138. On trouvera, comme dans l'art. 1128, qu'à l'origine la courbure est $-3\,ddx = \frac{-12}{\infty^4}$.

Comparaison des courbures des 1res Paraboles à leur origine, où elles sont toujours nulles, excepté dans la Parabole du 2^d degré.

1139. Donc le ddx de l'origine étant dans la Parabole du 2^d degré $\frac{2}{\infty^2}$ (1093) $= \frac{2 \times 1}{\infty^2}$, dans la 1re Parabole du 3me degré $\frac{6}{\infty^3}$ (1128) $= \frac{3 \times 2}{\infty^3}$, dans la 1re du 4me degré $\frac{12}{\infty^4} = \frac{4 \times 3}{\infty^4}$, il est aisé de voir que dans chaque 1re Parabole il sera en général $\frac{n \times \overline{n-1}}{\infty^n}$, c'est-à-dire, que toutes ces Paraboles seront d'autant plus perpendiculaires à leur origine que leur degré sera plus élevé, ce qui revient à l'art. 1002, que leur courbure y sera toujours nulle, excepté dans celle du 2^d degré, & qu'étant nulle, elle sera de l'ordre n d'Infiniment petit, & qu'en même temps le Sinus de l'ordre n sera toujours plus grand dans son ordre.

1140. A l'extrémité de la 1re Parabole du 4me degré, où $y = \infty^{\frac{1}{4}}$, on trouvera $\frac{-3a^6 ds\,dx}{a^6 y + 16 y^7}$ de l'ordre de $\frac{-1}{\infty^{\frac{15}{4}}}$, & par conséquent du 4me ordre potentiel d'Infiniment petit, comme dans les autres 1res Paraboles (1096, 1134). D'où il est aisé de juger que la courbure de toutes les 1res Paraboles

à

à leur extrémité, sera toujours nulle, & de ce même 4me ordre potentiel d'Infiniment petit.

1141. Donc toutes les 1res Paraboles, excepté celle du 2^{d} degré, auront un *plus grand* de courbure entre leur origine & leur extrémité.

1142. Si on rassemble les expressions des courbures des extrémités des 1res Paraboles, en y remettant les coëfficiens finis qu'on avoit négligés, on aura $-\frac{1}{4\infty^{\frac{7}{2}}}$ (1096), $-\frac{2}{9\infty^{\frac{11}{3}}}$ (1134), $-\frac{3}{16\infty^{\frac{15}{4}}}$ (1140), c'est-à-dire, en général $-\frac{n-1}{nn \times \infty^{\frac{4n-1}{n}}}$. D'où il suit que plus n est grand, plus la courbure nulle de l'extrémité approche d'être $= \frac{1}{n \times \infty^{4}}$, que par conséquent la courbure en est d'autant plus nulle, & ces Paraboles lignes droites dans une plus grande étendue finie, ou plus paralleles, ce qui revient à l'art. 970.

Comparaison des courbures des 1res Paraboles à leur extrémité, où elles sont aussi toujours nulles.

EXEMPLE IX.

1143. Soit la 2de & derniere Parabole cubique $ax^2 = y^3$. $dy = \frac{2axdx}{3y^2}$. $ddy = \frac{-2adx^2}{9y^2+4ay}$. $\frac{dsddy}{dx} = \frac{-2adsdx}{9y^2+4ay}$.

Courbure de la 2de & derniere Parabole du 3me degré.

1144. A l'origine, où $y = dy = ds = \frac{1}{\infty}$, & $dx = ddx$, on a $\frac{-2adsdx}{9y^2+4ay} = \frac{-2adsddx}{4ady} = \frac{-ddx}{2}$. Mais il faut voir ce que vaut ce ddx.

1145. On a par-tout, en négligeant les coëfficiens, $dy.dx :: x.y^2$, & à l'origine où $x = dx$, parce qu'il n'y a point d'autre x que dx, & où $dx = ddx$ à cause de la perpendicularité, on a $dy.ddx :: ddx.dy^2$. Donc $ddx^2 = dy^3 = \frac{1}{\infty^3}$. Donc $ddx = \frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$.

1146. $\frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}} = ddx$ est d'un ordre radical au-dessous de

$\frac{1}{\infty^{\frac{2}{2}}} = \frac{1}{\infty} = dy$, ce qui suffit pour la perpendicularité; car ce *ddx* eſt toujours nul par rapport à *dy*. Mais en même-temps *ddx* eſt la meſure du 1[er] angle de contingence (1123), ou l'arc circulaire qui le meſure, & cet arc, dans la courbure ordinaire ou finie, eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty^{\frac{4}{2}}}$. Or ici il n'eſt que $\frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$. Donc il eſt d'un ordre radical au-deſſus de $\frac{1}{\infty^2}$, donc infiniment plus grand.

Il eſt vrai que $\frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$ eſt du 2[d] ordre potentiel par rapport au Fini: mais il eſt toujours en lui-même infiniment plus grand que $\frac{1}{\infty^2}$, & cela doit avoir un effet. Donc il faut concevoir le 1[er] angle de contingence de cette Parabole infiniment plus grand que ne feront les angles de contingence ſuivans.

Infinie à ſon origine. 1147. Et comme dès que les angles de contingence s'élevent plus haut qu'ils ne peuvent aller dans une Courbe, on doit rejetter en ſens contraire ſur les côtés de la Courbe ce qui leur auroit appartenu: il faut concevoir le 1[er] côté de cette Parabole comme nul, non abſolument, mais dans le rapport de $\frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$ à $\frac{1}{\infty}$, qui ſera la grandeur de tous les autres côtés exiſtans & conſtans, & après ce 1[er] côté de l'ordre de $\frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$, il ſe fera un angle de contingence, dont le Sinus ſera à l'ordinaire de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, & par conſéquent il ſe fera un détour ordinaire après un pas infiniment plus petit que ne feront tous les ſuivans, d'où s'enſuivra à l'origine une courbure infinie de la même maniere que ſi le 1[er] angle de contingence y avoit été infiniment plus grand que par-tout ailleurs.

1148. La 2[de] Parabole cubique a un rebrouſſement à

ſon origine, comme l'on verra ſelon l'art. 940. Mais ſelon le raiſonnement de l'art. 1150. Ce n'eſt point ce rebrouſſement que nous conſidérons ici, & ce n'eſt point lui qui rend la courbure infinie: elle ne l'eſt que parce que le 1[er] côté de la Courbe eſt infiniment petit par rapport aux autres. Mais parce qu'il l'eſt, & que l'autre poſé contre lui, & qui fait le rebrouſſement, lui eſt égal, ce rebrouſſement eſt accompagné d'une courbure infinie (911).

1149. Si $y = a$, d'où ſuit $x = a$, on a $\frac{-2adsdx}{9y^2+4ay} = \frac{-2dsdx}{13a}$. Et ſi $y = 2a$, d'où ſuit $x = a\sqrt{8}$, on a $\frac{-2adsdx}{9y^2+4ay} = \frac{-dsdx}{22a}$.

1150. Pour comparer $\frac{-2dsdx}{13a}$ & $\frac{-dsdx}{22a}$, ou ſelon l'art. 1132, $\frac{2Dx}{13}$ & $\frac{dx}{22}$, on a dans la ſuppoſition de $y = a = x$, $dy = \frac{2axDx}{3y^2} = \frac{2Dx}{3}$. Donc $dy^2 = \frac{4Dx^2}{9}$. $dy^2 + Dx^2 = \frac{13Dx^2}{9} = ds^2$. Donc $ds = \frac{Dx\sqrt{13}}{3}$, & $Dx = \frac{3ds}{\sqrt{13}}$. Et dans la ſuppoſition de $y = 2a$, on a $dy = \frac{dx\sqrt{8}}{6}$, $dy^2 = \frac{8dx^2}{36} = \frac{2dx^2}{9}$. $dy^2 + dx^2 = \frac{11dx^2}{9} = ds^2$. Donc $ds = \frac{dx\sqrt{11}}{3}$, & $dx = \frac{3ds}{\sqrt{11}}$. Donc la courbure du point où $y = a$ eſt à celle du point où $y = 2a :: 44\sqrt{11}. 13\sqrt{13}$, c'eſt-à-dire, que la courbure du point plus proche de l'origine eſt plus que triple de l'autre.

1151. A l'extrémité de cette Parabole $\frac{-2adsdx}{9y^2+4ay} = \frac{-2adsdx}{9\infty^{\frac{4}{3}}}$, car y infinie eſt $= \infty^{\frac{2}{3}}$. D'ailleurs à cauſe du parallélisme $dx = ds = \frac{1}{\infty}$. Donc la courbure, en négligeant *Nulle à l'extrémité.*

les coëfficiens, eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ diviſé par $\infty^{\frac{4}{3}}$, c'eſt-à-dire, de l'ordre de $\frac{1}{\infty^{\frac{10}{3}}}$. Donc elle eſt nulle, & paſſe le 3me ordre d'Infiniment petit ſans aller juſqu'au 4me, dont elle differe de deux ordres radicaux.

EXEMPLE X.

Courbure de la 2de & derniere Parabole du 4me degré, pareillement infinie à l'origine, & nulle à l'extrémité.

1152. Soit la 2de & derniere Parabole du 4me degré $ax^3 = y^4$. $dy = \frac{3ax^2dx}{4y^3}$. $ddy = \frac{-3axdx^2}{16y^3+9axy}$. $\frac{dsddy}{dx} = \frac{-3axdsdx}{16y^3+9axy}$.

1153. A l'origine de cette Parabole, où $y = dy = ds = \frac{1}{\infty}$, & $dx = ddx$, on a $\frac{-3axdsdx}{16y^3+9axy} = \frac{-dsdx}{3dy} = \frac{-ddx}{3}$. Et l'on trouvera, comme dans l'art. 1145, que ddx^3 eſt $= dy^4$. Donc $ddx = dy^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{\infty^{\frac{4}{3}}}$, c'eſt-à-dire, de cet ordre.

1154. Donc ſelon les art. 1146, 1147, la courbure de cette Parabole à ſon origine eſt infinie.

1155. A l'extrémité, où $y = \infty^{\frac{3}{4}}$, & $x = \infty$, on a $\frac{-3axdsdx}{16y^3+9axy} = \frac{-3a\infty \times dsdx}{16\infty^{\frac{9}{4}}}$, & pour l'ordre $= \frac{1}{\infty}$ diviſé par $\infty^{\frac{9}{4}} = \frac{1}{\infty \times \infty^{\frac{9}{4}}} = \frac{1}{\infty^{\frac{13}{4}}}$. Donc la courbure eſt nulle, & elle tombe d'un ordre radical au-deſſous de $\frac{1}{\infty^3}$, & ne va pas juſqu'à $\frac{1}{\infty^4}$.

Courbures infinies des dernieres Paraboles de chaque degré à leur origine.

1156. Le ddx de la 2de Parabole cubique à ſon origine eſt $= \frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$ (1145), & en lui rendant ſes coëfficiens, parce que $3dy^3 = 2ddx^2$ (1143 & 1144), il eſt $= \frac{\sqrt[2]{3}}{\sqrt[2]{2} \times \infty^{\frac{3}{2}}}$. Et de plus, parce que la meſure de la courbure de cette

Parabole à son origine est, non pas ddx, mais $\frac{ddx}{2}$ (1144), il est, entant qu'il mesure cette courbure, $= \frac{\sqrt[2]{3}}{2\sqrt[2]{2} \times \infty^{\frac{3}{2}}}$. De même le ddx qui mesure la courbure de la 2de Parabole du 4me degré à son origine est, en lui rendant ses coëfficiens, $= \frac{\sqrt[3]{4}}{3\sqrt[3]{3} \times \infty^{\frac{4}{3}}}$. D'où l'on voit qu'en général le ddx qui mesurera la courbure de chaque derniere Parabole d'un degré quelconque n à son origine, sera $\frac{\sqrt[n-1]{n}}{\overline{n-1} \times \sqrt[n-1]{\overline{n-1}} \times \infty^{\frac{n}{n-1}}}$.

1157. Donc la courbure de chaque derniere Parabole à son origine sera toujours infinie, car $\infty^{\frac{n}{n-1}}$ ne peut jamais être $= \infty^2$.

1158. De plus, cette courbure infinie sera d'autant plus grande que le degré n sera plus grand; car $\frac{n}{n-1}$ en approchera d'autant plus d'être $= 1$, auquel cas l'angle de contingence seroit fini, ou le 1er côté de la Courbe de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$. Mais comme n ne peut jamais être $= \infty$, ce qui seul rendroit $\frac{n}{n-1} = 1$, le 1er côté de la Courbe ne peut jamais être de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, seulement il en approche toujours de plus en plus par les ordres radicaux intermédiaires. *Et leurs rapports.*

1159. Pour avoir l'expression du ddx de l'origine des Paraboles moyennes dans les degrés qui en ont, il ne faut que comparer les ddx de l'origine des deux Paraboles extremes. Par exemple, dans le 5me degré le ddx de la 1re Parabole est $\frac{20}{\infty^5}$ (1139), & celui de la derniere est $\frac{\sqrt[4]{5}}{4\sqrt[4]{4} \times \infty^{\frac{5}{4}}}$ (1156). Or il est aisé de voir que $\frac{20}{\infty^5}$ est $= \frac{4\sqrt[1]{5}}{1\sqrt[1]{1} \times \infty^{\frac{5}{1}}}$ *Courbures des Paraboles moyennes à leur origine.*

& que $\frac{\sqrt[4]{5}}{4\sqrt[4]{4}\times\infty^{\frac{5}{4}}} = \frac{1\sqrt[4]{5}}{4\sqrt[4]{4}\times\infty^{\frac{5}{4}}}$.

Donc dans le numérateur de ces fractions, $\sqrt[1]{5}$ est devenu de la 1[re] Parabole à la derniere $\sqrt[4]{5}$, & le coëfficient 4 est devenu 1, ce qui marque que dans les fractions intermédiaires les numérateurs ont été $3\sqrt[2]{5}$, & $2\sqrt[3]{5}$. On trouvera de même que les dénominateurs ont été $2\sqrt[2]{2}\times\infty^{\frac{5}{2}}$ & $3\sqrt[3]{3}\times\infty^{\frac{5}{3}}$. Par conséquent les *ddx* de toutes les Paraboles du 5[me] degré arrangés de suite, sont $\frac{4\sqrt[1]{5}}{1\sqrt[1]{1}\times\infty^{\frac{5}{1}}}$. $\frac{3\sqrt[2]{5}}{2\sqrt[2]{2}\times\infty^{\frac{5}{2}}}$. $\frac{2\sqrt[3]{5}}{3\sqrt[3]{3}\times\infty^{\frac{5}{3}}}$. $\frac{1\sqrt[4]{5}}{4\sqrt[4]{4}\times\infty^{\frac{5}{4}}}$. D'où il seroit aisé de tirer l'expression générale des *ddx* de l'origine de toutes les Paraboles d'un degré quelconque.

1160. Mais ce qu'il y a de plus important à remarquer, c'est que les dénominateurs de ces fractions ayant toujours ∞, dont l'exposant est n, degré de la Parabole, divisé par tous les nombres naturels depuis 1 jusqu'à $n - 1$, tant que le quotient de la division est plus grand que 2, la courbure des Paraboles à leur origine est nulle, qu'elle est finie quand ce quotient est $= 2$, & infinie quand il est moindre que 2.

Cela embrasse en général ce que M. de l'Hopital a avancé sans démonstration (*p.* 86 *&* 87) sur la courbure de quelques Paraboles particulieres à leur origine.

1161. S'il étoit resté quelque scrupule sur ce que nous avons établi pour marque d'une courbure infinie *ddx*, lorsqu'il est seulement de quelque ordre radical au-dessus de $\frac{1}{\infty^2}$ ce scrupule seroit levé par l'analogie de la courbure des différentes Paraboles d'un même degré, trouvée dans l'art. précédent. Car à compter de la 1[re] Parabole, la courbure de

l'origine étant nulle, & toujours d'un ordre moins bas jusqu'à une certaine Parabole moyenne, & ensuite finie, si le degré de la Parabole le permet, ce qui est très-certain, il faut après cela que la courbure devienne infinie, & toujours plus infinie.

1162. Les courbures des extrémités des dernieres Paraboles de chaque degré étant avec les coëfficiens $\frac{1}{4\infty^{\frac{7}{2}}}$ (1096), $\frac{2}{9\infty^{\frac{10}{3}}}$ (1151), $\frac{3}{16\infty^{\frac{13}{4}}}$ (1155), on voit qu'en général la courbure de l'extrémité d'une derniere Parabole sera $\frac{n-1}{nn\infty^{\frac{3n+1}{n}}}$.

1163. D'un autre côté la courbure des extrémités des 1res Paraboles étant (1142) $\frac{n-1}{nn\infty^{\frac{4n-1}{n}}}$, il est aisé de voir que dans chaque degré la courbure de la 1re Parabole à son extrémité qui sera $\frac{n-1}{nn\infty^{\frac{4n-1}{n}}}$, ne différera de celle de la derniere $\frac{n-1}{nn\infty^{\frac{3n+1}{n}}}$ que par les numérateurs de l'exposant de ∞, & que quand il y aura des Paraboles moyennes, les numérateurs des exposans de leur ∞ seront les nombres naturels moyens entre $4n-1$, & $3n+1$.

Courbures nulles des Paraboles à leur extrémité, & leurs rapports.

Par ex. dans le 5me degré, les courbures des extrémités des quatre Paraboles seront $\frac{4}{25\infty^{\frac{19}{5}}}$. $\frac{4}{25\infty^{\frac{18}{5}}}$. $\frac{4}{25\infty^{\frac{17}{5}}}$. $\frac{4}{25\infty^{\frac{16}{5}}}$.

Les conséquences sont aisées à tirer pour ce degré & pour tous les autres.

EXEMPLE XI.

1164. Dans la Courbe de l'art. 1059, on aura, les ds étant constans, $ddy = \frac{-6\,\overline{x-a}^{\,-\frac{7}{5}}dx^2}{9\,\overline{x-a}^{\,-\frac{4}{5}}+25}$ & $\frac{ds\,ddy}{dx} =$

Courbure de la Courbe de l'art. 1059.

$$\frac{-6\,\overline{x-a}^{-\frac{7}{5}}\,ds\,dx}{9\,\overline{x-a}^{-\frac{4}{5}}+25}.$$

1165. On a par-tout dans cette Courbe, $dy.\ dx :: 3\,\overline{x-a}^{-\frac{2}{5}}.\ 5$. Donc au point où se fait l'inflexion, & où la courbure est infinie, x étant $= a$, ou $x - a = \frac{1}{\infty}$, & $\overline{x-a}^{-\frac{2}{5}} = \infty^{\frac{2}{5}}$ (1059), on a dans ce point $dy.\ dx :: 3\,\infty^{\frac{2}{5}}.\ 5$. Donc la Courbe y est perpendiculaire, & l'inflexion s'y fait par un côté perpendiculaire. Donc alors $dy = ds$, & dx tombe au-dessous de dy.

1166. Pour avoir la valeur de ce dx, il faut prendre $ds = \frac{1}{\infty}$, puisqu'il est constant, & faire cette analogie. $3\infty^{\frac{2}{5}} .\ 5 :: \frac{1}{\infty} .\ \frac{5}{3\,\infty \times \infty^{\frac{2}{5}}} = \frac{5}{3\,\infty^{\frac{7}{5}}}$. Donc $dx = \frac{5}{3\,\infty^{\frac{7}{5}}}$.

1167. Donc en ce point où $x = a$, le numérateur de l'expression de la courbure est $-6\,\infty^{\frac{7}{5}} \times \frac{1}{\infty} \times \frac{5}{3\,\infty^{\frac{7}{5}}} = \frac{-10}{\infty}$. Et le dénominateur est $9\,\infty^{\frac{4}{5}}$. Donc la courbure est $\frac{-10}{\infty \times 9\,\infty^{\frac{4}{5}}} = \frac{-10}{9\,\infty^{\frac{9}{5}}}$, d'un ordre radical au-dessus de $\frac{1}{\infty^{\frac{10}{5}}} = \frac{1}{\infty^2}$, donc elle est infinie, ainsi qu'on l'a trouvée par le Rayon de la Développée infiniment petit (1059).

1168. Et l'on peut remarquer la correspondance des deux méthodes, dont la 1re mesure la courbure par le Rayon de la Développée, & la 2de par le Sinus de l'angle de contingence. Dans la 1re la courbure étant finie tant que le Rayon est fini, ou de l'ordre de 1, elle devient infinie, quand ce Rayon tombe dans un ordre quelconque au-dessous de 1, potentiel ou radical. Dans la 2de, la courbure étant finie tant que le Sinus est de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, elle devient infinie, quand

ce

ce Sinus s'éleve d'un ordre quelconque au dessus de $\frac{1}{\infty^2}$. Selon la 1[re], le Rayon est tombé dans le 1[er] ordre potentiel compris entre 1 & $\frac{1}{\infty}$, puisqu'il a été $\frac{3}{2\infty^{\frac{3}{5}}}$ (1059), & selon la 2[de], le Sinus s'est élevé dans le 1[er] ordre potentiel compris entre $\frac{1}{\infty^2}$ & $\frac{1}{\infty}$, puisqu'il est $\frac{-10}{9\infty^{\frac{9}{5}}}$. Toutes deux ne donnent qu'un Infini de courbure d'un ordre radical pur.

1169. Si $x = \frac{1}{\infty}$, on a $dy \,.\, dx :: -3a^{-\frac{2}{5}} \,.\, 5$, $:: \frac{-3}{a^{\frac{2}{5}}} \,.\, 5$, ce qui fait voir que le rapport de dy à dx étant fini en ce point, la Courbe y est oblique à son axe. Donc alors dx, dy, & ds, sont chacun de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$.

1170. La courbure de ce point est $\frac{-6 \times -a^{-\frac{7}{5}} \times ds\,dx}{9 \times -a^{-\frac{4}{5}} + 25}$. Le numérateur est $6a^{-\frac{7}{5}} \times \frac{1}{\infty^2}$ (1169) $= \frac{6}{a^{\frac{7}{5}}\infty^2}$. Le dénominateur est $-9a^{-\frac{4}{5}} + 25 = \frac{-9 + 25a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{4}{5}}}$. Donc la courbure est $\frac{6a^{\frac{4}{5}}}{-9a^{\frac{7}{5}} + 25a^{\frac{11}{5}} \times \infty^2} = \frac{6}{-9a^{\frac{3}{5}} + 25a^{\frac{7}{5}} \times \infty^2}$, courbure finie.

1171. Si $x = \infty$, on a $dy \,.\, dx :: 3\infty^{-\frac{2}{5}} \,.\, 5$, $:: \frac{3}{\infty^{\frac{2}{5}}} \,.\, 5$. Donc la Courbe à l'extrémité de son cours est parallele à son axe, & $ds = dx$.

1172. La courbure de ce point est $\frac{-6\infty^{-\frac{7}{5}} ds\,dx}{9\infty^{-\frac{4}{5}} + 25}$. Le numérateur est $\frac{-6}{\infty^{\frac{7}{5}} \times \infty^2} = \frac{-6}{\infty^{\frac{17}{5}}}$. Le dénominateur est

$\frac{9}{\infty^{\frac{4}{5}}} + 25 = 25$. Donc la courbure eſt $\frac{-6}{25\infty^{\frac{17}{5}}}$, courbure nulle, & qui eſt de plus d'un ordre potentiel au deſſous de $\frac{1}{\infty^2}$.

1173. Cette Courbe commence par être oblique à ſon axe, & là elle a une courbure finie (1169 & 1170), enſuite ſa courbure eſt croiſſante, puiſqu'elle doit devenir infinie au point où $x = a$ (1167), en même temps la Courbe arrive à une inflexion perpendiculaire (1165), donc les dy ont été croiſſans depuis l'origine auſſi-bien que les y, donc la Courbe a été convexe vers ſon axe. Auſſi le Sinus de l'angle de contingence eſt-il poſitif à l'origine ſelon l'art. 1070, car il eſt viſible que $-9a^{\frac{3}{5}} + 25a^{\frac{7}{5}}$ ne peut être qu'une grandeur poſitive. Donc dans l'inflexion la Courbe paſſe de la convexité à la concavité, & par cette raiſon le Sinus devient négatif en ce point (1167), après quoi il l'eſt toujours, tandis que la Courbe concave vers ſon axe va de la perpendicularité au paralléliſme par un cours infini (1171 & 1172).

EXEMPLE XII.

Courbure de la Courbe de l'art. 962.

1174. Soit la Courbe de l'art. 962, où dy étant $= \frac{2a^3xdx}{\overline{x^2+a^2}^2}$, on a $\frac{ds\,ddy}{dx} = \frac{\overline{2a^7 - 6a^3x^4 - 4a^5x^2} \times \overline{ds\,dx}}{x^8 + 4a^2x^6 + 6a^4x^4 + 8a^6x^2 + a^8}$.

1175. Cette Courbe ayant à ſon origine $x = dx$, & de plus étant parallele, ce qui rend $dx = ds = \frac{1}{\infty}$, la Formule de ſa courbure pour ce point ſe réduit à $\frac{\overline{2a^7} \times \overline{ds\,dx}}{a^8} = \frac{2\,ds\,dx}{a} = \frac{2}{a \times \infty^2}$, courbure ordinaire & finie.

1176. M. de l'Hopital a démontré (*p.* 64) que cette Courbe a une inflexion au point où $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Et en effet, ſi dans le numérateur de la Formule de ſa courbure on met, au lieu de x^4 & de x^2, les puiſſances 4 & 2 de $\frac{a}{\sqrt{3}}$, on aura

ce numérateur $=$ o, ce qui fait voir que la courbure eſt alors abſolument nulle, or elle le peut devenir dans l'inflexion.

De-là il ſuit que tant que x eſt moindre que $\frac{a}{\sqrt{3}}$, la Formule de la courbure ou le Sinus de l'angle de contingence eſt poſitif, & au contraire négatif, quand x eſt plus grand que $\frac{a}{\sqrt{3}}$; & en effet, dans le 1[er] cas la Courbe eſt convexe vers ſon axe, & concave dans le 2[d], ce qui confirme ce que nous avons déja remarqué ſur le ſigne dont eſt affecté le Sinus de l'angle de contingence.

1177. Si $x = \infty$, la Formule ſe réduit à $\frac{-6a^3 \infty^4 dsdx}{\infty^8}$ $= \frac{-6a^3 dsdx}{\infty^4}$. Or la Courbe étant parallele à ſon extrémité auſſi-bien qu'à ſon origine, & par conſéquent $dsdx = \frac{1}{\infty^2}$, la courbure de l'extrémité eſt $\frac{6a^3}{\infty^2}$ diviſé par ∞^4, ou $\frac{6a^3}{\infty^6}$. Donc la courbure eſt du 6[me] ordre d'Infiniment petit, ou de quatre ordres au deſſous de la courbure ordinaire & finie.

1178. Puiſque la courbure eſt nulle au point où $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, & nulle à l'extrémité, il faut qu'entre ces deux points il y ait un *plus grand* de courbure, ou Terme arbitraire.

1179. Si l'Hyperbole, dont la courbure à ſon extrémité n'eſt que de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$ (1105 & 1106), eſt ligne droite dans une étendue infinie, & a une Aſymptote, à plus forte raiſon cela appartiendra-t'il à cette Courbe, dont la courbure à ſon extrémité eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty^6}$. En effet, on ſait d'ailleurs qu'elle a une Aſymptote (962).

1180. Ces Courbes, qui ne ſont courbes que vers leur origine dans une étendue finie indéterminable, & deviennent lignes droites vers leur extrémité dans des étendues infinies, ne le deviennent pas exactement, comme nous l'avons dit tant de fois. Elles ſont alors parfaitement dans le cas des art. 732, 733, 734.

Quelles Courbes le deviennent droites dans des étendues infinies.

1181. Par l'exemple de l'Hyperbole & de cette derniere Courbe, on voit assez que les Courbes dont le Sinus de l'angle de contingence est de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$, & au dessous, deviennent, non exactement, mais sensiblement droites dans des étendues infinies, & ont des Asymptotes.

Quelles Courbes le deviennent dans des étendues finies.

1182. D'un autre côté la Logarithmique, dont le Sinus de la courbure est de l'ordre de $\frac{1}{\infty^4}$ complet, est ligne droite dans une étendue finie (1110), & n'a point d'Asymptote de ce côté-là, d'où il suit que toutes les Paraboles dont le Sinus de la courbure à leur extrémité est de l'ordre de $\frac{1}{\infty^4}$ incomplet, ou dont tous ces Sinus sont compris entre $\frac{1}{\infty^3}$ & $\frac{1}{\infty^4}$ (1162 & 1163), seront aussi lignes droites dans des étendues finies: aussi n'ont-elles point d'Asymptote. Telle est encore la Courbe de l'art. 1164.

1184. Toutes ces Courbes, qui à leur extrémité sont lignes droites dans des étendues finies ou infinies, ne sont pas pour cela dans toutes ces étendues, ou paralleles, ou perpendiculaires, ou obliques à leur axe, comme seroient des lignes droites exactes. La raison en est qu'elles ne sont pas lignes droites exactes, & qu'elles varient encore de direction, quoiqu'infiniment moins qu'elles ne faisoient, lorsqu'elles étoient finiment & sensiblement courbes vers leur origine. De-là il suit qu'elles n'arrivent à leur position *finale* à l'égard de l'axe, qu'après une certaine étendue de leur rectitude imparfaite.

1185. Puisqu'il y a des Courbes qui deviennent lignes droites dans des étendues finies, & d'autres dans des étendues infinies, il faut qu'il y en ait qui ne le deviennent que dans des étendues infiniment petites. On l'a déja vû par celles qui ont deux côtés du 1[er] ordre posés bout à bout en ligne droite, ainsi qu'il arrive ordinairement dans l'inflexion; mais de plus il doit être possible que cela arrive aussi à l'extrémité du cours infini d'une Courbe, & alors il peut y avoir aussi plus de deux côtés posés bout à bout en ligne droite.

1186. L'analogie demande encore plus. Puiſqu'il y a des Courbes qui ne le ſont que dans des étendues finies indéterminables, & deviennent enſuite lignes droites dans des étendues infinies, & d'autres qui ſont Courbes dans des étendues infinies, & lignes droites ſeulement dans des étendues finies, il faut qu'il y en ait de moyennes qui ſeront courbes dans des étendues infinies, & droites dans des étendues infinies.

Quelles Courbes peuvent être Courbes dans des étendues infinies, & devenir droites dans des étendues infinies.

1187. Puiſque les Courbes, dont le Sinus de la courbure de l'extrémité eſt compris entre $\frac{1}{\infty^3}$ & $\frac{1}{\infty^4}$ incluſivement, ſont courbes dans des étendues infinies, & droites ſeulement dans des étendues finies, & que celles dont le Sinus de la courbure eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty^5}$ & au deſſous, ſont courbes dans des étendues finies indéterminables, & droites dans des étendues infinies, on peut juger que celles qui ſeront courbes dans des étendues infinies, & droites dans des étendues infinies, auront le Sinus de leur courbure compris entre $\frac{1}{\infty^4}$ & $\frac{1}{\infty^5}$. Elles n'auront point d'Aſymptote.

1188. Et pour achever la diſtribution des différentes eſpeces de Courbes à cet égard, celles dont le Sinus de la courbure ne ſera qu'entre $\frac{1}{\infty^2}$ & $\frac{1}{\infty^3}$ ne ſeront droites à leur extrémité que dans des étendues infiniment petites.

1189. Le plus ou le moins d'étendue quelconque dans laquelle une Courbe ſera droite, dépendra de ce que le Sinus de ſa courbure ſera plus ou moins bas dans l'ordre qui changera la Courbe en droite.

Conformité de la Théorie précédente de la courbure avec celle des Rayons des Développées.

1190. Il eſt très-aiſé de ramener à cette Théorie de la courbure celle des Rayons des Développées, que je ſuppoſe connue, & même d'en éclaircir quelques obſcurités par les principes qui ont été établis.

J'appelle *Développante*, la Courbe engendrée par le développement de celle qu'on appelle Développée.

Les Rayons de la Développée ſont des perpendiculaires tirées ſur les extrémités de chaque côté de la Développante du côté de ſa concavité, & les diſtances où concourent deux

de ces perpendiculaires consécutives quelconques, déterminent les longueurs des Rayons de la Développée pour les points ou côtés correspondans de la Développante.

1191. Soit un côté de la Développante $= \frac{1}{\infty}$. Si je tire deux perpendiculaires sur ses deux extrémités, elles y seront encore perpendiculaires ou paralleles entr'elles, quoique je les conçoive concourantes à une distance finie, car l'angle qu'elles feront entr'elles sera infiniment petit à cause de la base $= \frac{1}{\infty}$. Donc je puis concevoir le Rayon de la Développée comme ayant une longueur finie.

1192. Mais si le côté de la Développante ou la base de l'angle infiniment petit des deux perpendiculaires est $= \frac{1}{\infty^2}$, les deux perpendiculaires concourront à une distance infiniment petite du 1er ordre (708). Donc le Rayon de la Développée sera infiniment plus petit qu'il n'étoit dans le cas précédent.

1193. Et comme la Théorie des Développées demande que l'on conçoive toujours les perpendiculaires à la Développante comme concourantes, le Rayon de la Développée est fini dans le 1er cas, & dans le 2^{d}, infiniment petit.

1194. Or dans notre Théorie de la courbure, quand le côté d'une Courbe est $= \frac{1}{\infty^2}$, la courbure est infinie, donc quand la courbure est infinie, le Rayon de la Développée est infiniment petit.

Cette conclusion, qui est une proposition de la Théorie des Développées, ne seroit peut-être pas trop claire en elle-même, ou d'une vérité trop évidente, si on ne la fondoit sur le côté $= \frac{1}{\infty^2}$, qui en est la véritable cause, & qui ne paroît pourtant point dans la Théorie ordinaire.

1195. On voit aussi par-là une autre chose démontrée dans cette Théorie, & peu évidente par elle même. Une infinité de Développantes, la Parabole par ex. ne peuvent être engendrées que par une Développée dont l'origine soit à une certaine distance finie de celle de la Développante, ou, ce

qui eſt la même choſe, il a fallu, pour produire la Développante, laiſſer à la Développée un bout de fil fini qui allât au de-là de ſon origine, au lieu que pour d'autres Développantes la Développée n'a pas beſoin de cet excédent de fil, ce qui paroît plus naturel, & devroit vraiſemblablement appartenir à toutes les Courbes.

Cela vient de ce que quand le 1er côté de la Développante eſt $= \frac{1}{\infty}$, il eſt impoſſible que les deux perpendiculaires concourrent plutôt qu'à une diſtance finie, au lieu que quand ce 1er côté eſt $= \frac{1}{\infty^2}$, elles concourent à une diſtance infiniment petite.

1196. De-là vient auſſi que quand le 1er côté eſt $= \frac{1}{\infty}$, le Rayon de la Développée, ou l'excédent de fil qu'il a fallu laiſſer à la Développée, a toujours rapport au parametre de la Développante, ou eſt plus ou moins grand, ſelon que ce parametre l'eſt. Car c'eſt ce parametre qui regle la grandeur abſolue des côtés d'une Courbe, & par conſéquent celle du 1er côté $= \frac{1}{\infty}$, qui eſt la baſe de l'angle infiniment petit des deux perpendiculaires. Or plus cette baſe ſera grande, plus les deux perpendiculaires concourront loin, & au contraire. On en voit un exemple dans la Parabole, p. 80 & ſuiv. des *Inf. petits.*

1197. Si on conçoit deux côtés du 1er ordre poſés bout à bout en ligne droite, il eſt certain que toutes les perpendiculaires tirées ſur ces deux côtés doivent être paralleles, de quelque maniere qu'elles le ſoient. Si on conçoit celles d'un de ces côtés concourantes à une diſtance finie, le point de leur concours répondra au milieu de ce côté. Il en ira de même des deux perpendiculaires tirées ſur le 2d côté, dont le milieu répondra à leur point de concours. Donc il y aura quatre perpendiculaires qui, priſes deux à deux, auront des points de concours différens. Donc les deux 1res perpendiculaires pourront être conçues comme paralleles entr'elles, & de même les deux dernieres entr'elles, mais non pas toutes

les quatre entr'elles, ce qui devroit pourtant être. Donc ce n'eſt pas là comme il faut concevoir le parallélisme des perpendiculaires dans le cas préſent. Donc il ne reſte qu'une maniere, qui eſt de les concevoir exactement paralleles, moyennant quoi il n'y en a plus que trois.

1198. Donc ces trois perpendiculaires exactement paralleles ſont infinies, ou, comme elles n'en ſont qu'une à cauſe de leur proximité infinie, c'eſt un Rayon de la Développée infini, dans le cas où la courbure eſt nulle.

1199. Donc le Rayon de la Développée infiniment petit, répondant à la courbure infinie, & le Rayon de la Développée infini à la courbure nulle, il eſt aiſé de voir que des Rayons de la Développée finis répondront aux courbures finies, & de plus ſeront en raiſon renverſée de ces courbures, ou ces courbures en raiſon renverſée des Rayons.

Fin de la premiere Partie.

ELEMENS



ELEMENS DE LA GEOMETRIE DE L'INFINI.

SECONDE PARTIE.

DIFFERENTES APPLICATIONS *OU* REMARQUES.

SECTION PREMIERE.

De l'exactitude du Calcul de l'Infini.

LE grand principe & le plus fécond du Calcul de l'Infini eſt de faire diſparoître toutes les grandeurs d'ordres inférieurs devant celles qui ſont d'un ordre ſupérieur. Cette méthode laiſſe toujours quelque ombre de difficulté dans l'eſprit ; on croit bien que les grandeurs que l'on ne compte point, on les néglige ſans erreur ſenſible, mais enfin n'y eût-il qu'une erreur infiniment petite, on ſoupçonne qu'il y en a, & on croit paſſer à la nouvelle Géométrie une ſorte de licence. C'eſt ce que je vais examiner.

L'exactitude demande que les grandeurs, qu'on néglige dans le Calcul de l'Infini, soient négligées comme elles le sont.

1200. Soit un Triangle rectangle isoscele, dont la hauteur & la base soient chacune, par ex. $= 4$, l'aire sera la moitié du quarré de 4, c'est-à-dire 8.

Je puis prendre cette aire autrement. Je divise la hauteur 4 en quatre parties égales, & par chaque point de division je mene des paralleles à la base, que j'appelle autant de bases. Elles croissent comme les nombres naturels 1, 2, 3, 4. De plus par l'extrémité où chaque base rencontre l'hypotenuse, je tire une perpendiculaire sur la base suivante, & je vois que l'aire du triangle est exactement remplie par trois parallélogrammes rectangles, & quatre petits triangles rectangles isosceles. Les parallélogrammes sont formés des bases 1, 2, 3, multipliées chacune par la hauteur 1, & par conséquent leur somme est celle des trois premiers nombres naturels, qui est $\frac{3^2+3}{2} = 6$. Les triangles sont chacun $= \frac{1}{2}$, ce qu'il est très-aisé de voir, & il y en a quatre. Donc leur somme est $\frac{1}{2} \times 4 = 2$. La somme totale qui fait l'aire du triangle est $6 + 2 = 8$. Les deux méthodes pour trouver l'aire, sont donc toutes deux exactes, & le sont également.

En général n étant dans la 2de méthode le nombre des divisions de la hauteur du triangle, ou celui de ses bases, on aura pour la somme des parallélogrammes $\frac{\overline{n-1}^2 + \overline{n-1}}{2}$, & pour celle des petits triangles $\frac{n}{2}$, & pour l'aire totale $\frac{\overline{n-1}^2 + \overline{n-1}}{2} + \frac{n}{2}$, que je laisse exprès sous cette forme, parce que la 1re partie de cette grandeur complexe appartient aux parallélogrammes seuls, & la 2de aux petits triangles seuls.

1201. Si ce triangle fini, qu'on vient de considérer, est conçu prolongé à l'infini, de sorte que sa hauteur & sa base soient chacune $= \infty$, il est certain que par la 1re méthode son aire $\frac{\infty^2}{2}$ est parfaitement exacte. Si on y applique la 2de, en y concevant à l'infini les parallélogrammes & les petits triangles, dont on a déja vu les premiers dans le Fini, l'aire

ſera $\frac{\overline{\infty - 1}^2 + \overline{\infty - 1}}{2} + \frac{\infty}{2}$. Or pour être exacte, il faut qu'elle ſoit $= \frac{\infty^2}{2}$, ce qui ne ſe peut, à moins que dans l'expreſſion de l'aire par la 2de méthode, on ne néglige 1° -1 devant ∞^2 & ∞, 2° $\frac{\infty}{2}$ dans la 1re partie de la grandeur complexe, 3° encore $\frac{\infty}{2}$ dans la 2de. Il eſt donc vrai que loin que ce ſoit une eſpece de licence, & une inexactitude de négliger les grandeurs d'un ordre inférieur devant une grandeur d'un ordre ſupérieur, cela eſt abſolument néceſſaire pour la parfaite exactitude, du moins en cette occaſion.

1202. Il ſera bon d'examiner plus particulierement pourquoi l'exactitude demande que les grandeurs négligées le ſoient. Les parallélogrammes qui entrent dans le Triangle infini, & dont la ſomme eſt celle de la Suite naturelle, ont pour ſomme entiere $\frac{\infty^2 + \infty}{2}$, car j'y néglige déja le -1, qui ne peut pas faire de difficulté, il n'y en peut avoir que ſur $\frac{\infty}{2}$ négligé. La Formule de la ſomme des nombres naturels étant $\frac{nn + n}{2}$, il eſt néceſſaire que $\frac{n}{2}$ ſoit toujours d'autant moindre par rapport à $\frac{nn}{2}$ que n eſt un plus grand nombre, & la ſomme ne peut avoir le caractere d'être pouſſée à l'infini, que quand n n'eſt rien par rapport à nn, ſans quoi elle feroit parfaitement de la même condition qu'une progreſſion arithmétique d'un nombre fini de termes. Ce feroit donc une contradiction, que n fût quelque choſe dans $nn + n$ pouſſée à l'infini, & rien n'eſt plus contraire à l'exactitude d'un calcul que d'y renfermer une contradiction avec la ſuppoſition qu'on a faite.

1203. Mais la ſomme exacte des parallélogrammes du triangle infini étant $\frac{\infty^2}{2}$, il ſemble que le 2^d^ $\frac{\infty}{2}$ y devient néceſſaire pour l'exactitude, & qu'il faut l'y joindre pour faire la ſomme des petits triangles, car chacun d'eux étant $= \frac{1}{2}$, & leur nombre $= \infty$, leur ſomme eſt juſtement $\frac{\infty}{2}$, & ces

petits triangles existent réellement dans le triangle infini aussi-bien que dans le fini, & pour avoir l'aire exacte, il faut y faire entrer tout ce qu'elle contient. Comment le sera-t'elle davantage, si on en retranche quelque chose de ce qu'elle contient réellement ?

Voici la Solution. Si l'on conçoit que dans la Figure du triangle fini qu'on a posé d'abord, il n'y ait point d'hypotenuse, & que par conséquent il n'y reste d'espaces tracés que ceux des trois parallélogrammes, il est certain que le tout n'est point une Figure triangulaire, mais une espece de Figure à échelons. Il lui manque, pour être triangulaire, une hypotenuse actuellement tracée, qui passât par les extrémités des quatre bases paralleles, & cette hypotenuse tracée feroit naître quatre petits triangles isosceles. Si on divise la même hauteur en un nombre quelconque fini plus grand que 4, & que par tous les points de division on tire des bases paralleles croissantes selon la progression des nombres naturels, & que l'on ne trace point d'hypotenuse, la Figure n'est point plus un triangle qu'elle ne l'étoit, mais une Figure à un plus grand nombre d'échelons, & à un plus grand nombre de parallélogrammes croissans, & elle n'a point plus qu'elle ne les avoit ces petits triangles, qui la rendroient triangulaire, & qui ne lui peuvent être donnés que par une hypotenuse actuelle. Mais si la hauteur, toujours la même, est divisée en un nombre de parties $= \infty$, ce qui rend les bases paralleles infiniment proches, alors sans rien de plus la Figure est triangulaire, la suite des extrémités de ses bases lui fait seule une hypotenuse, qui n'a pas besoin d'être autrement tracée, comme elle en avoit besoin quand les bases étoient finiment distantes, & par conséquent dans cette derniere supposition de l'infini, il n'est pas nécessaire, afin que la Figure soit un triangle, de lui concevoir les petits triangles, comme il eût été nécessaire dans toutes les suppositions du Fini.

Je dis qu'il n'est pas *nécessaire* de les concevoir, car il est certain qu'on le peut, mais pour mettre une différence essentielle entre le cas du Fini, & celui de l'Infini, il suffit qu'une

même chose soit nécessaire dans l'un & non pas dans l'autre.

Tout se réduit donc à ceci, que dans le triangle fini la proximité infinie des bases rend non-nécessaire la considération des petits triangles, quoiqu'existans. Or dans le Triangle infini supposé, les bases finiment distantes sont aussi infiniment proches que celles du triangle fini, qui ont des distances $= \frac{1}{\infty}$. Donc dans le Triangle infini, la considération des petits Triangles ou de la somme $\frac{\infty}{1}$ n'est pas nécessaire. Or si elle n'est pas nécessaire, ce seroit une superfluité que de l'employer, & toute superfluité est contre l'exactitude. Donc, &c.

1204. La raison de l'art. précédent se joint encore à celle-ci. Quand on a fait une supposition d'Infini, il faut que tout ce qui en peut porter le caractere, le porte.

1205. Le raisonnement qu'on vient de faire dans l'art. 1203, suppose que l'hypotenuse du triangle fini étoit suffisamment tracée par les extrémités des bases paralleles infiniment proches, & cela est vrai en général. Une ligne quelconque est suffisamment tracée, quand la position de tous ses élémens est déterminée ; ainsi si on avoit une Suite de points infiniment proches, également & finiment distans d'un même point, le Cercle seroit suffisamment tracé, quoique les intervalles infiniment petits des points ne fussent pas remplis par de petites droites, mais la position de ces petites droites, élémens du Cercle, étant toujours déterminée par deux points consécutifs, cela suffiroit, puisqu'il seroit impossible qu'une autre ligne qu'un Cercle eût ses élémens posés entre ces points. Dans un Triangle fini, dont les bases sont finiment distantes, leurs extrémités, qui le sont pareillement, ne déterminent point la position des élémens d'une hypotenuse finie qui devroient être infiniment petits, & cette hypotenuse n'est point par conséquent suffisamment tracée par les extrémités de ces bases, mais dans le triangle infini l'hypotenuse l'est suffisamment par les extrémités des bases paralleles, quoique finiment distantes, parce que les élémens de cette hypotenuse infinie sont finis.

1206. Soit un triangle fini rectangle isoscele, dont la hauteur & la base soient chacune $=1$. Son aire sera $=\frac{1}{2}$, & elle est exacte. Si l'on considere ce triangle comme formé d'une infinité de parallélogrammes infiniment petits, croissans selon la Suite naturelle, & de petits triangles isosceles tous égaux, la somme de ces parallélogrammes, qui sont les bases $\frac{1}{\infty}, \frac{2}{\infty}, \frac{3}{\infty}$, &c. 1, multipliées chacune par la hauteur $\frac{1}{\infty}$, sera $\frac{\infty^2}{2\infty} \times \frac{1}{\infty} = \frac{\infty^2}{2\infty^2} = \frac{1}{2}$, & la somme des petits triangles dont chacun est $\frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty} \times \frac{1}{2}$, sera $\frac{1}{2\infty^2} \times \infty = \frac{1}{2\infty}$, par conséquent l'aire totale sera $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\infty}$, où il faut négliger $\frac{1}{2\infty}$ pour l'exactitude. Il est aisé de voir que selon cette seconde idée, le triangle fini est formé d'une Suite infinie, qu'il devient un véritable Infini, & en prend les propriétés.

1207. Si les grandeurs, que le Calcul de l'Infini néglige dans la somme de la Suite naturelle, ou de toute autre progression semblable, y sont négligées, non par une espece de licence, mais pour la parfaite exactitude, il en ira de même de celles que ce Calcul néglige dans les sommes de toutes les autres progressions formées selon d'autres loix, par ex. dans celles des nombres naturels élevés au quarré, au cube, &c. comme on l'a vu dans les art. 211, 223, &c. & en général de toutes les grandeurs négligées par le même principe. Donc le Calcul de l'Infini est aussi exact que celui du Fini.

1208. Les bases infiniment proches du Triangle fini peuvent, en conservant cette même proximité, être conçues comme changées en d'autres lignes qui croîtront selon d'autres loix, & dès qu'elles ne seront plus en progression arithmétique, leurs extrémités traceront des Courbes, dont les aires pourront être calculées comme celle du Triangle, si on a les sommes des Suites que ces lignes suivront ou représenteront.



SECTION II.

Application de la Théorie des Infinis radicaux, & de celle des sommes des Suites aux Espaces Hyperboliques.

1209. SOIENT toutes les Hyperboles possibles, c'est-à-dire toutes celles de tous les différens degrés, comprises entre les mêmes Asymptotes, qui fassent entr'elles un angle droit, & dont l'une est l'axe commun de toutes les Hyperboles, & l'autre doit devenir leur derniere Ordonnée infinie. J'appelle par cette raison la premiere Asymptote x, & l'autre y. L'origine ou sommet de toutes ces Hyperboles est le même, & il est au point qui répond à $x = a$. Il s'agit de trouver quels sont les espaces compris entre chaque Hyperbole & ses deux Asymptotes, à compter ces espaces depuis l'Ordonnée terminée à l'origine commune des Hyperboles jusqu'à l'extrémité de chaque Hyperbole de l'un & de l'autre côté.

Il est connu de tous les Géométres que ydx est l'élément ou l'infiniment petit de tous les espaces curvilignes, de sorte que tous les Espaces Hyperboliques ou Asymptotiques ne sont que la somme d'une Suite infinie de ydx.

Si, selon la supposition, on compte ces Espaces depuis l'origine commune des Hyperboles, les ydx font une Suite infiniment infinie, lorsqu'on les prend depuis cette origine jusqu'à l'extrémité de l'Asymptote x, qui est aussi l'axe commun, car de ce côté-là $x = \infty$. Mais si on prend ces espaces de l'autre côté de l'origine des Hyperboles jusqu'au point de concours des Asymptotes, qui est l'origine des x, la Suite des ydx est simplement infinie, car de ce côté-là l'axe n'est que $x = a$.

1210. Toute Hyperbole a deux branches, dont l'une devient parallele à son axe, & l'autre perpendiculaire à ce même axe, toutes deux au bout d'un cours infini, ou, ce qui est la

même chose, toute Hyperbole au bout d'un cours infini, vient à se confondre d'un côté avec l'Asymptote x, qui est l'axe, & de l'autre avec l'Asymptote y, qui est une Ordonnée infinie. Donc d'un côté y devient infiniment petit, & de l'autre infiniment grand. Mais ces deux Infinis ont besoin d'être bien caractérisés.

1211. Je suppose dx constant, ou toujours $= \frac{1}{\infty}$, non seulement pour chaque Hyperbole en particulier, mais pour toutes, de sorte qu'il sera le même dans toutes. Du côté de l'Asymptote x, il est bien clair que dx sera $= \frac{1}{\infty}$ jusqu'à l'extrémité des Hyperboles, puisque là elles sont paralleles à cette Asymptote, mais de l'autre côté, où elles sont perpendiculaires, dx sera encore $= \frac{1}{\infty}$ dans la perpendicularité, parce que toute Hyperbole s'y confondant avec une Asymptote perpendiculaire, son dernier dy sera $= \infty$, ou de cet ordre (864, 865, 866), ce qui emporte qu'il suffit que le dernier dx soit de deux ordres au dessous de ce dy, c'est-à-dire $= \frac{1}{\infty}$.

1212. Au point de concours des Asymptotes, l'axe x est $= \frac{1}{\infty}$, donc (1211) $= dx$, qui répond à l'Asymptote ou Ordonnée perpendiculaire, & il est le même que ce dx.

1213. Comme nous déterminons par les derniers termes des Suites, si leurs sommes sont finies ou infinies, il faut voir quelle sera des deux côtés des Hyperboles la derniere grandeur ydx. Or pour avoir le dernier ydx de l'un & de l'autre côté, il faut du côté où les Hyperboles arrivent au parallélisme, supposer $x = \infty$, ce qui est clair, & de l'autre $x = \frac{1}{\infty}$, puisque c'est à ce point qu'elles arrivent à la perpendicularité.

Calcul de la grandeur infinie ou finie des deux espaces Asymptotiques des Hyperboles de tous les degrés.

1214. Soit l'Hyperbole ordinaire, ou l'unique du 2[d] degré, ou $x \cdot a :: a \cdot y$.

Si $x = \infty$, $y = \frac{1}{\infty}$, & $dx = \frac{1}{\infty}$, à cause du parallélisme; donc le dernier $ydx = \frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^2}$. Or de ce côté-là la Suite des ydx est infiniment infinie (1209), donc la somme des ydx est infinie (635), ou l'espace asymptotique est infini. Si

Si $x = \frac{1}{\infty}$, $y = \infty$, & $dx = \frac{1}{\infty}$, à cause de l'Asymptote perpendiculaire (1211 & 1212), ou $dx = x = \frac{1}{\infty}$. Donc ydx est alors $= \infty \times \frac{1}{\infty} = 1$. Or la Suite des ydx est simplement infinie (1209), donc la somme en est infinie (610) ou l'espace est infini.

1215. Soit la 1re Hyperbole du 3me degré, où $x.\ a :: a^2.\ y^2$.

Si $x = \infty$, $y^2 = \frac{1}{\infty}$, & $y = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$. $ydx = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$. Donc (1209 & 635), l'espace est infini.

Si $x = \frac{1}{\infty}$, $y^2 = \infty$, & $y = \infty^{\frac{1}{2}}$. Donc $ydx = \infty^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$. Donc (1209 & 609) l'espace est fini.

1216. Soit la 2de Hyperbole du 3me degré, où $x^2.\ a^2 :: a.\ y$.

Si $x = \infty$, $y = \frac{1}{\infty^2}$, $ydx = \frac{1}{\infty^3}$. Donc (636) l'espace est fini.

Si $x = \frac{1}{\infty}$, $y = \infty^2$, $ydx = \infty$. Donc l'espace est infini (611).

1217. Soit la 1re Hyperbole du 4me degré, où $x.\ a :: a^3.\ y^3$.

Si $x = \infty$, $y^3 = \frac{1}{\infty}$ $y = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{3}}}$. $ydx = \frac{1}{\infty^{\frac{4}{3}}}$. Donc l'espace est infini.

Si $x = \frac{1}{\infty}$, $y^3 = \infty$, $y = \infty^{\frac{1}{3}}$, $ydx = \frac{\infty^{\frac{1}{3}}}{\infty} = \infty^{\frac{1-3}{3}} = \infty^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{\infty^{\frac{2}{3}}}$. Donc l'espace est fini.

1218. Soit la 2de Hyperbole du 4me degré, où $x^3.\ a^3 :: a.\ y$.

Si $x = \infty, y = \frac{1}{\infty^3}, ydx = \frac{1}{\infty^4}$. Donc l'eſpace eſt fini.

Si $x = \frac{1}{\infty}, y = \infty^3, ydx = \infty^2$. Donc l'eſpace eſt infini.

Que toutes les Hyperboles, excepté celle du 2d degré, ont un de leurs eſpaces Aſymptotiques infini, & l'autre fini.

1219. De même pour les quatre Hyperboles du 5me degré, on trouvera, en ſuivant le même ordre dans ce degré que dans les précédens, c'eſt-à-dire, en commençant par l'Hyperbole, où x n'a qu'une dimenſion, & commençant la comparaiſon des deux côtés de chaque Hyperbole par celui où $x = \infty$, que

Pour la 1re Hyperb. $\begin{cases} ydx = \frac{1}{\infty^{\frac{5}{4}}}, \text{ eſpace infini.} \\ y = \infty^{\frac{1}{4}}. ydx = \frac{1}{\infty^{\frac{3}{4}}}, \text{ eſpace fini.} \end{cases}$

Pour la 2de........ $\begin{cases} ydx = \frac{1}{\infty^{\frac{5}{3}}}, \text{ eſpace infini.} \\ y = \infty^{\frac{2}{3}}. ydx = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{3}}}, \text{ eſpace fini.} \end{cases}$

Pour la 3me....... $\begin{cases} ydx = \frac{1}{\infty^{\frac{5}{2}}}, \text{ eſpace fini.} \\ y = \infty^{\frac{3}{2}}. ydx = \infty^{\frac{1}{2}}, \text{ eſpace infini.} \end{cases}$

Pour la 4me...... $\begin{cases} ydx = \frac{1}{\infty^5}, \text{ eſpace fini.} \\ y = \infty^4. ydx = \infty^3, \text{ eſpace infini.} \end{cases}$

Il eſt aiſé de juger qu'il en ira de même de toutes les autres Hyperboles des degrés ſupérieurs, & qu'elles auront toutes en général un de leurs eſpaces aſymptotiques fini, & l'autre infini. Il n'y a que l'Hyperbole ordinaire qui les ait tous deux infinis. Cela s'accorde avec ce que M. Varignon a démontré ſur cette matiere par une voie toute différente dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de l'année 1706.

1220. En observant dans les Hyperboles du 5me degré la Suite des derniers ydx, du côté où $x = \infty$, qui sont $\frac{1}{\infty^{\frac{5}{4}}}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{5}{3}}}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{5}{2}}}$, $\frac{1}{\infty^5} = \frac{1}{\infty^{\frac{5}{1}}}$, on voit tout d'un coup qu'ils sont tous des $\frac{1}{\infty}$, dans lesquels ∞ a toujours un exposant fractionnaire, dont le numérateur est constant, & égal au nombre qui exprime le degré des Hyperboles, & les dénominateurs, à commencer par le 1er ydx de la Suite, sont le nombre du degré des Hyperboles $-$ 1, & après lui tous les nombres naturels jusqu'à 1 inclusivement. Cela se trouve ainsi dans les ydx correspondans des Hyperboles du 3me degré, car ces ydx sont $\frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$ & $\frac{1}{\infty^{\frac{3}{1}}}$ (1215 & 1216). Par-là il semble d'abord que ces ydx dans le 4me degré devroient être $\frac{1}{\infty^{\frac{4}{3}}}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{4}{2}}}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{4}{1}}}$, cependant il n'y en a que deux qui sont $\frac{1}{\infty^{\frac{4}{3}}}$ & $\frac{1}{\infty^4}$ (1217 & 1218) & $\frac{1}{\infty^{\frac{4}{2}}}$ y manque. Mais cela vient de ce que l'Hyperbole $x^2 . a^2 :: a^2 . y^2$, qui seroit la moyenne de ce degré, y manque aussi, parce qu'elle n'est que l'Hyperbole $x . a :: a . y$ du 2^d degré, & si on la remettoit dans ce 4me degré, $ydx = \frac{1}{\infty^{\frac{4}{2}}}$ s'y trouveroit aussi. Donc l'ordre que suivent les derniers ydx de chaque degré pris du côté où $x = \infty$ est général avec la restriction que les ydx des Hyperboles réductibles, & qui auront été réduites y manqueront, & absolument général si toutes les Hyperboles ont été irréductibles, ou si les réductibles n'ont pas été réduites. par exemple, ces ydx, dans les Hyperboles du 7me degré, seront $\frac{1}{\infty^{\frac{7}{6}}}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{7}{5}}}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{7}{4}}}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{7}{3}}}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{7}{2}}}$, $\frac{1}{\infty^7}$. Et dans le 6me degré ils seront $\frac{1}{\infty^{\frac{6}{5}}}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{6}{4}}}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{6}{3}}}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{6}{2}}}$, $\frac{1}{\infty^6}$, ou seulement

$\frac{1}{\infty^{\frac{6}{5}}}$ & $\frac{1}{\infty^{6}}$, parce que tous les autres, ayant des expoſans réductibles, auront appartenu à des Hyperboles réductibles auſſi, & abaiſſées à des degrés inférieurs.

1221. Les *ydx*, pris du côté où $x = \frac{1}{\infty}$, ne ſuivent point d'ordre ſenſible, mais les *y* en ſuivent un qui l'eſt beaucoup ; & c'eſt pour cela qu'on les a marquées dans la petite Table des Hyperboles du 5me degré, & non les *y* qui répondoient aux autres *ydx*. L'Aſymptote *y* eſt pour les deux Hyperboles du 3me degré $\infty^{\frac{1}{2}}$ & ∞^{2} (1215 & 1216), pour les deux du 4me $\infty^{\frac{1}{3}}$ & ∞^{3} (1217 & 1218), pour les quatre du 5me $\infty^{\frac{1}{4}}$, $\infty^{\frac{2}{3}}$, $\infty^{\frac{3}{2}}$, & ∞^{4} (1219). D'où l'on voit que ces Aſymptote *y* ſont toujours dans chaque degré ∞ avec un expoſant fractionnaire, dont les numérateurs ſont les nombres naturels depuis 1 juſqu'au nombre du degré des Hyperboles moins 1, & les dénominateurs les mêmes nombres dans un ordre renverſé. Ces *y* étant ainſi trouvés, il eſt aiſé d'avoir les *ydx*, puiſqu'il n'y a qu'à multiplier chaque *y* par $\frac{1}{\infty}$. Par exemple, dans le 7me degré les Aſymptotes *y* ſeront $\infty^{\frac{1}{6}}$, $\infty^{\frac{2}{5}}$, $\infty^{\frac{3}{4}}$, $\infty^{\frac{4}{3}}$, $\infty^{\frac{5}{2}}$, $\infty^{\frac{6}{1}}$ & par conſéquent les *ydx*, $\frac{1}{\infty^{\frac{5}{6}}}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{3}{5}}}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{4}}}$, $\infty^{\frac{1}{3}}$, $\infty^{\frac{3}{2}}$, ∞^{5}.

1222. Ces *ydx* ſont toujours ou infiniment petits, ou infinis. Les infiniment petits répondent aux *y* infinis, dont l'expoſant eſt une pure fraction, & les infinis répondent aux *y*, dont l'expoſant eſt une fraction mixte, ou un entier. Or quand les *ydx* ſont infiniment petits, l'eſpace eſt fini, & il eſt infini, quand ils ſont infinis. Donc quand les Aſymptotes *y* ſont des Infinis purs radicaux, l'eſpace eſt fini de ce côté-là, & infini quand ce ſont des Infinis radicaux mixtes ou potentiels.

1223. Et comme quand l'eſpace eſt fini ou infini de ce

côté-là, il est le contraire de l'autre côté, la connoissance de l'ordre d'Infini, dont est l'Asymptote y, suffit donc pour juger de quel côté est l'espace fini & l'infini.

1224. Du côté où $x = \infty$, on peut juger immédiatement par les ydx si l'espace est fini ou infini. Car ces ydx étant tous infiniment petits, & suivant toujours l'ordre de l'art. 1219, tant que le dénominateur de l'exposant de leur ∞, toujours moindre que le numérateur & toujours décroissant, n'est contenu qu'une fois plus une fraction dans le numérateur, l'espace de ce côté là est infini, & fini quand ce dénominateur est contenu dans le numérateur plus de deux fois. Il faut remarquer que ce dénominateur ne peut jamais être contenu deux fois sans reste dans le numérateur, car alors l'exposant auroit été réductible, & l'Hyperbole correspondante n'appartiendroit plus au degré supposé, mais seroit toujours celle du 2[d] où cet $ydx = \frac{1}{\infty^2}$ (1214), & produit un espace infini.

1225. Il est aisé de voir par la nécessité du calcul & par l'ordre qu'il doit tenir, que tous les cas où l'Asymptote y est un Infini radical, mixte ou potentiel, ou ceux où ydx est un $\frac{1}{\infty}$, dont l'exposant est tel que le dénominateur est contenu dans le numérateur plus de deux fois, qui sont tous les cas de l'espace fini du côté où $x = \infty$, viennent & doivent venir d'Hyperboles où x a plus de dimensions que y, & que les cas opposés viennent d'Hyperboles où x a moins de dimensions que y. Donc en comparant ensemble toutes les Hyperboles d'un degré quelconque, toutes celles où x a plus de dimensions que y, ont leur espace du côté de l'Asymptote x fini, & celui du côté de l'Asymptote y infini, & c'est le contraire pour les Hyperboles où x a moins de dimensions que y.

1226. En concevant toutes les Hyperboles comprises entre les deux mêmes Asymptotes, on est porté à croire que ces Asymptotes sont deux lignes infinies égales, mais on voit par tout ce qui a été dit que l'Asymptote x étant constante, l'Asymptote y est toujours variable, & plus ou moins grande

que $x = \infty$ dans toutes les Hyperboles, excepté dans celle du 2d degré. Elle eſt toujours plus grande ou plus petite que ∞, au moins de quelque ordre radical, & par conſéquent toujours infiniment plus grande ou plus petite.

1227. Toute Hyperbole étant par ſa branche parallele terminée à l'Aſymptote x conſtante, & par ſa branche perpendiculaire à l'Aſymptote y, toujours infiniment plus ou moins grande que x, elle a donc ſes deux branches terminées à un infini infiniment plus ou moins grand, ou infiniment plus ou moins grandes l'une que l'autre. Il n'y a d'exception que pour l'Hyperbole ordinaire, dont les deux branches ſont égales, ce qui vient de l'égalité des dimenſions de x & de y, qui ne ſe retrouve dans aucune autre Hyperbole.

1228. Dans un même degré l'Aſymptote y de la 1re Hyperbole eſt d'un ordre radical d'Infini d'autant plus bas, & celle de la derniere Hyperbole d'un ordre potentiel d'Infini d'autant plus élevé, que le degré eſt plus élevé. Car le degré étant n, l'une eſt toujours $\infty^{\frac{1}{n-1}}$, & l'autre ∞^{n-1} (1221).

1229. Donc afin que toutes les Hyperboles poſſibles puiſſent ſe terminer à différens points d'une même Aſymptote y, il faut la concevoir $= \infty^{\infty}$, l'Aſymptote x étant toujours $= \infty$.

1230. Les extrémités de toutes les Hyperboles étant conçues comme arrangées ſur cette Aſymptote $= \infty^{\infty}$, celles de deux Hyperboles conſécutives d'un même degré n'y ſont pas conſécutives : mais les extrémités de quelques autres Hyperboles d'autres degrés ſe placent entr'elles. Il eſt aiſé de ſe faire quelques exemples de cet entrelacement, & il feroit inutile de le conſidérer plus en détail.

1231. Les dx ont été ſuppoſés les mêmes pour toutes les Hyperboles. Le premier ydx de toutes les Suites de ydx, qui ſont pour les deux côtés de chaque Hyperbole, eſt toujours le même à cauſe de l'origine commune. De-là il ſuit que pour comparer les eſpaces Aſymptotiques de deux diffé-

rentes Hyperboles pris du même côté, il ne faut considérer que les y, & que ces espaces seront comme les sommes des y, bien entendu que l'on compare espace fini à espace fini, ou infini à infini. De plus le 1er terme de toutes les Suites de ydx, ou y étant toujours le même, les sommes seront d'autant plus grandes ou plus petites, que le dernier terme sera plus grand ou plus petit, car le nombre des termes est toujours le même. Ce n'est pas la peine d'entrer dans le détail de cette considération.



SECTION III.

Sur les Rencontres de différentes Courbes, ou de différentes Branches d'une même Courbe.

Ce que c'eſt que l'interſection & l'attouchement.

1232. JE me ſers du mot de *Rencontre* pour avoir un terme général qui comprenne les *Interſections* & les *Attouchemens.*

Deux Courbes ne peuvent ſe rencontrer ſans avoir quelque partie commune, ou au moins ſans être dans quelque partie infiniment proches l'une de l'autre. Le 2[d] cas ſemble retomber dans le 1[er], c'eſt-à-dire, que deux Courbes qui ſont en quelque partie infiniment proches l'une de l'autre, ſemblent avoir cette même partie commune, du moins à l'œil & ſenſiblement, mais il eſt certain que les deux cas ſont différens en eux-mêmes, & peuvent être très-nettement diſtingués par la penſée. Le 1[er] eſt l'*interſection* & le 2[d] l'*attouchement.*

1233. L'interſection eſt donc une rencontre plus intime & plus parfaite que l'attouchement.

Que l'interſection ſe fait par un ſeul point.

1234. La moindre partie commune que deux Courbes puiſſent avoir, auſſi-bien que deux droites eſt un point abſolu, & alors les deux Courbes ſe coupent. Ce ſont proprement deux côtés infiniment petits des deux Courbes qui ſe coupent préciſément comme deux droites, puiſqu'ils ſont lignes droites, & ils ont ce point commun.

1235. Un point abſolu n'a point de poſition, & par conſéquent ce point commun aux deux Courbes ne leur donne aucune poſition commune par rapport à un même axe auquel on les rapporte, & elles conſervent dans l'interſection, comme feroient deux droites, les deux poſitions différentes qu'elles avoient.

1236. L'effet néceſſaire de l'interſection eſt que les deux Courbes étant rapportées à un même axe, celle qui étoit

extérieure

extérieure à l'autre par rapport à cet axe devienne *intérieure*, & au contraire, ainsi qu'il arriveroit à deux droites. Il est visible que cela vient des deux positions différentes des deux Courbes, & ne pourroit subsister si les deux positions étoient la même.

1237. Réciproquement, toutes les fois que la Courbe extérieure devient intérieure, il y a intersection.

1238. Les Courbes étant conçues comme formées de côtés droits infiniment petis du 1[er] ordre, si l'on vouloit que la partie commune à deux Courbes dans une intersection fût un Infiniment petit du 2[d] ordre, cette partie, qui ne seroit pas un point absolu, auroit donc une étendue & une position, & la même position que le côté du 1[er] ordre dont elle seroit partie, car une droite a la même position dans toute son étendue, donc les deux Courbes auroient dans leur intersection la même position par rapport à l'axe, donc l'extérieure ne deviendroit pas nécessairement intérieure, donc il n'y auroit pas nécessairement d'intersection (1236 & 1237), ce qui est contre la supposition. Donc il y a contradiction que l'intersection se fasse par une partie commune qui soit un Infiniment petit du 2[d] ordre. Et comme ce sera le même raisonnement pour tout autre Infiniment petit d'un ordre inférieur, l'intersection ne peut donc se faire que par un point absolu.

1239. Quand même on concevroit les Courbes formées de côtés du 2[d] ordre, ou du 3[me], &c. ce seroit encore la même chose.

1240. Si deux Courbes se coupent, elles ont chacune au point d'intersection leur Tangente particuliere & différente, car ce sont deux côtés différemment posés par rapport à l'axe commun, qui n'ont de commun qu'un point absolu (1238). Ces deux Tangentes se trouvent par l'Equation de chaque Courbe. Il en iroit de même de tel nombre qu'on voudroit de Courbes qui se couperoient.

1241. Une Ordonnée terminée à une Courbe, ne se termine naturellement, & selon l'ancienne Géométrie, qu'à un point absolu de cette Courbe, & comme ce point n'a

Comment la nouvelle Géométrie considere comme

une étendue ce qui n'étoit qu'un point dans l'ancien-

point de poſition, on ne peut avoir par là la poſition de l'Ordonnée par rapport à la Courbe, ou, ce qui eſt le même, l'angle ſous lequel elle la rencontre. Mais parce qu'il ſeroit extremement avantageux de l'avoir, la nouvelle Géométrie a imaginé une Ordonnée comme en étant deux paralleles entr'elles & à toutes les autres, toutes deux infiniment proches, & terminées aux deux extrémités d'un côté de la Courbe, qui eſt une droite infiniment petite, moyennant quoi ces deux Ordonnées, qui n'en valent qu'une, ont une poſition par rapport à la Courbe.

Il eſt clair que, ſelon cette Hipotheſe, les droites ou côtés dans leſquels la Courbe eſt diviſée, & la diſtance infiniment petite qu'on donne à deux Ordonnées qui n'en valent qu'une, doivent être du même ordre d'infiniment petit. Si l'on avoit conçu les Courbes comme formées de droites infiniment petites du 2[d] ordre, il auroit fallu concevoir les deux Ordonnées, qui n'en auroient valu qu'une, comme n'étant ſéparées que par un intervalle infiniment petit du 2[d] ordre, & toujours ainſi de ſuite ſi les côtés avoient été d'un ordre plus bas que le 2[d]. Mais il a ſuffi de les concevoir du 1[er], & dans cette Hipothéſe les deux Ordonnées en ſont *ſuffiſamment* une, quand elles ſont ſéparées par un intervalle du 1[er] ordre.

Je dis *ſuffiſamment*, car elles ne ſont point exactement & rigoureuſement une. Elles le ſeroient davantage ſi elles n'étoient ſeparées que par un intervalle du 2[d] ordre, encore plus ſi l'intervalle étoit du 3[me], &c. Mais elles ne le ſeroient point encore exactement & rigoureuſement, & cela ne peut être que quand elles partiront du même point abſolu, & ne ſeront ſéparées par aucun intervalle. Mais alors elles ſe termineroient auſſi à un point abſolu de la Courbe, & n'auroient aucune poſition par rapport à elle. On perdroit donc un avantage, & le ſeul moyen de le conſerver eſt de concevoir toujours deux Ordonnées d'une proximité non abſolue, mais telle qu'elles ſoient ſuffiſamment une.

Quelle eſt la

1242. La Regle de cette *ſuffiſance* eſt qu'elles ſoient in-

finiment plus proches que deux autres que l'on eſt néceſſairement obligé de prendre pour deux, tant qu'elles ne ſont que d'une certaine proximité déterminée. Ainſi parce que deux Ordonnées étant ſéparées par un intervalle fini, quelque petit qu'il ſoit, il eſt indiſpenſable de les prendre pour deux; elles ſeront ſuffiſamment une, lorſqu'on les concevra infiniment rapprochées, ou ſéparées ſeulement par un intervalle infiniment petit du 1er ordre, & il ne ſera point néceſſaire de leur donner un intervalle d'un ordre inférieur.

Regle de cette nouvelle idée, ou ſuppoſition.

1243. De-là il ſuit que s'il y a des cas où deux Ordonnées ſéparées par un intervalle du 1er ordre, doivent néceſſairement être priſes pour deux, elles ne ſont point ſuffiſamment une malgré leur proximité infinie, & qu'il faut encore les rapprocher infiniment; que ſi elles ſont encore néceſſairement deux, il faut encore les rapprocher infiniment ou ne les concevoir ſéparées que par un intervalle du 3me ordre, &c.

1244. Il en ira de même en général de toutes les choſes qui ſont deux, & que l'on veut prendre ſans erreur pour une, en les rapprochant ſeulement de l'unité, & ſans les pouſſer à l'unité parfaite. Car étant infiniment rapprochées, elles ſont infiniment moins *deux*, & ſi alors elles ont perdu ce qui les rendoit deux, elles ſont ſuffiſamment une, & il ſeroit inutile & même vicieux d'aller à d'autres approximations infiniment plus grandes. Cela poſé,

1245. Quoiqu'une Ordonnée, qui ſe termine à l'interſection de deux Courbes, ſe termine à un point abſolu (1238), & par conſéquent n'ait point de poſition par rapport à ces deux Courbes, on peut cependant la concevoir comme en ayant une, auſſi-bien que toute autre Ordonnée quelconque qui, ſelon l'ancienne Géométrie, ſe termine à un point abſolu, & ſelon la nouvelle, ne laiſſe pas d'avoir une poſition. Mais il faudra concevoir l'Ordonnée terminée à l'interſection comme en étant deux, & il s'agit de ſavoir quelles ſeront ces deux.

Application de cette Regle aux interſections d'un nombre quelconque de Courbes.

L'Ordonnée devenue double doit conſerver, autant qu'il eſt poſſible, la nature d'Ordonnée terminée à un point d'in-

terſection. Etant unique, elle ſe terminoit à un point commun aux deux Courbes, qui eſt abſolument & réellement tout ce qu'elles ont de commun. Quand il y aura deux Ordonnées, on ne peut concevoir autre choſe, ſinon que l'une ſe terminera encore à ce même point, & l'autre à deux points, l'un appartenant à une Courbe, l'autre à l'autre, mais tous deux ſi proches l'un de l'autre, & en même temps ſi proches du premier point abſolu de l'interſection, qu'ils pourront tous trois être pris pour le même, moyennant quoi l'Ordonnée ſera double, & ne ſe terminera qu'à ce qui eſt ſuffiſamment commun aux deux Courbes.

FIG. X. Soient Mm & $M\mu$ les côtés des deux Courbes qui ſe coupent au point M, en faiſant entr'eux l'angle $mM\mu$, que je ſuppoſe fini, puiſqu'étant formé par interſection de deux Courbes différentes, rien ne l'oblige à être infiniment petit. Je dis que les points m & μ, extrémités des deux côtés qui ſe coupent en M, ne ſont aſſez proches ni l'un de l'autre, ni du point M, pour pouvoir être cenſés confondus, ſelon ce qui vient d'être dit, & entr'eux, & avec le point M; & qu'en l'état où ils ſont tous trois, ils ſont trois points diſtincts, par rapport à ce qu'ils doivent être pour une interſection. Car quoique m & μ n'aient entr'eux que la diſtance infiniment petite du 1re ordre $m\mu$, & qu'ils ne ſoient éloignés chacun de M que d'une diſtance pareille, cette proximité ne ſuffit pas pour l'interſection, qui ne ſe fait que quand m & μ ſont venus en M, & les points m & μ n'appartiendroient pas à l'interſection. Il faut donc rapprocher infiniment m & μ l'un de l'autre, & de M, ſans que tous trois cependant deviennent le point abſolu M, & c'eſt ce qui ſera ſi l'on conçoit que les deux Ordonnées PM & $pm\mu$, au lieu d'être ſéparées par un intervalle $Pp = dx$, ne le ſoient plus que par un $Pp = ddx$. Alors les deux Ordonnées, PM terminée au point M, & $pm\mu$ terminée aux deux points m & μ proches l'un de l'autre & de M d'une proximité infinie du 2^d ordre, pourront être priſes pour une ſeule terminée à un point d'interſection, & cette Ordonnée double aura une poſition

par rapport aux deux Courbes, puisqu'elle se terminera au côté $M\mu$ de la Courbe extérieure infiniment petit du 2^d ordre, & au côté Mm de l'intérieure de ce même ordre, car la grandeur des côtés suit toujours celle des Pp (1241), & tous les côtés d'un ordre quelconque ont une étendue & une position. FIG. XI.

1246. PM & $p\,m\,\mu$ étant ainsi infiniment rapprochées, & les côtés Mm, $m\mu$, étant devenus du 2^d ordre, si l'on suppose les deux 1res Courbes coupées encore au point M par une 3me exterieure aux deux, dont le côté Mr, compris entre PM & $p\,m\,\mu r$, sera nécessairement du 2^d ordre, je dis que quoique les points m & μ fussent assez confondus pour une intersection & entr'eux & avec M, lorsqu'il n'y avoit que deux Courbes, il faut rapprocher infiniment les Ordonnées PM & $pm\mu r$, lorsqu'il survient une 3me Courbe, non que les points m & μ ne soient assez confondus entr'eux & avec M, mais à cause d'un 4me point r, qui par la supposition même que l'on fait, est essentiellement distinct de m & de μ, car Mr est nécessairement conçu comme un côté appartenant à la 3me Courbe, & distinct de $M\mu$ & de Mm; sans cela cette 3me n'en seroit point une 3me, & ne seroit que l'une des deux 1res. Il faut donc rapprocher infiniment r de μ, ou de m confondu avec μ, & pour cela il faut concevoir $Pp = dddx$, au moyen de quoi les quatre points M, m, μ & r, seront suffisamment confondus pour une intersection de trois Courbes, & il y aura une Ordonnée composée de deux, dont l'une PM se terminera toujours au point M, & l'autre $p\,m\,\mu r$ à trois côtés infiniment petits du 3me ordre, chacun appartenant à l'une des trois Courbes, & l'Ordonnée double aura une position par rapport à chacune de ces Courbes.

1247. Si une 4me Courbe coupoit ces trois au point M, ce seroit encore le même raisonnement, & il faudroit concevoir $Pp = ddddx$, & ainsi de suite. Donc en général si l'on veut qu'une Ordonnée terminée au point d'intersection de tel nombre de Courbes qu'on voudra, ait une position par rapport à toutes ces Courbes, il faut la concevoir formée de

deux Ordonnées infiniment proches d'une proximité qui soit d'un degré égal au nombre des Courbes, & en même temps il faut la concevoir terminée à des côtés de ces Courbes qui soient de ce même ordre d'Infiniment petit.

Attouchement de deux Courbes. 1248. Après le point absolu, qui est la seule partie que deux Courbes ayent commune dans l'intersection réellement & absolument, la moindre partie qu'elles puissent avoir commune est un côté du 1er ordre, puisqu'elles ne peuvent se couper dans un côté d'un ordre inférieur (1238). Si elles ont donc un côté commun, ou plûtôt (1232) si elles sont infiniment proches chacune par un côté, elles se *touchent*.

1249. Les *dx* étant supposés constans à l'ordinaire, ces deux côtés sont égaux. Car tout côté est $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, or ici *dy* est le même, ce qui est évident.

1250. Si les deux Courbes sont, l'une concave, l'autre convexe vers l'axe commun, il est clair qu'après le côté commun elles ne peuvent plus avoir rien de commun. Elles vont chacune de deux côtés différens après leur rencontre.

Attouchement simple. 1251. Mais cela peut être, ou n'être pas, si elles sont toutes deux concaves vers l'axe.

FIG. XII. Soit le côté commun *Mm*, la Courbe non ponctuée l'extérieure, & la ponctuée l'intérieure. Le côté commun étant *Mm* ponctué & non ponctué, il est clair qu'immédiatement avant ce côté commun, l'angle de contingence de la Courbe extérieure a été nécessairement moindre que celui de l'intérieure, car sans cela l'extérieure n'auroit pas été extérieure. Après ce côté commun, si l'angle de contingence de l'extérieure est encore moindre que celui de l'intérieure, l'extérieure a le côté *m μ*, & l'intérieure le côté *m r*, l'extérieure demeure extérieure comme elle l'étoit, & les deux Courbes n'ont absolument rien de commun que le côté *Mm*, comme dans le cas où elles auroient été, l'une concave, l'autre convexe vers l'axe. C'est là un *simple attouchement*.

Attouchement avec intersection. 1252. Mais si après le côté commun *Mm*, l'angle de contingence de l'extérieure est plus grand que celui de l'inté-

rieure, l'extérieure a le côté *mp*, & l'intérieure le côté *mr*, c'eſt-à-dire, que l'extérieure devient intérieure. Or cela ne ſe peut, à moins que le côté *mp* de l'extérieure, devenue intérieure, n'ait coupé le côté *mr* dans le point qui a ſuivi immédiatement le point *m*, extrémité du côté commun *Mm*. Donc alors les deux Courbes ont, outre le côté *Mm*, un point abſolu commun qu'il faut compter. C'eſt la un *attouchement accompagné d'interſection.* Ce cas eſt rare, & on en voit aiſément la raiſon. Il peut paroître ſurprenant, quand il n'eſt pas approfondi, parce qu'il eſt paradoxe que deux Courbes ſe touchent & ſe coupent en même temps. L'interſection qui eſt viſible, en ce que l'extérieure devient intérieure, empêche de reconnoître l'attouchement qui n'eſt pas ſi ſenſible.

1253. Donc en général, quand deux Courbes concaves vers un même axe ſe touchent, leur attouchement eſt ſimple, ſi la courbure de l'extérieure eſt encore immédiatement après l'attouchement la moindre, comme elle l'étoit auparavant, & l'attouchement eſt accompagné d'interſection, ſi la courbure de l'extérieure devient la plus grande immédiatement après l'attouchement.

1254. Il y a encore un autre cas poſſible, c'eſt qu'immédiatement après l'attouchement, les deux courbures ſoient égales. *Attouchement double ſans interſection.*

En ce cas, ou elles ſont abſolument & rigoureuſement égales, ou elles le ſont, parce qu'elles n'ont qu'une différence infiniment petite par rapport à elles.

Si c'eſt le 1er, le côté *mμ* de la Courbe extérieure ſe couche ſur le côté *mr* de l'intérieure, & par conſéquent l'extérieure demeure extérieure, & il y a un *double* attouchement ſans interſection.

1255. Alors il faut que la courbure de l'intérieure qui avant l'attouchement a toujours été la plus grande (1251), ait toujours été plus grande de moins en moins par rapport à l'autre, puiſque la différence des deux courbures, devenue nulle dans l'attouchement, a dû auparavant être décroiſſante. Après l'attouchement, il faut que cette différence devienne

croiſſante, & c'eſt tout ce que le Terme de l'Egalité exige; il permet que la courbure, qui étoit croiſſante par rapport à l'autre, le ſoit encore, ou qu'elle devienne décroiſſante, pourvu qu'elle ſoit l'un ou l'autre de plus en plus.

1256. Si c'eſt le 1er, c'eſt-à-dire, ſi la courbure de la Courbe intérieure eſt encore après l'attouchement croiſſante par rapport à l'autre, la Courbe intérieure demeure toujours intérieure, & par conſequent il n'y a point d'interſection, & de plus comme la courbure eſt croiſſante de plus en plus par rapport à l'autre, elle devient toujours plus intérieure, c'eſt-à-dire, qu'elle s'écarte toujours davantage de l'extérieure.

1257. Si au contraire après l'attouchement la courbure de la Courbe intérieure devient décroiſſante par rapport à l'autre, ou, ce qui eſt le même, ſi la Courbe extérieure a une plus grande courbure, c'eſt la même choſe que dans l'art. 1252, & il y a interſection. Mais de plus la Courbe extérieure devenue intérieure s'écarte toujours davantage de l'autre.

1258. Donc après un attouchement double, il peut y avoir une interſection auſſi-bien qu'après un attouchement ſimple, ou de deux ſeuls côtés.

1259. Maintenant ſoit le 2^{d} cas de l'art. 1254, c'eſt-à-dire, celui où les deux Courbes qui ſe touchent, arrivent en même temps à une égalité de courbure non abſolue. La meſure de la courbure eſt un Infiniment petit du 2^{d} ordre, donc une différence de courbure qui n'empêchera pas l'égalité ou qui ſera infiniment petite, ſera un Infiniment petit du 3me ordre. Donc l'une des deux courbures aura ſur l'autre un excès de cet ordre.

1260. Si l'excès appartient à la courbure de la Courbe intérieure, elle demeure intérieure comme elle l'étoit, ſeulement les deux 2^{ds} côtés qui ſe touchent, & par leſquels ſe fait l'égalité de courbure, ne ſont pas exactement poſés l'un ſur l'autre, mais ils font entr'eux un angle infiniment petit, dont la baſe ou le Sinus eſt du 3me ordre, puiſque c'eſt là la différence de courbure (1259), & cet angle étant infiniment plus

plus petit que tous ceux de contingence, les deux côtés sont assez posés l'un sur l'autre pour n'être qu'une même droite. Il y a donc alors un double attouchement sans intersection, & c'est la même chose que le cas de l'art. 1256. à cela près, que les deux 2ds côtés font entr'eux un angle infiniment plus petit que ceux de contingence.

1261. En ce cas la Courbe intérieure demeure toujours intérieure.

Attouchement double avec une intersection entre les deux attouchemens, ou osculation.

1262. Si l'excès de courbure appartient à la Courbe extérieure, il faut qu'après le 1er côté Mm, où se fait le 1er attouchement, la Courbe extérieure devienne intérieure au point m, & par conséquent la coupe à ce point. Ce même point est aussi le sommet d'un angle infiniment petit que font entr'eux $m\mu$ ponctué & $m\mu$ non ponctué, dont la base est un Infiniment petit du 3me ordre, & qui n'empêche pas les deux côtés $m\mu$ d'être une même droite. Il y a alors un *double attouchement avec une insection entre les deux attouchemens.* FIG. XIII.

1263. Il est visible que le cas du double attouchement avec une intersection entre les deux attouchemens est celui de l'*osculation* ou *baisement*, & le fondement de toute la Théorie des Développées. Si la Courbe ponctuée est un Cercle, c'est le Cercle *osculateur*, & la Courbe non ponctuée est la *Développante*, ou celle qui est née du développement de la Développée. La différence infiniment petite de courbure, que nous avons supposée au point m, répond à la différence infiniment petite des Rayons osculateurs, dont l'un auroit décrit le côté ponctué ou arc circulaire Mm, & l'autre l'arc circulaire ponctué $m\mu$. Et même cette différence de courbure & celle des Rayons osculateurs, c'est la même chose, puisque les différens Rayons osculateurs sont la mesure de la courbure de la Développante.

1264. La Courbe extérieure, devenue intérieure, ne peut redevenir extérieure immédiatement après l'osculation. Ou, ce qui est la même chose, après le côté commun $m\mu$ un 3me côté non ponctué ne peut devenir extérieur à un ponctué,

car l'excès de courbure au point *m*, appartenant à la Courbe qui étoit extérieure ou non ponctuée, lui appartiendra encore dans la suite, & par conséquent la Courbe non ponctuée, devenue intérieure, continuera de l'être.

M. Varignon a démontré dans les Mém. de l'Acad. de 1713. pag. 123 & suiv. un entrelacement de Courbes dans une osculation, tel qu'on prouve ici qu'il est impossible : mais cet entrelacement se fait avec trois Courbes, ce qui n'a rien de contraire à ce que nous disons.

1265. Cela même nous donne lieu de faire appercevoir ici en général ce qui arriveroit à trois Courbes ou à un plus grand nombre qui se rencontreroient de toutes les différentes manieres dont nous avons vû que se rencontreroient deux Courbes. Mais après ce qui a été dit, ces différens cas n'en seroient que plus compliqués, & n'auroient aucune difficulté nouvelle. Ainsi il seroit inutile de s'y arrêter.

Principe du Calcul des Tangentes dans les points où se rencontrent différentes branches d'une même Courbe.

1266. Venons aux rencontres des différentes Branches d'une même Courbe.

Il semble d'abord qu'il n'y ait qu'à regarder ces différentes branches d'une même Courbe comme différentes Courbes, & cela est vrai, pourvû qu'on prenne l'équation particuliere de chaque branche, si on la peut avoir. Tout revient à ce qui a été dit.

Mais comme réellement ces différentes branches appartiennent à une même Courbe, & sont comprises dans une équation totale, qui d'ailleurs n'est pas toujours aisée à diviser, il faut pouvoir les prendre telles qu'elles sont.

Elles ne peuvent se rencontrer que comme feroient différentes Courbes. Mais les Tangentes des points de rencontre qui n'ont nulle difficulté en différentes Courbes, parce qu'on prend chaque Tangente à part, ni en différentes branches d'une même Courbe, quand on les regarde, & qu'on les peut regarder comme différentes Courbes, ont de la difficulté, quand on regarde ou qu'on est obligé de regarder les différentes branches comme appartenant à une même Courbe, & qu'il faut tirer ces Tangentes de l'Equation totale. C'est là de quoi il s'agit présentement.

Ce que nous avons établi dans les art. 1241, &c. 1247, ſur l'Ordonnée qui ſe termine au point d'interſection de différentes Courbes, étoit inutile par rapport au calcul des Tangentes de ces Courbes au point d'interſection, mais non par rapport à la Théorie générale; & préſentement cela eſt néceſſaire & pour la Théorie, & pour le calcul des Tangentes au point d'interſection de différentes branches d'une Courbe.

Quand une Courbe a différentes branches par rapport à une même partie de l'axe, il lui eſt eſſentiel que chaque Ordonnée, puiſque ſelon la nouvelle Géométrie les Ordonnées ont une poſition par rapport à la Courbe, ait autant de poſitions qu'il y a de différentes branches auxquelles elle ſe termine. Donc l'Ordonnée terminée au point d'interſection de différentes branches, a autant de poſitions qu'il y a de branches qui ſe coupent. Or alors il faut la concevoir comme formée de deux Ordonnées infiniment proches d'une proximité qui ſoit d'un degré égal au nombre des branches, & en même temps il faut concevoir ces deux Ordonnées comme terminées à des côtés qui ſoient de ce même ordre d'Infiniment petit (1247). Donc la formule des Soutangentes étant $\frac{ydx}{dy}$, elle devient alors, ſi deux branches ſe coupent, $\frac{yddx}{ddy}$, ou $\frac{ydddx}{dddy}$ s'il y en a trois, & ainſi de ſuite.

1267. Donc pour avoir les Tangentes du point d'interſection de différentes branches d'une même Courbe, il faut autant de différentiations ſucceſſives de x & de y, qu'il y a de branches. S'il n'y a qu'une branche, auquel cas il ne peut y avoir d'interſection, il ne faut différentier x & y qu'une fois, ce qui donne la formule ordinaire $\frac{ydx}{dy}$, mais s'il y a deux branches qui ſe coupent, elle devient $\frac{yddx}{ddy}$, &c.

1268. On voit aſſez que cela vient, ſelon tout ce qui a été dit, de ce que dans le cas de l'interſection de pluſieurs branches, & même plus généralement dans celui de l'interſection de pluſieurs Courbes, il faut regarder le côté de chaque

branche ou Courbe comme étant de l'ordre d'Infiniment petit désigné par le nombre des branches ou Courbes. Or la position d'un côté par rapport à l'axe dépend nécessairement du rapport de grandeur de l'Infiniment petit de l'axe & de l'Infiniment petit de l'Ordonnée, & le côté est nécessairement du même ordre que ces deux Infiniment petits. Donc s'il faut regarder ce côté comme étant du 1er ordre, la Soutangente est $\frac{ydx}{dy}$, s'il faut le regarder comme étant du 2^d^; elle est $\frac{yddx}{ddy}$, &c.

1269. Je ne prends dans la suite, pour plus de facilité, qu'une Courbe à deux branches, ce qui en sera dit s'appliquera de soi-même aux Courbes qui en auront plusieurs.

Puisque $\frac{yddx}{ddy}$ est la Soutangente de deux branches au point d'Intersection, $\frac{ydx}{dy}$ ne doit donner pour ce point aucune Soutangente. Car cette formule $\frac{ydx}{dy}$ suppose qu'une Ordonnée y, formée de deux Ordonnées séparées seulement par un intervalle $= dx$, se termine aux deux différentes branches de la Courbe, ce qui alors n'est pas vrai. Et en effet $\frac{ydx}{dy}$ ne donne point de Soutangente. Alors il arrive que les grandeurs finies, qui expriment le rapport $\frac{dx}{dy}$, sont $= 0$ tant dans le numérateur que dans le dénominateur de la fraction, ce qui ne donne rien, mais ces deux zero ne sont que relatifs, & non pas absolus, & en différentiant les grandeurs qui exprimoient le rapport $\frac{dx}{dy}$, on leur trouve un rapport fini, qui est $= \frac{ddx}{ddy}$, & qui donne la Soutangente cherchée.

1270. Il est aisé de voir par quelle raison il arrive si juste en ce cas, que la fraction qui exprimoit par des grandeurs finies le rapport $\frac{dx}{dy}$, a alors son numérateur & son dénominateur

néceſſairement égaux à zero. C'eſt que par la nature de l'Ordonnée, terminée en même temps à l'interſection des deux branches, dx & dy deviennent chacun infiniment plus petits qu'ils n'étoient, donc il eſt impoſſible qu'il n'en arrive autant aux deux grandeurs finies qui les exprimoient. Cela même prouve auſſi que ces deux grandeurs finies, devenues zero, ne ſont pas des zero abſolus.

1271. Les côtés des deux branches devenus infiniment petits du 2[d] ordre au point d'interſection, n'ont que la même poſition qu'ils auroient eue, étant infiniment petits du 1[er], car ils ſont une partie infinitieme d'une droite. Ils ont auſſi entre eux le même rapport de grandeur.

1272. Il en va de même des ddy, qu'il faut concevoir dans la Formule $\frac{yddx}{ddy}$, non pas comme les différences des dy d'une même Courbe, mais ſeulement comme des dy devenus infiniment plus petits qu'ils n'étoient. Quant aux ddx, cela eſt clair.

1273. Si deux branches d'une Courbe ſe touchent, il ne faut que concevoir que les points m & μ ſe ſont infiniment rapprochés, ou, ce qui revient au même, que l'angle $mM\mu$ eſt infiniment petit : mais il n'eſt nullement néceſſaire de concevoir, comme dans le cas de l'interſection, qu'ils ſe ſoient auſſi infiniment rapprochés du point M, car l'interſection demande la confuſion de m & de μ entr'eux, & avec M, & l'attouchement ne demande que la confuſion de m & de μ. Donc il n'eſt point néceſſaire de concevoir PM & $pm\mu$ comme infiniment rapprochées, & ſéparées ſeulement par $Pp = ddx$. FIG. X.

1274. Cependant ſi l'on veut conſerver l'idée ou le caractere de ce que, quand deux branches appartiennent à une même Courbe, chaque Ordonnée a deux poſitions différentes, il faut concevoir $pm\mu$ comme terminée à la Courbe intérieure en m, & à l'extérieure en μ, de ſorte que $m\mu$ ſoit un Infiniment petit du 2[d] ordre, ce qui permet que $pm\mu$ demeure à la place qu'elle a dans la Fig. x, ou qu'elle ſe rapproche infiniment de PM.

1275. Il ne ſera donc pas néceſſaire, pour avoir la Soutangente de ce point d'attouchement, de changer $\frac{ydx}{dy}$ en $\frac{yddx}{ddy}$, & on aura cette Soutangente comme ſi les deux branches avoient été deux Courbes différentes ; & parce que les deux branches ſe touchent, elles auront toutes deux la même Tangente en ce point, ou la même Soutangente, & par conſéquent une Soutangente trouvée ſera la même que l'autre.

1276. Mais ſi on veut trouver en même temps les deux Soutangentes, c'eſt-à-dire, une Soutangente telle qu'elle ait deux valeurs égales, ce qui eſt plus préciſément le cas de deux branches qui ſe touchent, alors il faut aller juſqu'à $\frac{yddx}{ddy}$, ce qui eſt permis (1274).

1277. La différence des deux cas d'interſection & d'attouchement ne paroîtra, qu'en ce que l'un donnera deux Soutangentes inégales, & l'autre deux égales.

1278. En général ce n'eſt donc que pour avoir enſemble & en même temps toutes les Soutangentes, tant des points d'attouchement que d'interſection de différentes branches d'une même Courbe, qu'il faut également pour les uns & pour les autres cas pouſſer la différentiation de $\frac{dx}{dy}$ juſqu'à un nombre égal à celui des branches, car je ſuppoſe que tout ce qui a été dit de deux branches, s'entend d'un nombre quelconque.

Tout cela revient à ce que M. Saurin a démontré ſur cette matiere dans les Mémoires de l'Acad. de 1716, p. 59 & 275.



SECTION IV.

Sur les Figures isoperimetres.

1279. LE *Perimetre* d'une Figure est la somme des lignes qui la terminent. Les Figures *isoperimetres* sont celles en qui cette Somme est égale, quoique les lignes dont elle est formée puissent être en nombre différent, & différemment disposées entr'elles. Et comme selon ces différences les Figures isoperimetres ont des *aires* ou *capacités* plus ou moins grandes, c'est là ce que nous allons considérer, pour donner un exemple de propriétés, dont la naissance apperçue dans l'Infiniment petit, donne lieu de les suivre dans le Fini où l'on en trouve l'accomplissement; & même dans l'exemple que nous allons prendre, c'est l'Infiniment petit qui est la source naturelle de la démonstration.

1280. Soit un Fil sans largeur, dont la longueur est déterminée, & connue, & $= a$. Ce sera le perimetre constant de toutes les Figures qu'on en formera.

D'abord si je couche les deux moitiés du Fil exactement l'une sur l'autre, l'aire est absolument nulle, & il est visible que cela vient de ce que je n'ai formé ni côtés ni angles. Il faut donc, pour avoir une aire, former au moins un Triangle, le moindre des Poligones.

1281. Pour m'écarter le moins qu'il se puisse du cas précédent, je forme le Triangle abc, dont la base ac est infiniment petite, & les deux côtés ab, bc, sont chacun $= \frac{a}{2}$; la base est donc $\frac{a}{\infty}$, & le perimetre $\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{\infty} = a$ comme il doit être. Il est clair qu'en abaissant du sommet b sur la base, la perpendiculaire bd qui est encore $= \frac{a}{2}$, le Triangle bad est $\frac{a}{2} \times \frac{a}{2\infty} \times \frac{1}{2} = \frac{aa}{8\infty}$, & par conséquent

Triangle infiniment petit dont le perimetre est fini. FIG. XIV.

le Triangle total abc eſt $= \frac{aa}{4\infty}$, aire infiniment petite.

Second Triangle infiniment petit iſopérimetre.

FIG. XV.

1282. Je puis encore avec le même Fil a, former un autre Triangle ABC infiniment petit, dont l'angle obtus ABC ſera infiniment petit différent de 180, & les deux angles ſur la baſe infiniment petits. En faiſant auſſi ce Triangle iſoſcele, ce qui eſt ſa formation la plus naturelle, AC ſera $= \frac{a}{2}$, & AB & BC chacune $= \frac{a}{4}$, à cauſe de la différence infiniment petite de AB & de AD moitié de AC. Si l'on nomme dx la perpendiculaire BD, l'aire ſera $\frac{adx}{4}$.

1283. En cherchant ce qui rend ces deux aires infiniment petites, je vois que le Triangle abc a deux côtés infiniment plus grands que le troiſieme, & un angle infiniment plus petit que les deux autres, & que le Triangle ABC a un angle infiniment plus grand que les deux autres. D'où je vois que c'eſt l'inégalité infinie, ſoit entre les angles, ſoit entre les côtés, qui rend les aires infiniment petites; & en effet, ſi l'on ôte cette inégalité infinie, c'eſt-à-dire, ſi l'on forme des Triangles, dont tous les côtés & les angles ſoient finis, on aura des aires finies, infiniment plus grandes par conſéquent qu'elles n'étoient.

FIG. XIV. & XV.

1284. Une baſe ac ou AC étant déterminée pour être la baſe d'un Triangle, & la ſomme des deux autres côtés étant déterminée auſſi, le Triangle n'aura jamais une plus grande aire que quand il ſera iſoſcele. Car la perpendiculaire bd ou BD ſera plus grande en ce cas qu'en tout autre, ce qu'il eſt aiſé de voir, & de-là ſuit le reſte. Cela confirme déja que l'égalité des côtés fait à la grandeur de l'aire, & je commence à préſumer que le Triangle équilatéral ſera le plus grand de tous les iſopérimetres.

Que le Triangle iſoſcele eſt plus grand que tous les Scalenes de même baſe, & iſopérimetres.

1285. Il ſuit de l'art. précédent, que ſi je forme ſucceſſivement différens Triangles avec le fil a, à chaque fois que j'en ai déterminé une portion quelconque pour être la baſe, le Triangle iſoſcele que j'en pourrai former ſera plus grand que tous les Scalenes poſſibles.

1286.

1286. Si je conçois que le Triangle infiniment petit *ABC*, demeurant toujours isoscele, augmente toujours par la diminution successive & graduée de l'angle obtus *ABC* infiniment peu différent de 180, il deviendra tous les Triangles amblygones, tant que l'angle *ABC* sera plus grand que 90, ensuite un Triangle rectangle, quand *ABC* sera de 90, & après cela tous les Triangles oxygones, jusqu'à ce qu'enfin il devienne le Triangle *abc* infiniment petit. Je suppose tous ces Triangles isosceles, parce qu'ils seront toujours plus grands que les Scalenes correspondans qui auront même base (1285). Cette Suite de Triangles isosceles d'abord croissante commencera donc par un Infiniment petit, & se terminera par un Infiniment petit, d'où il suit nécessairement qu'elle aura dans son cours un *plus grand* jusqu'auquel elle croîtra, & après lequel elle décroîtra. De plus, ce *plus grand* sera un Terme naturel, & non pas arbitraire, ce qui est évident, & par conséquent ce sera un Triangle unique & singulier en son espece. Or dans toute cette Suite, il n'y en a que deux ainsi caractérisés, le Triangle rectangle isoscele, & l'équilatéral, ce sera donc l'un des deux.

1287. Je dis que c'est l'équilatéral, & quoique la présomption soit déja forte pour lui, je m'en assure absolument par le calcul.

Chaque côté de cet équilatéral est $= \frac{a}{3}$. Donc la perpendiculaire, menée du sommet sur la base, est $\sqrt{\frac{aa}{9} - \frac{aa}{36}} = \sqrt{\frac{3aa}{36}} = \sqrt{\frac{aa}{12}} = \frac{a}{\sqrt{12}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Donc l'un des deux Triangles égaux, dans lesquels le Triangle total a été divisé, est $\frac{1}{2} \times \frac{a}{2\sqrt{3}} \times \frac{a}{6} = \frac{aa}{24\sqrt{3}}$, & le Triangle total $= \frac{aa}{12\sqrt{3}}$.

Pour avoir l'aire du Triangle rectangle isoscele, j'appelle x un de ses petits côtés. Son périmetre est donc $2x + x\sqrt{2} = a$. Donc $x = \frac{a}{2+\sqrt{2}}$. Donc $xx = \frac{aa}{4+4\sqrt{2}+2} = \frac{aa}{6+4\sqrt{2}}$.

Or la moitié de cette grandeur est l'aire du Triangle, qui est donc $\frac{aa}{12 + 8\sqrt{2}}$.

Donc le Triangle équilatéral est au rectangle isoscele :: $\frac{aa}{12\sqrt{3}} \cdot \frac{aa}{12 + 8\sqrt{2}} :: 12 + 8\sqrt{2} \cdot 12\sqrt{3} :: 3 + 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3}$. Or en quarrant ces grandeurs, on trouvera que la 1re est un peu moindre que 34, & la 2de = 27. Donc le Triangle équilatéral est plus grand que le rectangle, quoique de fort peu.

Que le Triangle équilatéral est le plus grand de tous les isopérimetres.

1288. Donc le Triangle équilatéral est le plus grand de tous les isopérimetres possibles, puisqu'il est plus grand que tous les isosceles, & qu'il n'y a aucun Scalene qui ne soit plus petit qu'un isoscele de même base, selon l'art. 1285.

1289. Pour concevoir distinctement la maniere dont la Suite des Triangles isosceles isopérimetres, commençant par l'amblygone *ABC*, & terminée par l'oxygone *abc*, peut être graduée, il faut concevoir que le Triangle rectangle est précisément au milieu de cette Suite, & fait la séparation des amblygones & des oxygones. L'amblygone qui précede immédiatement ce rectangle a son angle obtus ou du sommet d'une certaine quantité plus grand que 90, & l'oxygone qui suit immédiatement le rectangle a son angle du sommet de la même quantité moindre que 90, & toujours ainsi de suite, de sorte que l'angle *abc* du sommet d'un oxygone quelconque est toujours par là nécessairement double de l'angle *BAD* ou *BCD* de la base de l'amblygone correspondant. Tant que les Triangles sont finis, on peut prendre un degré pour la quantité dont l'angle obtus de chaque amblygone croît à chaque pas, à compter depuis le Triangle rectangle, & pour la quantité dont l'angle du sommet de chaque oxygone décroît aussi à chaque pas. Dans l'Infiniment petit cette égalité d'éloignement, à l'égard du Triangle rectangle, subsiste encore, & l'angle *abc* est double de *BAD* par la même raison que dans le Fini.

1290. On peut donc concevoir la Suite des Triangles ainsi disposée. *ABC*, amblygone infiniment petit, amblygones

finis, amblygone dont l'angle du sommet est de 120, correspondant de l'Equilatéral, amblygones dont l'angle du sommet est moindre que 120, Rectangle au milieu de la Suite, oxygones dont l'angle du sommet est plus grand que 60, Equilatéral le plus grand de tous, oxygones dont l'angle du sommet est moindre que 60, *abc* infiniment petit.

1291. La perpendiculaire *bd*, qui est nécessairement plus grande dans les Triangles oxygones que dans les amblygones, est plus grande dans l'oxygone infiniment petit *abc* qu'elle ne peut être dans aucun oxygone fini, car elle est $= \frac{a}{2}$ (1281), & il est visible que ni cette perpendiculaire, ni même le côté *ab* qui est plus grand, ne peut être dans aucun Triangle fini égal à la moitié du Fil *a*.

1292. De même dans l'amblygone infiniment petit *ABC*, la base $AC = \frac{a}{2}$ (1282) est plus grande qu'elle ne peut jamais être dans aucun Triangle fini.

1293. Dans toute la Suite des Triangles, depuis *ABC* jusqu'à *abc*, les bases vont toujours en décroissant, & les perpendiculaires en croissant.

1294. Dans les deux Triangles extremes infiniment petits, on peut, à cause de l'infinie petitesse, prendre *BD* pour l'arc circulaire décrit du centre *A* & sur le rayon *AB*, qui mesure l'angle *BAD*, & de même *ac* pour l'arc circulaire décrit du centre *b* sur le rayon *ba*, qui mesure l'angle *abc*. Or l'angle *abc* est double de *BAD* (1289), donc l'arc *ac* seroit double de l'arc *BD* s'ils étoient décrits sur le même rayon. Mais de plus le rayon $ba = \frac{a}{2}$, est double de $AB = \frac{a}{4}$ (1282), donc $ac . BD :: 4 . 1$, d'ailleurs $bd = \frac{a}{2} = AC$. Donc $ac \times bd . BD \times AC :: 4 . 1$. Or $ac \times bd$ est à $BD \times AC$ comme l'aire du Triangle *abc* à celle du Triangle *ABC*.

1295. Dans toute la Suite supposée des Triangles, aucun

oxygone fini ne peut avoir un auſſi grand rapport à l'amblygone correſpondant, que celui de l'oxygone extreme *abc* à l'amblygone extreme *ABC*. Car 1°, dans le Fini *ac* eſt la corde de l'arc qui meſure l'angle *abc* dans un Cercle décrit ſur le rayon *ba*, & *BD* eſt le Sinus de l'angle *BAD* dans un Cercle dont le rayon eſt *AB*. Donc l'angle *abc* étant double de *BAD*, *ac* ſeroit double de *BD*, ſi *ba* & *AB* étoient des rayons égaux, puiſque dans un même Cercle la corde du double d'un arc eſt double du Sinus de cet arc. Mais *ba* & *AB* ne ſont pas des rayons égaux. Il eſt bien vrai que *ba*, côté d'un oxygone, eſt toujours plus grand que *AB*, côté d'un amblygone, ce qui rend le rapport de *ac* à *BD* plus que double, mais cela ne peut le rendre quadruple dans le Fini, car il faudroit que *ba* fût double de *AB* comme dans l'Infiniment petit. Or le côté *ba* eſt toujours dans le fini moindre que $\frac{a}{2}$ (1291), & le côté *AB* toujours plus grand que $\frac{a}{4}$, puiſque la baſe $AC = \frac{a}{2}$ dans l'Infiniment petit y eſt la plus grande qu'elle puiſſe être (1292). Donc *ac* ne peut jamais dans le fini être quadruple de *BD*.

2°. Depuis l'amblygone extreme *ABC* juſqu'à l'oxygone extreme *abc*, les perpendiculaires *BD* ou *bd* ont toujours crû, & les baſes *AC* ou *ac* toujours décrû (1293), & la plus grande perpendiculaire *bd*, qui eſt celle du Triangle extreme *abc*, n'eſt qu'égale à la baſe *AC* de l'autre Triangle extreme. Donc dans tout le Fini la perpendiculaire *bd* d'un oxygone quelconque a été moindre que la baſe *AC* de l'amblygone correſpondant.

Donc les aires de deux Triangles correſpondans étant toujours :: $ac \times bd$. $AC \times BD$, *ac* ne pouvant jamais dans le fini être quadruple de *BD*, & *bd* étant toujours moindre que *AC*, il eſt impoſſible que dans le fini $ac \times bd$ ſoit quadruple de $AC \times BD$.

1296. De-là il ſuit que plus deux Triangles correſpondans finis ſont proches des deux extremes, plus l'aire de

l'oxygone est grande par rapport à celle de l'amblygone, quoiqu'elle n'en puisse jamais être quadruple.

1297. Les Triangles correspondans étant toujours pris deux à deux, à commencer par les deux extremes, leurs aires approchent d'autant plus de l'égalité, qu'ils approchent plus de part & d'autre du Triangle rectangle qui fait la séparation des oxygones & des amblygones.

1298. Cependant les deux Triangles les plus proches de part & d'autre du Rectangle n'arrivent point à l'égalité, car le Triangle équilatéral, qui est un oxygone, est le plus grand de toute la Suite (1288); or en commençant toujours la Suite par l'amblygone infiniment petit *ABC*, l'équilatéral est au de-là du rectangle. Donc dans tout l'espace où sont compris les oxygones, depuis l'équilatéral jusqu'au rectangle, & les amblygones depuis le rectangle jusqu'à l'amblygone, dont l'angle obtus est 120, qui est le correspondant de l'équilatéral, chaque amblygone est plus petit que l'oxygone correspondant. De-là il suit que les Triangles correspondans sont seulement d'autant moins inégaux qu'ils sont pris plus proches du Rectangle.

1299. On peut même voir que les Triangles pris, non plus deux à deux de part & d'autre du Rectangle, mais de suite depuis l'amblygone *ABC*, en allant vers l'Equilatéral, sont d'autant moins inégaux entr'eux, qu'ils sont plus éloignés de ce Triangle *ABC* ou de l'origine de la Suite. Ainsi on trouvera, par exemple, que l'amblygone dont l'angle obtus est de 120, & qui est le correspondant de l'Equilatéral, ayant une aire qui est $\frac{\sqrt{3}}{28 \times 16\sqrt{3}}$ égale à très-peu près à $\frac{\sqrt{3}}{55}$, est beaucoup plus petite par rapport à celle du Rectangle qui est $\frac{1}{12 \times 8\sqrt{2}}$ (1287) que celle du Rectangle ne l'est par rapport à celle de l'Equilatéral qui est $\frac{1}{12\sqrt{3}}$. Car les quarrés de la grandeur qui exprime l'aire de l'Amblygone, & de celle qui exprime le Rectangle, sont :: 1587 . 3025. Et les

quarrés des grandeurs qui expriment les aires du Rectangle & de l'Equilatéral, sont :: 27 . 34 (1287).

1300. De-là il suit que les différences des Triangles vont en décroissant, depuis l'Amblygone infiniment petit, du moins jusqu'à l'Equilatéral ; & pour voir si elles passent au de-là en décroissant encore, il faut concevoir une Courbe dont les Ordonnées infiniment proches représentent par leurs rapports, ceux des aires de tous les Triangles possibles infiniment peu différens, depuis l'Amblygone *ABC* jusqu'à l'Oxygone *abc*. Les différences des Ordonnées seront donc décroissantes depuis l'Amblygone *ABC* jusqu'à l'Equilatéral. Mais comme cet Equilatéral est un *plus grand*, la différence y deviendra nécessairement nulle selon la Loi des Courbes, & par conséquent depuis l'Equilatéral jusqu'à l'Oxygone *abc*, les différences des Ordonnées, ou des Triangles seront croissantes.

1301. Cette Courbe sera concave vers son axe dans tout son cours, puisque depuis son origine jusqu'à sa plus grande Ordonnée, ses Ordonnées seront croissantes, & leurs différences décroissantes, & que depuis sa plus grande Ordonnée jusqu'à l'extrémité, les Ordonnées seront décroissantes, & leurs différences croissantes. La Courbe sera parallele à son axe au point de sa plus grande Ordonnée.

1302. Par la formation de cette Courbe qui monte & redescend, & qui par conséquent aura une infinité d'Ordonnées du cours montant égales à d'autres du cours descendant, il est clair qu'il y aura une infinité de Triangles isopérimetres égaux, mais ils ne seront pas correspondans.

1303. On peut penser que le Triangle oxygone extreme a une plus grande aire que l'amblygone correspondant, parce qu'il a une plus grande égalité, ou moindre inégalité de côtés & d'angles. Cela paroît d'abord paradoxe: car l'oxygone ayant un angle infiniment petit & deux finis, un côté infiniment petit & deux finis, il y a une inégalité infinie tant entre deux côtés & le 3[me], qu'entre deux angles & le 3[me], au lieu que dans l'amblygone, les trois côtés étant finis, il n'y

a entr'eux qu'une inégalité finie, & il n'en reste une infinie qu'entre un de ses angles qui est fini, & les deux autres infiniment petits. Mais c'est par cette raison là même que l'amblygone est plus inégal, puisqu'il n'a pas comme l'oxygone la même inégalité entre ses côtés qu'entre ses angles.

1304. Maintenant si avec le Fil a on fait un Quadrilatere, que je suppose être un parallélogramme ou Rhomboïde, dont le côté ab est plus grand que bc, il est clair que la somme de ab & de bc est $= \frac{a}{2}$, & que l'aire du parallélogramme est $ab \times af$, af étant une perpendiculaire qui mesure la distance de ab & de dc. *Quadrilateres isopérimetres aux Triangles précédens.* FIG. XVI.

1305. Si je fais l'angle bad infiniment petit, ce qui rend af infiniment petite, & si en même temps les 4 côtés du Rhomboïde sont finis, l'aire sera $dx \times \frac{a}{n}$, la perpendiculaire af étant appellée dx, & $\frac{a}{n}$ étant l'expression du côté ab, dans laquelle n est un nombre indéterminé qui dépend du rapport que ab aura à bc. Donc l'aire est infiniment petite, & en effet deux côtés consécutifs ab & bc ne sont alors que couchés sur les deux autres presque exactement en ligne droite.

1306. Si je fais le côté AD infiniment petit, les quatre angles étant finis, AF est encore infiniment petite, & AB est $= \frac{a}{2}$. Donc l'aire est $dx \times \frac{a}{2}$, infiniment petite. Il est évident que ce sont là les deux seules manieres dont je puisse faire deux Rhomboïdes infiniment petits. FIG. XVII.

1307. Si je prends celui de la Figure XVI, & qu'en laissant les côtés finis & de la même grandeur, j'augmente toujours également l'angle infiniment petit bad, & que je continue toujours de même après qu'il sera devenu Fini, la perpendiculaire af augmentera toujours, le côté ab demeurant le même, & par conséquent le produit $af \times ab$ sera toujours plus grand, jusqu'à ce qu'enfin l'angle bad soit droit. Donc le parallélogramme rectangle est plus grand que tous les

Rhomboïdes iſopérimetres précédens, qui avoient les mêmes côtés.

1308. Si je continue à augmenter dans la même ſuppoſition l'angle *bad* devenu droit, je ne fais que tranſporter en *a* l'angle obtus qui étoit en *b*, & ce ne ſont que les mêmes Rhomboïdes qu'on avoit eus dans la premiere variation. Donc en général & abſolument le parallélogramme rectangle eſt plus grand que tous les Rhomboïdes iſopérimetres, qui ont les mêmes côtés que ce parallélogramme.

1309. Si dans le Rhomboïde de la Figure XVII, je laiſſe les angles finis tels qu'ils ſont, & que j'augmente toujours le côté infiniment petit *AD*, lors même qu'il ſera devenu Fini, la perpendiculaire *AF* augmente toujours, & en même temps le côté *AB* diminue. Mais à cauſe des angles conſtans le rapport de la perpendiculaire *AF* au côté *AD* eſt toujours le même, de ſorte qu'au lieu du produit $AF \times AB$, on peut prendre $AD \times AB$ qui croîtra comme l'aire. Or puiſque *AD*, plus petit que *AB*, croît tandis que *AB* décroît, & que *AD* ayant été d'abord infiniment petit par rapport à *AB*, le produit $AD \times AB$ a été alors infiniment petit, & le plus petit poſſible, ce produit ne ſera jamais plus grand que dans le cas le plus oppoſé à l'inégalité infinie de *AD* & de *AB*, c'eſt-à-dire, lorſque *AD* ſera $= AB$. Donc la plus grande aire que l'on ait encore eue eſt lorſque $AD = AB$. Or quand cela eſt, chaque côté eſt $= \frac{a}{4}$, & le Rhomboïde eſt devenu Rhombe. Donc le Rhombe eſt plus grand que tous les Rhomboïdes iſopérimetres précédens qui avoient les mêmes angles.

1310. Si on continue d'augmenter le côté *AD*, on ne ſera que rendre à la fin le côté *AB* infiniment petit par rapport à *AD*, au lieu qu'auparavant *AD* l'étoit par rapport à *AB*, & l'on aura repaſſé par les mêmes Rhomboïdes qu'on avoit eus dans la premiere variation. Donc abſolument le Rhombe eſt plus grand que tous les Rhomboïdes iſopérimetres, qui ont les mêmes angles que le Rhombe.

1311.

1311. Donc les Rhomboïdes, qui ont les mêmes côtés, ſont d'autant plus grands que leurs deux angles, l'obtus & l'aigu, ſont moins inégaux (1307), & les Rhomboïdes qui ont les mêmes angles, ſont d'autant plus grands que leurs côtés ſont moins inégaux (1309). Donc l'égalité, ſoit des côtés, ſoit des angles du Quadrilatere, fait à la grandeur de l'aire.

1312. A meſure que je rendrai moins inégaux les côtés du parallélogramme rectangle, qui eſt plus grand que tous les Rhomboïdes iſopérimetres qui ont les mêmes côtés (1307), ou à meſure que je rendrai moins inégaux les angles du Rhombe qui eſt plus grand que toutes les Rhomboïdes qui ont les mêmes angles (1310), j'aurai de plus grandes aires. Donc enfin j'aurai un Quarré, dont l'aire $= \frac{aa}{16}$ ſera plus grande que celle de tout autre Quadrilatere. *Que le Quarré eſt le plus grand de tous les Quadrilateres iſopérimetres.*

1313. Si je compare à l'aire du Quarré celle du Triangle équilatéral qui eſt $\frac{aa}{12\sqrt{3}}$ (1287), je vois qu'elles ſont $:: 12\sqrt{3} . 16 :: 3\sqrt{3} . 4$. Or le quarré de la 1[re] eſt 27, & celui de la 2[de] 16, d'où il eſt aiſé de voir que l'aire du Quarré eſt la plus grande, & qu'elle eſt à celle du Triangle comme un peu plus de 5 à 4. *Et plus grand que le Triangle équilatéral iſopérimetre.*

1314. Si je cherche pourquoi l'aire du Quarré eſt plus grande que celle du Triangle équilatéral, les côtés & les angles étant égaux dans l'une & dans l'autre Figure, je ne vois nul autre principe d'augmentation que le nombre des côtés du Quarré plus grand que celui des côtés du Triangle, d'où je commence à juger que la multitude des côtés fait à la grandeur de l'aire auſſi-bien que l'égalité des côtés & des angles.

Et en effet, cela doit être ainſi. Le Fil *a* ne peut embraſſer un eſpace, s'il ne s'écarte de lui-même, & par conſéquent ne ſe diviſe en parties : car s'il demeure étendu en ligne droite, il n'embraſſera pas d'eſpace, & non pas même encore s'il n'eſt diviſé qu'en deux parties égales ou inégales. Puiſqu'il faut que pour embraſſer un eſpace il ſe diviſe en parties, & en plus de deux, il faut pour embraſſer un plus grand eſpace, qu'il ſe

divise en un plus grand nombre de parties, car moins il y en auroit, plus aussi ces parties auroient de grandes étendues en ligne droite, & plus elles tiendroient de la disposition où le Fil *a* ne peut embrasser d'espace. On voit aussi par là que le nombre des parties étant le même, elles embrassent un plus grand espace quand elles sont égales; car si elles ne le sont pas, les grandes qui sont de grandes étendues en lignes droites, tiennent trop de la disposition desavantageuse. Enfin le nombre des parties égales étant le même, il est clair que plus elles s'écarteront les unes des autres, plus elles embrasseront un plus grand espace. Or elles ne s'écarteront jamais davantage les unes des autres qu'en s'écartant toutes également. Car autrement celles qui s'écarteroient le plus dans la 1re moitié du Fil *a*, par exemple, obligeroient celles de la 2de moitié à se rapprocher non-seulement les unes des autres, mais encore de celles de la 1re moitié. Donc en rassemblant tout, la multitude des côtés, leur égalité, & l'égalité des angles font la plus grande aire.

Que le Pentagone régulier est plus grand que le Quarré isopérimetre.

1315. Et pour m'en assurer encore par le calcul, je cherche l'aire du Fil *a*, devenu Pentagone régulier.

Le côté d'un Pentagone inscrit dans un Cercle, dont le rayon est r, est $\frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$. Pour la facilité du calcul, soit $\sqrt{10-2\sqrt{5}}=x$. Donc le côté du Pentagone est $\frac{rx}{2}=\frac{a}{5}$. Donc le rayon du Cercle dans lequel seroit inscrit le Pentagone, dont le côté est $\frac{a}{5}$, est $\frac{2a}{5x}$. La perpendiculaire menée du centre de ce Cercle sur le côté du Pentagone est $\frac{a\sqrt{16-xx}}{10x}$, & l'aire du Triangle isoscele dont ce côté du Pentagone est la base, est $\frac{a\sqrt{16-xx}}{10x}\times\frac{a}{10}=\frac{aa\sqrt{16-xx}}{100x}$, & cinq fois ce Triangle où l'aire du Pentagone est $\frac{aa\sqrt{16-xx}}{20x}$. Or $x =$

$= \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, & $xx = 10 - 2\sqrt{5}$, & par conséquent $\frac{aa\sqrt{16 - xx}}{20x} = \frac{aa\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}{20\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$. Donc $\frac{aa}{16}$, aire du Quarré, est à celle du Pentagone :: $\frac{1}{16} . \frac{\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}{20\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$. En quarrant ces deux grandeurs on a $\frac{1}{256}$ & $\frac{6 + 2\sqrt{5}}{400 \times \overline{10 - 2\sqrt{5}}}$. Si je prens $\sqrt{5} = 2\frac{1}{5} = \frac{11}{5}$, je fais $\sqrt{5}$ trop petite, comme il sera aisé de le voir, & par conséquent la grandeur $\frac{6 + 2\sqrt{5}}{400 \times \overline{10 - 2\sqrt{5}}}$, qui représente le Pentagone, sera trop petite, puisque son numérateur sera trop petit, & son dénominateur trop grand. Cependant dans cette supposition on a $6 + 2\sqrt{5} = 6 + \frac{22}{5} = \frac{52}{5}$, & $400 \times \overline{10 - 2\sqrt{5}} = 400 \times \frac{28}{5} = 2240$, & $\frac{52}{5}$ divisé par $2240 = \frac{52}{11200}$. Et l'on trouvera $\frac{1}{256} . \frac{52}{11200}$ :: 175 . 208. Donc les quarrés des nombres qui expriment les rapports des aires du Quarré & du Pentagone sont :: 175 . 208, & ces aires :: $\sqrt{175} . \sqrt{208}$, c'est-à-dire, comme un nombre un peu plus grand que 13 à un autre un peu plus grand que 14, & d'ailleurs encore un peu plus grand, parce que $\sqrt{5} > \frac{11}{5}$.

1316. De même on trouvera que l'aire de l'Exagone est $\frac{aa}{2\sqrt{48}}$ ou $\frac{1}{2\sqrt{48}}$. Le quarré du nombre qui exprime celle du Pentagone est $\frac{52}{11200}$ (1315) $= \frac{13}{2800}$. Donc l'aire de l'Exagone est à celle du Pentagone :: $\frac{1}{2\sqrt{48}} . \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{700}}$ :: $2\sqrt{700} . 2\sqrt{624}$ :: $\sqrt{700} . \sqrt{624}$, c'est-à-dire, comme un nombre entre 26 & 27 est à 25, à très peu-près. Tout cela avec le raisonnement de l'art. 1314, m'assure suffisamment que j'augmenterai toujours les aires à mesure que je *Et l'Exagone plus grand que le Pentagone.*

multiplierai le nombre des côtés, en conservant leur égalité & celle des angles.

Que le Cercle est plus grand que tous les Polygones isopérimetres.

1317. Donc la plus grande aire que je puisse former avec le Fil a, est celle d'un Polygone infini qui aura tous ses côtés & tous ses angles égaux, c'est-à-dire, celle d'un Cercle.

1318. La circonférence du Cercle étant a, le rayon est un peu moindre que $\frac{a}{6}$. Donc l'aire du Cercle est un peu moindre que $\frac{aa}{12}$. Or l'aire du Triangle équilatéral, moindre que celle de tous les Polygones réguliers isopérimetres qui ont plus de 3 côtés, est exactement $\frac{aa}{12\sqrt{3}}$. Donc l'aire du plus petit Polygone régulier est à celle du plus grand :: 12 . $12\sqrt{3}$ :: 1 . $\sqrt{3}$, ou un peu moins que $\sqrt{3}$, puisque l'aire du Cercle a été posée trop grande. Donc l'aire du Polygone, qui a le plus de côtés, est assez éloignée d'être double de celle du Polygone qui en a le moins.

1319. Donc dans tout le chemin que font les aires des Polygones réguliers isopérimetres, en croissant depuis le Triangle équilatéral jusqu'au Cercle par l'augmentation successive du nombre de leurs côtés, elles ne vont point de 1 jusqu'à 2 ; & comme cet espace fini, divisé par une infinité de Polygones, ne le peut être qu'en un nombre fini de parties finies, & en un infini d'infiniment petites, il n'y a qu'un nombre fini de Polygones réguliers qui aient des différences finies à l'aire du Cercle, & il y en a une infinité dont le nombre des côtés est toujours plus grand, qui n'ont à cette aire que des différences infiniment petites. Donc la confusion ou l'identité d'un Polygone infini avec le Cercle, conçue & supposée par les Géometres, est infiniment mieux fondée & plus légitime qu'ils n'ont peut-être eux-mêmes pensé.

1320. A compter depuis le Triangle équilatéral jusqu'au Cercle, les aires croissantes des Polygones réguliers isopérimetres ont des différences décroissantes, & après un nombre fini indéterminable de différences finies, elles en ont une infinité d'infiniment petites.

1321. Il est bon de remarquer que quand les Géometres ont conçu l'identité du Cercle avec un Polygone infini, ç'a été en inscrivant successivement dans un même Cercle différens Polygones dont le nombre des côtés étoit toujours plus grand, & le périmetre plus grand aussi. Ici le périmetre des Polygones est toujours égal, & les Cercles où ils seroient inscrits, seroient toujours plus petits, comme il sera aisé de le voir. Mais cela n'empêche pas que ce qui vient d'être dit sur l'indentité des Polygones infinis & du Cercle ne soit toujours vrai. On trouvera même que selon la premiere maniere de la concevoir, l'aire de l'Exagone sera à celle du Cercle : : $\sqrt{3}$. 2 plus quelque petite grandeur, d'où suit tout le raisonnement de l'art. 1319.

1322. L'avantage qu'un Polygone tire de la multiplication infinie de ses côtés n'est pas infini, & il est bien éloigné de l'être. Donc il peut être égalé, & même surpassé par celui qu'un autre Polygone d'un nombre fini de côtés tirera de l'égalité de ses côtés ou de ses angles. Donc une Courbe peut avoir une aire moindre qu'une Figure rectiligne isopérimetre. Et en effet, il est aisé de concevoir une Ellipse si allongée, que l'aire d'un Triangle, même scalene, seroit beaucoup plus grande.

1323. Une Courbe pouvant toujours être conçue comme divisée en côtés égaux, & par conséquent deux Courbes isopérimetres qui enferment toutes deux un espace, étant conçues comme divisées en un nombre infini égal de côtés égaux, & entr'eux, & ceux de l'une à ceux de l'autre, il n'est plus question pour l'aire que de considérer les angles de contingence des deux Courbes, ou leurs courbures, & celle qui d'une extrémité de son cours à l'autre aura la courbure la moins inégale, aura la plus grande aire.

1324. Donc de toutes les Courbes isopérimetres, le Cercle est celle qui a la plus grande aire. *Et plus que toutes les Courbes isopérimetres.*

1325. a étant le grand axe d'une Ellipse, & b le parametre de a, la courbure de l'origine de l'Ellipse surpasse d'autant plus celle du quart, ou, ce qui est la même chose, la *Que l'aire de l'Ellipse est*

d'autant moindre que sa courbure est plus inégale, & au contraire.

courbure de l'Ellipse est d'autant plus inégale, que *a* est plus grand par rapport à *b* (1088), ou, ce qui revient au même, quand le grand axe est plus grand par rapport au petit. Donc de deux Ellipses isopérimetres, celle où le grand axe est plus grand par rapport au petit, est celle qui a la plus petite aire, & elle l'a d'autant plus petite, que le grand axe est plus grand par rapport au petit.

1326. Si le petit axe étoit, non pas absolument nul, ce qui empêcheroit l'Ellipse d'être Ellipse, mais infiniment petit, l'Ellipse seroit une ligne qui auroit d'abord dans une étendue infiniment petite une courbure elliptique, & ensuite ne seroit qu'une droite couchée le long de son grand axe jusqu'à son extrémité, où elle auroit une courbure pareille à celle de l'origine. Il est visible que par-là il arriveroit en même temps qu'elle auroit & une aire infiniment petite, & une inégalité infinie de courbure, puisqu'ayant eu d'abord une courbure ordinaire & finie, elle n'en auroit ensuite qu'une qui seroit nulle. Donc l'inégalité infinie de courbure, & l'aire infiniment petite sont deux choses nécessairement liées dans l'Ellipse.

1327. On ne pourroit pas faire sur le Cercle cette supposition d'un axe infiniment petit, l'autre étant fini, parce qu'il lui est essentiel d'avoir ses deux axes égaux : mais on la pourra faire sur toutes les Courbes qui, comme l'Ellipse, renferment un espace par leur circonférence seule, & qui ont leurs axes inégaux, ou, ce qui est le même, une plus grande Ordonnée & l'Abscisse correspondante inégales. Donc en général dans toutes ces Courbes l'inégalité infinie de courbure produira une aire infiniment petite.

Et de même pour toutes les Courbes qui renferment seules un espace.

1328. Donc en général, ces Courbes étant isopérimetres, plus leur courbure sera inégale, plus leur aire sera petite, & au contraire.

Que dans les espaces renfermés en partie par des

1329. Si les Courbes ne renferment pas seules un espace, mais qu'elles ne le renferment qu'avec une Abscisse & une Ordonnée, comme une Parabole, une Hyperbole, &c. ce qui est le plus ordinaire, il faut, au lieu de supposer les Courbes entieres isopérimetres, en prendre des Arcs qui soient de

part & d'autre d'une même longueur, les prendre avec les Abſciſſes & les Ordonnées qui leur appartiennent, & voir quelles ſont les aires.

Courbes, une courbure moins inégale produit un plus grand eſpace, le reſte étant égal.

Si l'on compare l'aire d'un Quart de Cercle à celle du Triangle rectangle, dont l'hypotenuſe ſeroit la Corde de 90 degrés, & les deux autres côtés, les deux rayons du Cercle qui font l'angle droit, il eſt bien clair que l'aire du Quart de Cercle eſt plus grande que celle du Triangle, mais auſſi l'hypotenuſe du Triangle eſt moindre que l'arc de 90. Faiſons la égale à cet arc. Si la circonférence du Cercle eſt $= a$, cette hypotenuſe ſera $= \frac{a}{4}$, & ſon quarré $\frac{aa}{16}$ ſera quadruple de l'aire du Triangle rectangle iſoſcele, dont elle eſt l'hypotenuſe. Donc l'aire de ce Triangle eſt $\frac{aa}{64}$. Si l'on prend l'aire du Cercle pour exactement $= \frac{aa}{12}$, celle du Quart eſt $\frac{aa}{48}$, & elle eſt à celle du Triangle :: 64 . 48 :: 4 . 3. Mais il eſt vrai que $\frac{aa}{12}$ eſt une quantité un peu plus grande que l'aire du Cercle, ou que cette aire eſt aa diviſé par un nombre un peu plus grand que 12, ce qui rendra le rapport du Quart de Cercle au Triangle moindre que celui de 4 à 3 : mais il ſera toujours certainement très-éloigné de l'égalité.

Il eſt de plus à remarquer que dans ce Triangle rectangle iſoſcele, dont l'hypotenuſe eſt $\frac{a}{4}$, chacun des deux côtés égaux eſt $\frac{a}{\sqrt{32}}$, le rayon du Cercle ſuppoſé étant $\frac{a}{6}$, ou un peu moindre. Or $\frac{a}{\sqrt{32}} . \frac{a}{6} :: 6 . \sqrt{32}$. Donc un des petits côtés du Triangle eſt plus grand que le rayon du Cercle. Donc le Triangle dont le périmetre total ſont l'hypotenuſe égale à l'arc de 90, & deux côtés égaux plus grands que le rayon du Cercle, a un plus grand périmetre total que le Quart de Cercle, & cependant il a une moindre aire, ce qui ne peut venir que de l'avantage que donne au Quart de Cercle, le nombre infini des côtés de ſon arc de 90, tandis que l'hypotenuſe du Triangle égale à cet arc n'eſt qu'une ligne droite.

Donc en général deux Trilignes étant posés, l'un mixtiligne formé d'une Courbe avec son Abscisse & son Ordonnée, l'autre rectiligne formé d'une droite égale à cette Courbe, & de deux autres droites, si ces droites sont égales à celles du Triligne mixtiligne, celui-ci aura une plus grande aire que l'autre; & quand même les deux droites du rectiligne seront plus grandes que celles du mixtiligne, ce qui donnera au rectiligne un plus grand périmetre total, l'aire du mixtiligne pourra encore être plus grande; & tout le reste étant égal, l'aire du mixtiligne sera d'autant plus grande par rapport à celle du rectiligne, que la Courbe du mixtiligne aura une courbure moins inégale.

Ce que produit par rapport à l'aire des Courbes d'un cours infini & d'une égale longueur l'inégalité de leur courbure, lorsqu'elle devient nulle à leur extrémité.

1330. S'il s'agit des aires de Courbes d'une égale longueur, mais qui aient un cours infini, on peut déja conjecturer que le plus ou le moins d'inégalité de leur courbure fera à leur aire, car le nombre infini de côtés étant égal, ne sera plus à considérer; & qu'une inégalité infinie de courbure produira, non plus une aire infiniment petite, ce qui n'est plus possible ici, mais la plus petite aire qu'il se puisse. Cela demande des considérations plus détaillées.

L'inégalité de courbure ne peut être infinie, que quand la courbure ayant été ordinaire & finie, elle devient nulle ou infinie. Je ne vais prendre d'abord pour inégalité infinie de courbure que celle qui consiste en ce que la courbure ayant été finie devient nulle.

Un espace quelconque est formé de deux dimensions, & jamais il ne peut être plus grand que quand elles sont toutes deux à la fois les plus grandes qu'il se puisse, & jamais elles ne sont plus grandes toutes deux à la fois, que quand elles sont égales. Un espace mixtiligne ou curviligne a ses deux dimensions, dont l'une est dans le sens de l'axe ou des Abscisses, l'autre dans celui des Ordonnées; & jamais il n'est plus grand que quand les Abscisses approchent le plus qu'il est possible d'être égales aux Ordonnées correspondantes, ou, ce qui est le même, le mouvement horisontal de la Courbe au vertical.

Si

Si la courbure de la Courbe devient nulle dans une étendue finie, c'eſt-à-dire, ſi la Courbe dans cette étendue devient droite, cette droite eſt ou parallele ou perpendiculaire ou oblique à l'axe. Si elle eſt parallele, alors le mouvement horiſontal ſubſiſte, & le vertical ceſſe, & l'eſpace curviligne ne croît plus que ſelon une dimenſion, & par conſéquent moins que s'il avoit crû ſelon les deux. C'eſt la même choſe, mais ſeulement en ſens contraire, ſi la droite eſt perpendiculaire. Si elle eſt oblique, l'eſpace a crû ſelon les deux dimenſions.

La condition, que la Courbe devienne droite dans une étendue au moins finie, eſt néceſſaire par rapport à la diminution de l'eſpace curviligne : car la Courbe devenue droite dans une étendue infiniment petite, ou de pluſieurs côtés en nombre fini, ne produiroit dans l'aire qu'une diminution infiniment petite, qui ne ſeroit point à compter.

Une Courbe peut devenir droite dans une étendue infinie auſſi-bien que dans une finie (1179, &c. 1182).

L'inégalité infinie de courbure ne produit une diminution d'aire que dans les Courbes qui, dans des étendues au moins finies, deviennent des droites paralleles ou perpendiculaires à l'axe : car ce n'eſt qu'alors que l'un des deux mouvemens devient nul par rapport à l'autre.

La courbure nulle dans une étendue finie ou infinie, ne peut arriver qu'à la fin du cours infini des Courbes. Tout cela poſé,

1331. Je ſuppoſe 1° que la variation de la courbure ait été ſans changement de l'origine à l'extrémité, ou, ce qui eſt le même, que la courbure ait toujours été décroiſſante. Je ſuppoſe, 2° que les aires formées d'une Courbe infinie, de ſon axe & de ſa derniere Ordonnée, ſont croiſſantes depuis l'origine juſqu'à l'extrémité. Toutes les Courbes d'un cours infini étant conçues ici d'une même longueur, ou égales à la même droite infinie, il eſt viſible, par tout ce qui vient d'être dit, que celles qui ont une inégalité infinie de courbure, & en même temps deviennent à leur extrémité paralleles ou

perpendiculaires à leur axe dans une étendue finie, ont une moindre aire que si leur position extreme à l'égard de l'axe demeurant la même, elles ne l'avoient pas eue dans une étendue finie, ou, ce qui est le même, n'avoient pas eu l'inégalité infinie de courbure, telle qu'on la prend ici. Car leur aire devient plus petite par deux causes; la 1[re], parce que de leurs deux dimensions, l'horisontale ou parallele, & la verticale ou perpendiculaire, l'une cesse de croître, tandis que l'autre croît, & que par conséquent elles s'éloignent de l'égalité. La 2[de], parce que dans l'étendue finie où ces Courbes sont droites, elles perdent, par rapport à la grandeur de l'aire, l'avantage qui résulte de la multitude des côtés.

1332. Plus l'inégalité infinie de courbure est grande dans les Courbes paralleles ou perpendiculaires à l'extrémité, plus l'aire est petite; & par conséquent l'inégalité infinie de courbure qui change la Courbe en droite dans une étendue infinie, étant infiniment plus grande que celle qui ne la change en droite que dans une étendue finie, l'aire doit être alors infiniment plus petite. Car si une Courbe à son extrémité n'est parallele à son axe que dans une étendue finie, il n'y a que cette étendue où le mouvement vertical ait cessé, & il a cru avec l'horisontal dans une étendue infinie: mais si la Courbe parallele est droite dans une étendue infinie, son mouvement vertical a cessé dans cette étendue, l'horisontal continuant de croître, & ils n'ont crû tous deux ensemble que dans une étendue finie, ce qui doit faire une différence d'ordre entre les deux différentes aires. En effet, si on compare l'aire de la Parabole, qui n'est droite que dans une étendue finie (1182), & qui a une derniere Ordonnée $= \infty^{\frac{1}{2}}$ (964), & l'aire d'une Courbe Asymptotique droite par conséquent dans une étendue infinie, parallele à son extrémité, & dont la derniere Ordonnée ne pourra être que finie, selon la 2[de] supposition de l'art. 1331, on trouvera que leurs axes étant nécessairement infinis, les deux aires seront, quant à l'ordre, $:: \infty \times \infty^{\frac{1}{2}} . \infty \times 1 :: \infty^{\frac{1}{2}} . 1.$

1333. L'Hyperbole rapportée à son premier axe, ou axe traversant, n'est point dans le cas des Courbes, dont l'inégalité infinie de courbure diminue infiniment l'aire, quoiqu'elle ait cette inégalité infinie de courbure, & une Asymptote. Cela vient de ce que l'Hyperbole se termine par être ligne droite infinie oblique à son axe d'une certaine obliquité déterminée par le rapport de ses deux axes conjugués (953) ; ainsi ses deux mouvemens, l'horisontal & le vertical, sont toujours subsistans, & sa derniere Ordonnée infinie aussi-bien que son axe. Son aire est donc un Infini du 2^d ordre.

1334. Mais entre toutes les Hyperboles de même longueur, j'entens celles du 2^d degré, & dont les axes conjugués auront tous les différens rapports finis possibles, celle qui aura la plus grande aire infinie du 2^d ordre sera l'Hyperbole équilatere, parce que ses deux axes conjugués étant égaux, sa derniere Ordonnée & son axe le seront aussi, & par conséquent les deux dimensions horisontale & verticale, ou les deux mouvemens par où elle se terminera.

Qu'entre toutes les Hyperboles de même longueur, & du 2^d degré, l'Equilatere est celle qui a la plus grande aire infinie.

1335. Plus les deux axes conjugués seront inégaux, plus seront petites les aires infinies des Hyperboles de même longueur.

1336. Ce n'est que la derniere Ordonnée de l'Hyperbole équilatere qui devient exactement égale à son axe infini, jusque là les Ordonnées ont toujours été moindres que les Abscisses, mais elles ont toujours tendu à leur être égales, & leur ont été toujours moins inégales depuis l'origine de l'Hyperbole jusqu'à son extrémité. Donc si l'on prend, à commencer à l'origine, un arc Hyperbolique quelconque avec son Abscisse & son Ordonnée ; si ensuite on prend l'arc suivant de la même longueur, & que par le premier point de ce 2^d arc on tire une parallele à l'axe jusqu'à ce qu'elle rencontre l'Ordonnée de l'extrémité de ce 2^d arc, on aura un 2^d espace Hyperbolique compris entre le 2^d arc, la parallele à l'axe, & la différence finie des deux Ordonnées extremes des deux arcs; & je dis que ce 2^d espace sera plus grand que le 1er, puisque le mouvement vertical n'y sera pas si inégal à l'horisontal que

Que l'Hyperbole équilatere étant divisée en arcs égaux, certains espaces qu'ils détermineront, seront croissans depuis l'origine jusqu'à l'extrémité.

dans le 1er. Donc si l'on conçoit toute l'Hyperbole équilatere divisée en arcs égaux, qui servent à former des espaces pareils à ceux qu'on vient de déterminer, ces espaces iront toujours en croissant jusqu'au dernier, qui ne sera que rectiligne, puisque l'Hyperbole est alors ligne droite, & sera un triangle rectangle isoscele.

1337. Quoique l'hypotenuse de ce Triangle n'ait pas la multitude infinie des côtés qu'avoient les arcs Hyperboliques égaux dans d'autres Trilignes pareils, ce desavantage sera surpassé par l'avantage qu'il tire de l'égalité de ses deux dimensions.

Et de même dans les autres Hyperboles.

1338. Il en ira de même des Hyperboles non équilateres. Leurs espaces ainsi pris, moindres que les correspondans de l'Hyperbole équilatere, seront toujours croissans, parce qu'ils tendront toujours & arriveront enfin à la moindre inégalité possible, entre une Abscisse & une Ordonnée, ou, plus exactement parlant, entre le mouvement horisontal & le vertical.

Que ce sera le contraire dans la Parabole.

1339. Ce sera le contraire de la Parabole où l'on prendra des espaces de cette même maniere. Son parametre étant a, tant que l'on prendra des Abscisses x moindres que a, les Ordonnées seront plus grandes que ces Abscisses, mais les unes & les autres tendront à l'égalité, & y arriveront lorsque x sera $= a$, après quoi les Ordonnées seront toujours moindres que les Abscisses. Donc si l'on prend un 1er arc Parabolique, tel que x soit $= a = y$, & qu'on prenne l'arc suivant de la même longueur, & que par le premier point de ce 2^d^ arc, on tire une parallele à l'axe jusqu'à la rencontre de l'Ordonnée extreme de ce 2^d^ arc, ce 2^d^ espace sera moindre que le 1er, le 3me déterminé de même moindre que le 2^d^, & toujours ainsi de suite. Et en effet, la Parabole devenant à son extrémité une ligne droite finie parallele à son axe, le dernier espace ne pourra être qu'infiniment petit.

1340. L'espace Parabolique déterminé par un arc tel que $x = y = a$, est plus grand que tout espace Hyperbolique déterminé par un arc de même longueur, & pris comme celui de la Parabole, à l'origine de la Courbe, car nul arc Hyperbolique n'aura cette égalité de x & de y.

1341. S'il faut courber le Fil *a* en un arc ou Parabolique ou Hyperbolique, à commencer à l'origine de la Courbe, & tel que l'eſpace qu'il déterminera ſoit le plus grand qu'il ſe puiſſe, il faut le courber en arc Parabolique, tel que l'on y ait $x = y$.

1342. Si avec la même condition du plus grand eſpace, il ne faut courber le Fil qu'en arc Hyperbolique, à commencer à l'origine de la Courbe, il faut le courber en arc d'Hyperbole équilatere.

1343. S'il faut le courber en arc Parabolique, qui ne commence pas à l'origine de la Courbe, il faut le courber en arc qui en ſoit le plus près qu'il ſe pourra; & au contraire, s'il s'agit de le courber en arc Hiperbolique.

Que l'inégalité d'une courbure qui ſe termine par être infinie, ne produit rien préciſément par rapport à l'aire.

1344. Juſqu'ici nous n'avons conſidéré que ce que produit par rapport à l'aire, l'inégalité infinie de la courbure devenue nulle à l'extrémité dans une étendue au moins finie. On pourroit juger d'abord que l'inégalité infinie de la courbure devenue infinie comme à l'extrémité de la Cycloïde (1119, 1120), devroit produire auſſi quelque effet par rapport à l'aire. Mais elle n'en produit abſolument aucun. La courbure infinie de l'extrémité de la Courbe vient de ce que ſon dernier côté n'eſt qu'un Infiniment petit du 2^d ordre (911), ou nul par rapport à tous les précédens, & ce manquement ſubit d'un côté ne fait rien ni au perimetre ni à l'aire, & n'empêche pas que la Courbe n'ait eu dans ſon cours une courbure comparable à celle de toute autre Courbe, & plus ou moins inégale.

Que la Cycloïde qui à ſon extrémité a une courbure infinie, a une aire plus grande ou plus petite que différentes demi-Ellipſes de même longueur qu'elle.

1345. Pour m'en aſſurer par le calcul, je compare l'aire d'une Cycloïde à une aire Elliptique; & parce que la Cycloïde eſt terminée par ſa baſe comme une demi-Ellipſe le ſeroit par un de ſes deux axes, je ne prens qu'une aire de demi-Ellipſe.

La baſe de la Cycloïde eſt $= c$, circonférence du Cercle générateur, dont le diametre eſt $\frac{c}{x}$, x étant un nombre inconnu un peu plus grand que 3. Il eſt démontré que la

circonférence de la Cycloïde eſt quadruple du diametre du Cercle générateur, donc elle eſt $= \frac{4c}{x}$, donc la circonférence d'une demi-Ellipſe iſopérimetre eſt auſſi $\frac{4c}{x}$, & elle eſt à celle du Cercle générateur :: $\frac{4c}{x} . c$ :: $4 . x$. La circonférence de l'Ellipſe entiere feroit donc à celle du Cercle générateur :: $8 . x$.

Si un Cercle avoit la même circonférence que l'Ellipſe entiere, ſon aire ſeroit à celle du Cercle générateur :: $64 . xx$, & l'aire du demi-Cercle à celle du Cercle générateur :: $32 . xx$. Or nulle demi-Ellipſe iſopérimetre à ce demi-Cercle ne peut avoir une auſſi grande aire que lui. Donc toute demi-Ellipſe iſopérimetre à la Cycloïde aura une aire dont le rapport à l'aire du Cercle générateur ſera moindre que celui de 32 à xx.

L'aire de la Cycloïde eſt à celle du Cercle générateur :: $3 . 1$. Donc x étant un nombre ſeulement un peu plus grand que 3, il peut y avoir une infinité de rapports moindres que celui de 32 à xx, ou dans leſquels il entre un nombre moindre que 32, & qui cependant ſoient plus grands que celui de 3 à 1, c'eſt-à-dire, qu'il peut y avoir une infinité de demi-Ellipſes iſopérimetres à la Cycloïde, & qui auront de plus grandes aires.

Mais par la même raiſon il y aura une infinité beaucoup plus grande de demi-Ellipſes qui auront de moindres aires que la Cycloïde.

Donc quoique la Cycloïde ait de ſon ſommet à ſes deux extrémités une inégalité infinie de courbure, elle n'a pas par cette raiſon une moindre aire que les Courbes iſopérimetres, & quand elle en a une moindre, c'eſt parce que ſon inégalité de courbure eſt plus grande dans tout ſon cours, où le dernier côté n'eſt point compté.

1346. De toutes les demi-Ellipſes, celle qu'il eſt le plus naturel de comparer à la Cycloïde, eſt celle qui aura pour grand axe la baſe c de la Cycloïde, & pour la moitié du petit,

le diametre $\frac{c}{x}$ du Cercle générateur. L'Ellipse entiere seroit circonscrite à un Cercle dont le diametre seroit $\frac{2c}{x}$, & par conséquent l'aire Elliptique seroit à celle du Cercle inscrit $:: c . \frac{2c}{x} :: x . 2$, & la moitié de l'aire Elliptique à l'aire de ce Cercle $:: x . 4$. Or ce Cercle inscrit est au générateur de la Cycloïde $:: 4 . 1$. Donc l'aire de la demi-Ellipse est à celle du Cercle générateur $:: x . 1$, & à celle de la Cycloïde $:: x . 3$, c'est-à-dire, de bien peu plus grande.

On trouvera en même temps que la demi-Ellipse est à très-peu près isopérimetre à la Cycloïde. L'aire Elliptique entiere étant à celle du Cercle inscrit $:: x . 2$, si cette aire, au lieu d'être celle d'une Ellipse, étoit celle d'un nouveau Cercle que j'imagine, la circonférence de ce nouveau Cercle seroit à celle du Cercle inscrit à l'Ellipse $:: \sqrt{x} . \sqrt{2}$. Donc la circonférence du nouveau Cercle seroit à celle du Cercle générateur la moitié moindre que celle de l'inscrit $:: 2\sqrt{x} . \sqrt{2}$. Donc $\sqrt{2}$ exprimant la circonférence du Cercle générateur, $\frac{\sqrt{2}}{x}$ exprimera son diametre. Donc la circonférence du nouveau Cercle sera au diametre du Cercle générateur $:: 2\sqrt{x} . \frac{\sqrt{2}}{x} :: 2x\sqrt{x} . \sqrt{2}$. Et comme on ne veut comparer à la Cycloïde qu'une demi-Ellipse, il ne faut prendre que la demi-circonférence du nouveau Cercle qui tient la place de l'Ellipse. Donc cette demi-circonférence seroit au diametre du Cercle générateur $:: x\sqrt{x} . \sqrt{2}$. Si x n'étoit que 3, les quarrés de $x\sqrt{x}$ & de $\sqrt{2}$ seroient 27 & 2, & s'ils avoient été 32 & 2, ou 16 & 1, la demi-circonférence du nouveau Cercle & le diametre du Cercle générateur auroient été $:: 4 . 1$, ce qui est le rapport de la Cycloïde au diametre du Cercle générateur, & par conséquent la demi-circonférence du nouveau Cercle auroit été égale à la Cycloïde. Mais il est certain que $x > 3$, ce qui rapproche x^3 de 32; & de plus il faut remettre une demi-Ellipse à la place de la demi-circonférence du

nouveau Cercle. Or comme on avoit supposé l'aire Elliptique & la Circulaire égales, la circonférence Elliptique est nécessairement plus grande, & par cette raison x^3 s'approche encore plus de 32. Donc la demi-Ellipse est à peu-près isopérimetre à la Cycloïde.

1347. On voit par-là en général que deux arcs égaux de Courbes différentes, approchent fort d'avoir des aires égales, quand leurs Abscisses & leurs Ordonnées sont égales, ce qui revient aux art. 1330, 1334, &c.

1348. Si deux arcs égaux de Courbes différentes sont tels que leurs courbures extremes aient le même rapport aux courbures de l'origine, c'est la même chose que si deux Suites d'un nombre égal de termes étoient comprises entre les mêmes extremes: celle qui approcheroit le plus d'une progression arithmétique, diviseroit l'intervalle plus également, & celle qui approcheroit le plus d'une progression géométrique, le diviseroit plus inégalement. Donc en examinant selon cette vûe la variation de la courbure des deux arcs, on verroit laquelle seroit la moins inégale, & par conséquent lequel des deux arcs contiendroit avec son Abscisse & son Ordonnée la plus grande aire.

Par toute cette Théorie, on voit pourquoi dans l'excellent Mémoire que l'illustre M. Bernoulli a donné à l'Académie des Sciences sur cette matiere, dans les Mém. de l'Acad. de 1706, il détermine les plus grandes aires des Courbes isopérimetres par un certain rapport constant des Sinus des courbures.



SECTION

SECTION V.

De la formation des Lignes par des Points, des Plans par des Lignes, & des Solides par des Plans.

QUOIQU'IL paroiſſe par le titre de cette Section que nous n'y pouvons dire que des choſes très-communes, & trop élémentaires pour mériter d'être dites, nous eſpérons ne pas tomber tout-à-fait dans ce défaut. On conçoit ordinairement les Lignes comme formées par des Points, les Plans par des Lignes, les Solides par des Plans, rien de tout cela n'eſt exactement vrai.

1349. Un Point n'a aucune étendue, c'eſt zero d'étendue. Or $0 \times \infty = 0$. Donc un point, quoiqu'infiniment répété, ne peut faire une étendue ou une ligne.

1350. Mais $\frac{1}{\infty} \times \infty = 1$. Donc il faut concevoir la ligne finie comme formée, non par des points, mais par une infinité de lignes infiniment petites.

1351. Ce n'eſt pas qu'on ne puiſſe concevoir le point, & qu'on ne doive même le ſuppoſer en Géométrie : mais il ne faut pas le concevoir comme élément ou partie infinitieme de la ligne; & ſi la ligne eſt réellement compoſée de points, elle l'eſt d'une maniere qui nous échappe, & qui ne tombe pas ſous notre calcul. La Géométrie eſt toute intellectuelle, & a pour objet, non la Grandeur Phyſique préciſément, mais la Grandeur telle que nous ſommes obligés de la concevoir.

Que les Courbes ne ſont pas compoſées de points, ou que les Courbes rigoureuſes ne ſont pas réelles.

1352. S'il y a quelque ligne qu'il faille concevoir comme compoſée de points, c'eſt la Courbe. La nouvelle Géométrie qui conſidere les Courbes comme formées de droites infiniment petites, paſſe pour ne donner qu'une ſuppoſition infiniment approchante du vrai, une approximation infinie des Courbes réelles, qui n'ont aucunes parties droites, & par conſéquent ne ſont formées que de points. Ceux même qui ont fait naître, ou le plus perfectionné cette Géométrie,

semblent en convenir, & ils se contentent d'avoir donné un grand nombre de Méthodes infiniment avantageuses, fondées sur cette supposition. Cependant j'ose avancer que les Courbes réelles ne sont point composées de points, ou du moins ne peuvent être conçues sous cette idée.

Une droite n'est point par elle-même divisée en parties, elle n'a que celles que lui donne une division arbitraire : mais la nature de la Courbe réelle consistant dans une *flexion* continuelle, elle a par elle-même pour parties élémentaires & composantes, celles que cette flexion rend distinctes les unes des autres. Or il s'agit de savoir si ces parties sont des points ou des droites infiniment petites.

Tous les Géometres conviennent qu'une Courbe est toujours différemment inclinée à son axe, ou, ce qui revient au même, que ses parties élémentaires sont toutes différemment posées par rapport à cet axe. Ce ne sont donc pas des points, car des points n'ont aucune position par rapport à une droite, ce sont donc des lignes infiniment petites.

1353. Tout le monde convient aussi que toutes les Courbes peuvent être décrites par des mouvemens, & il y en a un grand nombre, telles que les Spirales, les Cycloïdes, &c. que l'on conçoit nécessairement comme décrites de cette maniere, & l'on convient de même que ces mouvemens, qui tracent des Courbes, doivent changer de direction à chaque instant. Or un mouvement ne peut changer de direction à chaque instant, s'il n'en a une pendant chaque instant, & pour en avoir une, il faut qu'il suive une ligne droite, qui sera infiniment petite, puisque la durée du mouvement, selon cette direction, sera un instant infiniment petit. Donc, &c.

1354. Les Courbes réelles ne sont donc que des Poligones rectilignes infinis, & les Courbes *rigoureuses* ou *exactes*, qu'on opposoit à ces Courbes Polygones, ne sont point réelles.

1355. Les Courbes rigoureuses ne seroient en aucunes de leurs parties ni perpendiculaires, ni paralleles, ni inclinées à leur axe. Il est bien vrai que leurs Tangentes, tirées à leurs différens points, pourroient avoir ces différentes positions,

mais elles ne les auroient pas, parce qu'elles les auroient prises de la Courbe, & ainsi elles ne représenteroient pas, comme tout le monde le conçoit, les différentes positions de la Courbe par rapport à son axe, elles auroient leurs positions quelconques par la seule nécessité de passer par un certain point de la Courbe, & d'éviter tous les autres, & il y auroit des cas, où cette nécessité cessant de leur déterminer une position, une Tangente pourroit avoir des positions différentes, ce qui certainement est absurde. Par ex. soit une Courbe qui ne passe point au dessous de son axe, & qui à son origine lui soit perpendiculaire, la Tangente pourra, avec une infinité de positions différentes, passer par ce seul point de l'origine de la Courbe sans entrer dans son plan, ou être Sécante.

Il est vrai que dans toutes ces positions elle ne fera pas toujours avec la Courbe un angle de contingence infiniment petit. Mais d'où vient la nécessité absolue de faire cet angle? Elle le fera, quand il sera nécessaire qu'elle le fasse pour ne pas devenir Sécante, ainsi qu'il arrive dans le Cercle : mais quand elle pourra ne le pas faire, & n'être pas Sécante, comme dans la présente hypothese, elle ne laissera pas d'être toujours Tangente.

Il est évident que cet inconvénient n'a pas lieu à l'égard des Courbes Polygones, & que leurs côtés qui ont toujours une position, assujettissent les Tangentes qui sont leurs prolongemens à avoir toujours celle qu'ils ont.

1356. On peut à cette occasion faire une remarque. Selon la nouvelle Géométrie où les Courbes sont Poligones, deux côtés contigus quelconques étant posés, le prolongement de l'un d'eux est une Tangente de la Courbe au point qui est commun à ces deux côtés, ou qui est le sommet de l'angle de contingence. Selon l'ancienne Géométrie, qui a conçu les Courbes comme rigoureuses, la Tangente du même point sera tirée par le point commun aux deux côtés, de sorte qu'elle les laissera tous deux au dessous d'elle. De-là il suit que l'angle de contingence, toujours infiniment petit dans l'une & l'autre hypothese, sera deux fois plus grand dans la nouvelle

hypothese que dans l'ancienne, & par conséquent aussi sa base, dont la détermination est fort importante dans la Théorie des Rayons des Développées, des Forces Centrales, &c. Il faut faire attention à cela pour se conduire selon l'hypothese qu'on a prise, mais laquelle des deux que ce soit, elle ne jette point dans l'erreur, pourvu qu'on la suive bien, & qu'on ne passe pas sans s'en appercevoir de l'une dans l'autre.

1357. Des Courbes formées de droites infiniment petites du 1er ordre, sont essentiellement différentes des lignes droites finies formées des mêmes élémens, mais toujours posés bout à bout selon la même direction, au lieu que dans les Courbes ils en changent toujours ; par conséquent il suffit de poser pour élémens des Courbes de petites droites du 1er ordre sans aller à des ordres inférieurs, si ce n'est que dans certains cas, comme dans celui de la courbure infinie, il faille passer le 1er ordre. On en a vû plusieurs exemples. Nous pouvons ajouter en passant, que ce cas de la courbure infinie seroit inexprimable dans l'hypothese des Courbes rigoureuses formées de points.

Que les lignes droites & les Courbes ne doivent être conçues que comme formées de droites infiniment petites.

1358. Si les Courbes ne sont pas formées de points, mais de petites droites, les droites finies ne sont formées non plus que de petites droites, car les Courbes & les droites ne different pas par la nature de leurs parties élémentaires, mais par la position seule de ces parties.

Que les Plans ne doivent être conçus que comme formés de plans infiniment petits.

1359. Venons aux Plans. Je dis qu'ils ne sont pas formés précisément de lignes. S'ils l'étoient, il faudroit concevoir un parallélogramme fini comme formé d'une infinité de lignes posées sur un de ses côtés parallelement à l'autre, & toutes égales, dont la somme feroit l'aire du parallélogramme. Or la somme de toutes ces lignes finies égales, seroit infinie. Donc cette idée n'est pas vraie.

1360. Si on veut concevoir l'aire du Cercle comme formée par le nombre infini de ses Rayons, il est certain que cette idée embarrasse l'imagination: car on ne peut concevoir les rayons du Cercle que trop serrés vers le centre, posés les uns sur les autres, & se pénétrans, & au contraire trop

écartés vers la circonférence, & laissant entr'eux des vuides, qui sont partie de l'aire, & n'y sont pourtant pas comptés dans cette hypothese. De plus, si les rayons font l'aire du Cercle, les aires de deux Cercles concentriques inégaux, seront comme le rayon d'un Cercle au rayon de l'autre, puisque les rayons sont de part & d'autre en même nombre infini, & ne different que par leurs longueurs. Or tout le monde sait que cela est faux.

1361. Le dénoûment de ces difficultés, est qu'il faut concevoir les Plans comme formés, non par des Lignes précisément, mais par d'autres Plans élémentaires infiniment petits par rapport à ceux dont ils sont élémens. Ainsi un parallélogramme fini, étant conçu comme formé par une infinité de plans, dont un des côtés est toujours une ligne finie $= 1$, si l'on veut, & l'autre une ligne infiniment petite constante $= \frac{1}{\infty}$, la somme de cette infinité de plans élémentaires, ou l'aire du parallélogramme, ne sera que finie, comme elle doit l'être.

1362. Que le parallélogramme soit formé de plans infiniment petits, tels qu'on vient de les poser, ou de lignes égales, qui aient une longueur finie, & une largeur infiniment petite, c'est la même chose : mais toujours on ne doit pas le concevoir comme formé de lignes mathématiques.

1363. Cette formation des Plans se concevra peut-être encore mieux dans l'Infini. Soit une ligne $= \infty$; son quarré sera ∞^2, & par conséquent l'aire du quarré infini, ne sera que la ligne $= \infty$ répétée un nombre de fois $= \infty$, ou posée parallelement à un côté ce nombre de fois. Or pour ne la poser que ce nombre de fois, il faut nécessairement laisser entr'elle posée une 1re fois, & elle-même posée une 2de des intervalles finis, & tous, si on le veut, pour plus de facilité, égaux à 1, car autrement on la poseroit un nombre de fois $= \infty$ sur une partie finie quelconque du côté infini auquel elle est perpendiculaire. Il restera donc entre la ligne $= \infty$, posée un nombre de fois $= \infty$, un nombre $= \infty$ d'inter-

valles vuides finis, qui n'appartiendront point à l'aire du quarré infini, puiſqu'elle n'eſt formée que par la ligne répétée. Cependant ces intervalles finis en nombre $= \infty$, font un eſpace infiniment plus grand que celui qui eſt rempli par la ligne mathématique infiniment répétée; on néglige donc dans l'aire du quarré une quantité infiniment plus grande que celle qu'on y compte, ce qui eſt une abſurdité inſoutenable.

Il faut donc concevoir l'aire du quarré infini comme formée par des plans tous égaux, dont un des côtés eſt $= \infty$, & l'autre $= 1$, qui ſont infiniment petits par rapport à ∞^2, & qui étant en nombre $= \infty$ font la ſomme ∞^2, moyennant quoi il ne reſte point de vuides dans le quarré, & toutes les difficultés s'évanouiſſent.

1364. Cette multiplication d'une ligne mathématique par $\frac{1}{\infty}$ dans le Fini, & par 1 dans l'Infini pour avoir les plans élémentaires, n'eſt néceſſaire, que quand on veut avoir l'aire abſolue des plans totaux, ou s'en former une idée juſte : mais elle n'eſt pas néceſſaire pour avoir le rapport d'un plan à un autre du même ordre, car étant toujours la même, elle ne change rien au rapport des ſommes infinies des lignes mathématiques dans les cas qu'on vient de voir. C'eſt pour cela qu'on a pu croire que ces ſommes faiſoient ſeules les aires.

1365. Mais cette même idée qui ſeroit quelquefois ſans conſéquence, conduiroit à une erreur groſſiere dans le Cercle conçu comme formé par ſes rayons (1360), il faut le concevoir formé d'une infinité de Triangles iſoſceles, qui ont leur ſommet au centre, y font un angle infiniment petit, compris entre deux rayons, & dont la baſe eſt un arc infiniment petit de la circonférence. La circonférence étant nommée c, & le rayon r, un arc infiniment petit eſt $\frac{c}{\infty}$, & un Triangle élémentaire eſt $\frac{cr}{2\infty}$, & la ſomme des triangles, ou l'aire du Cercle eſt $\frac{cr}{2\infty} \times \infty = \frac{cr}{2}$.

1366. Soit un plus grand Cercle, dont la circonférence

soit *C*, & le rayon *R*, on aura pour les deux aires $\frac{CR}{2}$ & $\frac{cr}{2}$, & parce que $C.c :: R.r$, leur rapport sera celui de CC à cc, ou de RR à rr.

C'est dans ce cas du Cercle, ou en général des plans formés par des lignes concourantes en un point, que la nécessité de concevoir les plans comme formés par des plans élémentaires, est la plus sensible. Les lignes mathématiques ne donneroient ni les aires sans pénétration de lignes & sans vuides, ni les rapports des aires.

1367. Puisque les lignes sont formées par des lignes, & les plans par des plans, l'analogie conduit nécessairement à conclurre que les Solides seront formés par des Solides qui seront pareillement élémentaires, & ce n'est pas la peine de le prouver par les inconvéniens qui naîtroient des plans mathématiques conçus comme élémens des Solides. Un Cylindre est donc la somme d'une infinité de Cylindres infiniment petits, dont la base est le Cercle du Cylindre total, & la hauteur est une partie infiniment petite de sa hauteur. Un Cone est la somme d'une infinité de Cercles croissans depuis son sommet, dont chacun est multiplié par une partie infiniment petite de l'axe du Cone.

Et pareillement les Solides.

1368. Que si l'on concevoit le Cylindre comme formé par une infinité de parallélogrammes qui concourroient à son axe, & l'auroient pour commune Section, ainsi que l'on fait quelquefois, cette idée seroit fausse en elle-même, & pour la rectifier, il faut concevoir des Prismes Triangulaires, dont l'angle sera infiniment petit, & qui concourront à l'axe du Cylindre, de la même maniere qu'on a conçu des Triangles comme formans le Cercle.

1369. Pareillement si l'on veut concevoir le Cone comme formé par des élémens concourans à son axe, ce ne doivent point être des Triangles, mais des Prismes Triangulaires infiniment petits, coupés par un plan diagonal, ce qui est très-aisé à imaginer.

1370. De tout cela on peut tirer cette réflexion: puisque

nous sommes obligés de concevoir les lignes comme formées par de moindres lignes, les plans par de moindres plans, &c. nous connoissons les lignes, les plans, &c. tout formés, mais non pas leurs véritables élémens. Et si nos connoissances sont si bornées sur l'être simplement Géométrique des Corps, à plus forte raison le seront-elles sur le Physique, ou plutôt c'est parce qu'elles sont extremement bornées sur le Physique, qu'elles le sont tant sur le Géométrique.



SECTION VI.

Sur les Espaces Asymptotiques en général, & les Solides qui en sont produits.

LEs premiers Géometres qui ont trouvé des Asymptotes, ont dû être étonnés de voir des Courbes qui s'approchoient à l'infini de ces lignes droites, & ne les pouvoient joindre.

Quand on est venu à considérer les espaces Asymptotiques, & qu'on les a trouvés infinis, on n'en a point été étonné, parce que ces espaces étant toujours d'une étendue infinie, il a paru naturel qu'ils eussent aussi une aire infinie. Tels sont les deux espaces Asymptotiques de l'Hyperbole ordinaire.

Mais quand on a trouvé ces espaces finis, quoiqu'infiniment étendus, comme l'est toujours l'un des deux de toute Hyperbole qui passe le 2d degré, & comme le sont ceux de la Logarithmique, de la Cissoïde, de la Conchoïde, on en a été surpris.

Et on l'a été encore plus, quand on a vû qu'en faisant tourner l'espace Asymptotique infini de l'Hyperbole ordinaire autour de l'Asymptote immobile, ce qui produit un Solide d'une certaine courbure, ce Solide étoit fini. Car apparemment on s'attendoit, & on devoit s'attendre à le trouver infini.

Toutes ces merveilles apparentes ne viennent que de la nature de l'Infini peu approfondie : on va voir qu'elles disparoissent absolument dès qu'on remonte aux principes que nous avons établis, & qu'il n'y auroit rien de surprenant, que le contraire de ce qui l'a paru.

1371. Il n'y a point d'espace Asymptotique qui ne puisse être conçu comme égal à un parallélogramme rectangle, dont l'Asymptote, qui est une ligne infinie, sera un des côtés, que j'appelle la base. Ainsi tout ce qui peut convenir à ce rectangle, peut convenir aussi à l'espace Asymptotique.

Qu'un Espace infiniment étendu n'est point pour cela déterminé à être un infini de

l'ordre dont est cette étendue, mais qu'il peut être ou infini d'un ordre quelconque, ou fini, ou infiniment petit d'un ordre quelconque.

Si cette base est déterminée à être de l'ordre de ∞, la hauteur du rectangle étant absolument indéterminée, il est clair que selon l'ordre dont sera cette hauteur, c'est-à-dire, selon que je multiplierai ∞ par n, nombre fini indéterminé, ou par ∞^n, ou par $\frac{1}{\infty^n}$, j'aurai dans le 1[er] cas un rectangle infini du 1[er] ordre, dans le 2[d] un infini d'un ordre quelconque, dans le 3[me] un fini, si $n = 1$, & pour toutes les autres valeurs de $n > 1$, un infiniment petit d'un ordre quelconque. Ainsi le rectangle, quoiqu'infiniment étendu à cause de sa base, est indifférent d'ailleurs à tous les ordres possibles de grandeur.

1372. Si la base du rectangle n'est point déterminée à être $= \infty$, mais qu'elle puisse être $= \infty^2$, $= \infty^3$, &c. il est évident que, selon les différentes hauteurs, j'aurai encore des rectangles de tous les ordres possibles.

Et pareillement un Solide, dont la hauteur, ou la base sera infinie.

1373. Il en ira de même d'un Parallélépipede, dont la base plane sera d'un ordre quelconque d'Infini, car selon les différentes hauteurs il pourra être de tous les ordres possibles; & ce sera la même chose pour un Solide que l'on concevra comme formé par la révolution d'une base plane infinie quelconque autour d'un axe ou ligne immobile; car ce Solide sera un Cylindre, dont la base circulaire étant telle qu'on voudra, il pourra être d'un ordre quelconque selon la hauteur qu'il aura. Il en ira de même si la hauteur étant un Infini quelconque, sa base est indéterminée. Ainsi l'on voit déja en général que ni les Parallélogrammes pour avoir un côté infini, ni les Solides pour avoir des bases ou des hauteurs infinies, ne doivent pas être plutôt infinis que finis, ou même infiniment petits.

Mais avant que de pouvoir rien déterminer en détail sur la grandeur ou l'ordre des différens Espaces ou Solides Asymptotiques, il faut avoir approfondi, plus que nous n'avons encore fait, la nature de l'Asymptotisme.

Considération particu-

1374. Soit la Courbe *MC*, Asymptotique quelconque, qui a pour axe, & pour Asymptote $AB = \infty$, & lui devient

parallele. De tout ce qui a été établi dans les art. 799, &c. 809, 1106, 1109, il suit que toute Courbe Asymptotique n'est Courbe que dans une étendue finie indéterminable, que je suppose qui se termine au point μ, & qu'après cela elle est droite dans tout le cours infini μC, mais droite non exacte (1184). Sa rectitude consiste en ce qu'après des pas finis elle ne fait que des détours infiniment petits, & sa rectitude non exacte, en ce qu'elle les fait. Si l'on conçoit donc que la partie infinie pB de l'axe, correspondante au cours μC, soit divisée en parties finies égales, il faut concevoir qu'à chacune de ces parties répond dans μC, une ligne finie exactement droite, qui s'est détournée infiniment peu de celle qui la précédoit, & dont celle qui la suit se détourne aussi infiniment peu. Et pour concevoir la Courbe totale $M\mu C$ divisée uniformément, il faudra concevoir que Ap, portion finie indéterminable de l'axe, qui répond au cours $M\mu$, où la Courbe est véritablement Courbe, est aussi divisée en mêmes parties finies égales que pB.

lière de la nature de l'Asymptotisme.

Fig. XVIII.

De-là il suit que toutes les Ordonnées AM, pm, $p\mu$, &c. à l'infini sont finiment distantes, & que celles qui répondent au cours $M\mu$, où la Courbe est véritablement Courbe, ont entr'elles des différences finies, mais que celles qui passent le point μ, ou répondent au cours μC, n'ont que des différences infiniment petites, puisqu'alors la Courbe a changé de nature, & qu'à cause du détour infiniment petit après un pas fini en ligne droite, deux Ordonnées consécutives du cours μC, finiment distantes, sont dans le même cas que deux consécutives du cours $M\mu$, qui seroient infiniment proches.

1375. Comme μC est ligne droite dans son étendue infinie, elle a dans toute cette étendue la même position à l'égard de l'axe AB, & puisque la Courbe est supposée lui devenir parallele, elle l'est donc dans toute l'étendue μC. Mais en même-temps comme elle n'est pas ligne droite exacte, elle n'a pas exactement cette égalité de position. Son parallélisme est non absolu, & il est nécessairement toujours croissant dans la supposition présente, dès qu'il est non absolu.

1376. Il peut être croiſſant de grandeur & d'ordre. Il ne l'eſt que de grandeur, tant que les différences toujours néceſſairement décroiſſantes, ne décroiſſent que de grandeur; & il eſt croiſſant de grandeur & d'ordre, quand les différences viennent à décroître auſſi d'ordre. Ainſi la Courbe ou droite non exacte μC, toujours parallele à AB, aura autant de parallélismes différens en ordre, & toujours plus grands, que les différences toujours infiniment petites des Ordonnées auront de différens ordres.

1377. La courbe n'eſt pas ſeulement toujours plus parallele à ſon axe, ou Aſymptote, mais elle en eſt toujours auſſi plus proche. Cette proximité eſt croiſſante de grandeur & d'ordre comme le parallélisme, c'eſt-à-dire, que ſi la Courbe dans une certaine étendue eſt à une diſtance finie de l'axe, elle en ſera enſuite à une diſtance de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, enſuite à une diſtance de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, &c. C'eſt la nature, ou l'Equation de la Courbe qui détermine la plus grande proximité finale, auſſi-bien que le plus grand parallélisme final.

1378. La proximité dépend de la grandeur des Ordonnées, comme le parallélisme dépend de la grandeur des différences; & la Courbe qui doit arriver à une certaine proximité finale, & à un certain parallélisme final, y arrive par des Ordonnées, & par des différences de tous les ordres qui ſont depuis le fini, par où ces ſuites commencent toujours, juſqu'à l'ordre qui doit produire & cette proximité & ce parallélisme.

1379. L'Aſymptotisme, qui demande que dans l'étendue infinie μC la Courbe ſoit ligne droite, & ſelon la ſuppoſition préſente, ligne droite parallele à l'Aſymptote, demande auſſi que cette même Courbe ſe confonde avec l'Aſymptote, & arrive au moins à n'en être qu'à une diſtance infiniment petite du 1er ordre. La confuſion de la Courbe avec l'Aſymptote, ou ſa proximité infinie, eſt auſſi néceſſaire que la rectitude de la Courbe, ou ſon égalité de poſition par rapport à l'Aſymptote; & par conſéquent la Courbe tend non-ſeule-

ment en même-temps, mais encore également à l'un & à l'autre de ces Termes, & par conséquent lorsque sa tendance à l'un change d'ordre, sa tendance à l'autre en change aussi, c'est-à-dire, que les Ordonnées & les différences baissent d'ordre en même-temps dans le cours μC, où se passe tout ce qui appartient précisément à l'Asymptotisme.

1380. Le parallélisme final de la Courbe n'est d'un certain ordre, que parce que deux Ordonnées consécutives y ont une différence de l'ordre correspondant d'infiniment petit. Or alors il faut nécessairement concevoir que les deux Ordonnées sont de l'ordre immédiatement supérieur. Donc en remontant toujours vers l'origine de la Courbe dans le cours μC, ou trouvera toujours les Ordonnées d'un ordre immédiatement supérieur à celui des différences, puisque les unes & les autres ont changé d'ordre en même-temps (1379). Donc les différences qui sont après le point μ, étant toutes infiniment petites (1374), & celles qui le suivent immédiatement étant du 1er ordre, puisque les différences passent par tous les ordres depuis le fini (1378), les Ordonnées sont encore alors finies. Donc la Courbe procéde ainsi après le point μ. Des Ordonnées finies, & des différences de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$. Des Ordonnées de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & des différences de celui de $\frac{1}{\infty^2}$, &c. jusqu'aux plus petites Ordonnées ou la plus grande proximité, & jusqu'au plus petites différences, ou le plus grand parallélisme que la Courbe puisse avoir.

1381. Comme la proximité finale, & le parallélisme final ne sont pas les mêmes dans toutes les Courbes Asymptotiques, ainsi qu'on l'a déja vû plusieurs fois, l'Asymptotisme n'y est donc pas le même, & il sera susceptible de plus & de moins. Une plus grande proximité finale, & un plus grand parallélisme final, feront un plus grand Asymptotisme, & même infiniment plus grand, s'ils sont plus grands en ordre.

Que l'Asymptotisme est susceptible de plus & de moins, & à l'infini.

1382. Il est évident qu'un Asymptotisme ne peut devenir infiniment plus grand par le parallélisme final, sans le devenir

en même-temps par la proximité finale, & réciproquement, mais il faut qu'il le devienne en même-temps par les autres parallélifmes, & par les autres proximités par où il le peut devenir; car tout eft lié dans le cours μC, qui fait l'Afymptotifme. Mais cela va être mieux développé.

1383. Une Courbe Afymptotique rapportée à fon axe, ou Afymptote, à laquelle elle devient parallele, a fon dernier dy de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$ au moins, les dx étant de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & conftans (800 & 808). Donc la Courbe qui n'aura fon dernier dy, que de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$, aura le moindre Afymptotifme poffible, car je ne confidererai d'abord les Afymptotifmes que felon les ordres potentiels. Ici où les dx, c'eft-à-dire, les intervalles des Ordonnées, font finis, les différences ou les dy hauffent par tout d'un ordre, & par conféquent la Courbe qui aura le moindre Afymptotifme, aura fa derniere différence, ou, fi l'on veut, fes dernieres différences de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, & fes dernieres Ordonnées de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$. Donc avant cela il y aura eu dans le cours μC des Ordonnées finies, dont les différences étoient de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & rien de plus dans tout le cours μC.

1384. Une Courbe eft terminée dès qu'elle arrive aux plus grandes ou aux plus petites grandeurs, dont fon Equation la rende capable. Donc celle-ci eft terminée dès qu'elle arrive à une différence de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, & à deux Ordonnées de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$; & en effet, fi on la conçoit pouffée plus loin par des Ordonnées décroiffantes de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & des différences pareillement décroiffantes de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, il n'y aura nulle raifon de la concevoir terminée, que quand elle aura deux Ordonnées de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, dont la différence fera de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$, or cela eft impoffible par fon Equation, donc elle eft terminée où nous difons. Cependant fon cours μC

eſt néceſſairement infini, donc il eſt entierement rempli par des Ordonnées finies décroiſſantes, qui ont des différences de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, ces deux Suites aboutiſſant l'une à deux Ordonnées de l'orde de $\frac{1}{\infty}$, & l'autre à une différence $= \frac{1}{\infty^2}$.

1385. Il eſt clair que c'eſt là en effet le moindre Aſymptotiſme poſſible en ordre, car jamais une Courbe ne peut être moins proche de ſon axe, que quand elle en eſt toujours à une diſtance finie pendant tout ſon cours infini, & jamais étant parallele elle ne peut l'être moins, que quand des différences d'Ordonnées finiment diſtantes ne ſeront que des $\frac{1}{\infty}$, & cela dans tout ſon cours infini & Aſymptotique, excepté le dernier point de ce cours.

1386. Si la derniere différence de la Courbe, priſe toujours de la même maniere, eſt $\frac{1}{\infty^3}$, ce qui rendra les deux Ordonnées correſpondantes, par où elle ſe terminera (1384), de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, elle aura donc précédemment des Ordonnées de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, dont les différences ſeront des $\frac{1}{\infty^2}$, & avant celles-là encore juſqu'au point μ des Ordonnées finies, dont les différences ſeront des $\frac{1}{\infty}$. Mais il eſt important de ſavoir ſi le nombre des termes de différens ordres ſera dans toutes ces deux Suites infini, ou fini dans l'une, & infini dans l'autre.

L'Aſymptotiſme de cette 2[de] Courbe eſt infiniment plus grand que n'étoit celui de la 1[re], puiſque la 2[de] ſe termine par une proximité, & un parallélisme infiniment plus grand que dans la 1[e]. La 1[re] avoit le moindre Aſymptotiſme poſſible, parce que dans un cours infini elle avoit une infinité d'Ordonnées finies, & dont les différences n'étoient que des $\frac{1}{\infty}$ (1385), donc la 2[de] ne doit pas avoir ce défaut, & elle en doit être infiniment éloignée, donc elle n'aura après le point μ, qu'un nombre fini d'Ordonnées finies, dont les différences ſeront des $\frac{1}{\infty}$, car il faut qu'elle ait toujours après le point μ, des Ordonnées finies (1380). Après ces Ordonnées

finies, il en viendra donc un nombre infini de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, dont les différences seront des $\frac{1}{\infty^2}$, & enfin viendront deux Ordonnées de l'ordre $\frac{1}{\infty^2}$, dont la différence sera de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$, & la Courbe se terminera là. On voit assez comment cela satisfait à tout, & éclaircit l'art. 1382.

1387. Il est très-aisé de voir, en suivant ces idées, que si la derniere différence de la Courbe est $\frac{1}{\infty^4}$, elle aura après le point μ un nombre fini d'Ordonnées finies, ensuite un nombre encore fini, mais plus grand, d'Ordonnées de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, ensuite une infinité de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, & enfin deux dernieres de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$. On ne pourroit hésiter d'abord que sur le nombre fini des Ordonnées de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, mais on verra sans peine que le nombre infini d'Ordonnées de cet ordre étoit le défaut de l'Asymptotisme de la Courbe de l'art 1386, & qu'il faut que la Courbe du present art. s'en éloigne infiniment. Au reste ce nombre fini d'Ordonnées de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ doit être plus grand dans la presente Courbe que le nombre fini précédent des Ordonnées finies, car le nombre des grandeurs de différens ordres est croissant de l'origine vers l'extrémité, puisque le dernier ordre a toujours un nombre infini de grandeurs, les deux dernieres qui sont d'un ordre inférieur ne devant être conçues que comme le Terme auquel ce dernier ordre tendoit, & est arrivé.

1388. Donc en général la derniere différence de la Courbe étant $\frac{1}{\infty^n}$, ou ses deux dernieres Ordonnées $\frac{1}{\infty^{n-1}}$, il y aura toujours après le point μ des Ordonnées d'autant d'ordres, à commencer par le Fini, & toujours en nombre fini, mais croissant, dans chaque ordre, qu'il pourra y avoir d'ordres depuis $\frac{1}{\infty^{n-n}} = \frac{1}{\infty^0} = 1$ jusqu'à $\frac{1}{\infty^{n-2}}$, qui contiendra un nombre infini d'Ordonnées, & se terminera par les deux dernieres $= \frac{1}{\infty^{n-1}}$. n ne peut être ici moindre

que

que 2 (1383), & s'il lui eſt égal, le premier ordre, qui eſt $\frac{1}{\infty^{n-n}}$, ſera auſſi le dernier, qui eſt $\frac{1}{\infty^{n-2}}$, & par conſéquent il aura une infinité d'Ordonnées, & comme il eſt $= 1$, ces Ordonnées ſeront finies, & les deux dernieres $= \frac{1}{\infty}$, ce qu'on a trouvé dans les art. 1383 & 1384. Si $n = 4$, il y aura des Ordonnées en nombre fini croiſſant dans les ordres $\frac{1}{\infty^{n-4}} = 1$, & $\frac{1}{\infty^{n-3}} = \frac{1}{\infty}$, & en nombre infini dans l'ordre $\frac{1}{\infty^{n-2}} = \frac{1}{\infty^2}$, qui ſe terminera par deux Ordonnées $= \frac{1}{\infty^3}$, ainſi qu'on l'a vû dans l'art. 1387.

1389. n peut être ſi grand qu'on voudra, car il y a des Courbes Aſymptotiques, telles que la Logarithmique (957), dont on peut prendre la derniere différence ou Ordonnée d'un ordre d'infiniment petit ſi bas qu'on voudra. Donc l'Aſymptotiſme peut aller à l'infini de Courbe en Courbe, croiſſant toujours d'ordre, ou devenant toujours infini par rapport à ce qu'il étoit précédemment.

1390. A meſure que n ſera plus grand, la Courbe aura, après le point μ, un plus grand nombre de différens ordres d'Ordonnées toujours conſécutifs, & ſans ſauts ; d'où il ſuit que le nombre des grandeurs contenues dans ces différens ordres ſera toujours moindre, l'axe étant ſuppoſé le même pour toutes les Courbes Aſymptotiques. Et en effet, puiſqu'elles commencent toutes, après le point μ, par avoir des Ordonnées finies, & des différences $= \frac{1}{\infty}$, c'eſt-à-dire, par la moindre proximité & le moindre parallélisme poſſible, & que tout doit enſuite être conduit par degrés, l'Aſymptotiſme croiſſant d'ordre demande qu'elles aient toujours un plus grand nombre de proximités toujours plus grandes en ordre, & de parallélismes plus grands en ordre.

Quelle eſt la Courbe du plus grand Aſymptotiſme poſſible.

1391. Le dernier ordre d'Ordonnées qui en contient une infinité, doit en contenir toujours une moindre infinité à meſure que n eſt plus grand. Cette infinité qui diminue

toujours, doit devenir enfin un nombre fini, & même elle n'eſt que 1, quand $n = \infty$, car alors la Courbe a des Ordonnées de tous les ordres, & comme elle n'en a dans la ſuppoſition préſente qu'un nombre $= \infty$, elle n'en peut avoir qu'une dans chaque ordre.

Cette Courbe ſeroit une Logarithmique, dont les Ordonnées ſeroient $\div \frac{1}{\infty^0} = 1 . \frac{1}{\infty^1} . \frac{1}{\infty^2}$, &c. $\frac{1}{\infty^\infty}$. Il eſt clair que cette Logarithmique ſeroit la plus baſſe de toutes les Logarithmiques poſſibles, que par ex. elle le ſeroit plus que $\div \frac{1}{2^0} . \frac{1}{2^1} . \frac{1}{2^2}$, &c. $\frac{1}{2^\infty}$, ou que $\div \frac{1}{3^0} . \frac{1}{3^1} . \frac{1}{3^2}$, &c. $\frac{1}{3^\infty}$, ou que, &c. Ce ſeroit donc la Courbe du plus grand Aſymptotiſme poſſible.

Et celle du plus petit.

1392. Le moindre Aſymptotiſme, j'entens toujours en ordre potentiel, eſt celui de la Courbe des art. 1383, 1384 & 1385, qui peut être une Hyperbole ordinaire (960), dont les Ordonnées, paſſé le point μ, ſeront toutes finies décroiſſantes, juſqu'aux deux dernieres $= \frac{1}{\infty}$. Donc en comparant cette Hyperbole avec la Logarithmique de l'art. précédent, on aura les deux Aſymptotiſmes extremes, & il ſera facile de juger de tout l'entre-deux.

1393. Le point μ de la Courbe générale eſt celui où la Courbe commence à être parallele de ſon moindre parallêliſme, parce que les différences y deviennent $= \frac{1}{\infty}$. Si on conçoit que la Logarithmique de l'art. 1391 ſoit décrite, elle ne ſera point parallele, mais inclinée à l'axe par ſa 1re & ſa 2de Ordonnée, qui ſont 1 & $\frac{1}{\infty}$, & dont la différence eſt 1. Mais elle deviendra parallele par ſa 2de & ſa 3me Ordonnée, qui ſont $\frac{1}{\infty}$ & $\frac{1}{\infty^2}$, & dont la différence eſt $\frac{1}{\infty}$. Donc le point μ ſeroit à une diſtance finie déterminable de l'origine de la Logarithmique. D'un autre côté il eſt certainement à une diſtance finie indéterminable de l'origine de l'Hyperbole. Donc, dans toutes les Courbes Aſymptotiques intermédiaires, le point μ s'eſt toujours approché de leur origine à meſure que leur Aſymptotiſme étoit plus grand. Il convient effectivement

que des Courbes plus Asymptotiques commencent plutôt à l'être, c'est-à-dire, soient plutôt paralleles à l'axe.

1394. De l'Hyperbole à la Logarithmique, le point μ ne fait qu'un chemin fini.

1395. Le dernier ordre des Ordonnées d'une Courbe Asymptotique ne cesse d'en contenir une infinité, que quand dans l'exposant de la derniere différence $= \frac{1}{\infty^n}$, n est un Fini indéterminable, ce qui ne se peut trouver dans aucune Courbe connue.

1396. Toute cette Théorie sera confirmée par les Suites de nombres $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{A^2}$, $\frac{1}{A^3}$, &c. que l'on a vues dans la Sect. IV. Tant que leur exposant est Fini déterminable, elles représentent parfaitement les Courbes Asymptotiques, dont la derniere différence est $\frac{1}{\infty^n}$, n étant Fini déterminable.

Confirmation de la Théorie précedente par les Suites $\frac{1}{A} \cdot \frac{1}{A^2} \cdot \frac{1}{A^3}$, &c.

$\frac{1}{A}$ qui est $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. $\frac{1}{\infty}$, & en général $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n+1}$, n étant successivement tous les nombres naturels, a pour formule générale de ses différences $\frac{1}{nn+n}$, qui devient $= \frac{1}{\infty^2}$, lorsque $n = \infty$. Donc $\frac{1}{A}$ a sa derniere, ou ses dernieres différences de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, auxquelles répondent des nombres de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$. Donc elle aura aussi des différences de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, auxquelles répondront des nombres finis, & en effet, dès que n est un nombre fini indéterminable si grand, qu'étant quarré il devient infini, les deux nombres $\frac{1}{n}$ & $\frac{1}{n+1}$ sont finis, & leur différence $\frac{1}{nn+n}$ devient $\frac{1}{nn} = \frac{1}{\infty}$. On a déja vu un cas tout pareil dans les art. 523 & 524.

Il est donc évident que $\frac{1}{A}$ ayant à son origine des nombres finis, dont les différences sont finies, arrive ensuite à un nombre fini indéterminable n, qui n'est par conséquent qu'à une distance finie indéterminable de l'origine, & tel que lui & les suivans n'ont plus que des différences de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$. Ce nombre n représente le point μ d'une Courbe Asympto-

tique. Les différences $= \frac{1}{\infty}$ qui viennent après n, représentent le premier & moindre parallélisme, que la Courbe prend après le point μ, n'étant alors encore qu'à une proximité finie de l'axe, parce qu'elle a des Ordonnées finies.

Comme A a une infinité de nombres qui, étant quarrés, deviennent infinis, $\frac{1}{A}$ en a une infinité de finis qui ont des différences $= \frac{1}{\infty}$, & le parallélisme de la Courbe représentée par $\frac{1}{A}$, tient donc une étendue infinie.

Enfin $\frac{1}{A}$ a une infinité de termes infiniment petits de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, qui ~~ont~~ des différences $= \frac{1}{\infty^2}$, & c'est là pour la Courbe un second parallélisme plus grand que le premier, infiniment étendu aussi, & même plus étendu, car les ∞ de A, & par conséquent les $\frac{1}{\infty}$ de $\frac{1}{A}$ sont en nombre infini plus grand que les finis. Mais cette 2[de] & derniere infinité de termes de $\frac{1}{A}$, qu'il est bon de considérer dans $\frac{1}{A}$ prise simplement comme Suite de nombres, n'est plus à considérer dans la Courbe représentée par $\frac{1}{A}$, & il ne faut prendre par la raison de l'art. 1384, que les deux premiers $\frac{1}{\infty}$ de leur nombre infini.

Il ne faut pas oublier de remarquer que dans $\frac{1}{A}$, dès que n, quoique fini, est si grand qu'il deviendroit infini par l'élévation au quarré, les différences deviennent $= \frac{1}{\infty}$, & que dès que n est $= \infty$, les différences deviennent $= \frac{1}{\infty^2}$, ce qui confirme l'art. 1379.

1399. On raisonnera de même sur $\frac{1}{A^2}$, qui est en général $\frac{1}{nn}$, $\frac{1}{nn+2n+1}$, & dont les différences sont $\frac{2n+1}{n^4+2n^3+n^2}$. Dès que n est un fini indéterminable, qui par l'élévation à la 4[me] puissance, il faut sousentendre, *& non par une moindre élévation*, devient infini, la différence est $\frac{2n+1}{\infty}$, de l'ordre

de $\frac{1}{\infty}$. C'est là où est le point μ, & il est plus près de l'origine de $\frac{1}{A^2}$ qu'il n'étoit de celle de $\frac{1}{A}$, car un nombre n de la Suite naturelle A, qui ne devient infini qu'étant élevé à la puissance 4, est plus petit que celui qui devient infini, étant élevé à la puissance 2. Ce qui revient à l'art. 1393, & le confirme. Quand n est si grand qu'il devient infini, étant élevé à la puissance 2, il devient donc un infini du 2d ordre, étant élevé à la puissance 4, & $n^4 = \infty^2$, donc la différence est alors $\frac{2n+1}{\infty^2}$, de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, & les nombres correspondans sont des $\frac{1}{nn} = \frac{1}{\infty}$. Enfin quand $n = \infty$, les nombres sont $\frac{1}{\infty^2}$ ou $\frac{1}{\infty^2}$, & les différences sont $\frac{2n}{n^4} = \frac{2}{n^3} = \frac{2}{\infty^3}$, ce qui est la même chose que la Courbe de l'art. 1386, pourvû que l'on retranche les $\frac{1}{\infty^2}$ de $\frac{1}{A^2}$ qui sont en nombre infini, & que l'on n'en conserve que les deux premiers. $\frac{1}{A^2}$ ayant une infinité de nombres de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & une infinité de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ (364), il reste à la Courbe $\frac{1}{A^2}$ un cours infini parallele causé par une infinité de différences $= \frac{1}{\infty^2}$, & terminé par une seulement de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$ qui fait le plus grand, & dernier parallélisme. D'un autre côté la Suite $\frac{1}{A^2}$ n'a qu'un nombre Fini de termes finis à son origine (363), comme la Courbe n'a qu'un nombre fini d'Ordonnées finies.

On voit ici, comme dans l'art. précédent, qu'après le point μ, où les Ordonnées finies commencent à avoir des différences $= \frac{1}{\infty}$, les Ordonnées & les différences baissent toujours d'ordre en même temps.

1398. Il en est de même de la Suite $\frac{1}{A^3}$, qui est $\frac{1}{n^3}$, $\frac{1}{n^3+3n^2+3n+1}$, & dont les différences sont $\frac{3n^2+3n+1}{n^6+3n^5+3n^4+n^3}$. Quand $n^6 = \infty$, n^3 est encore Fini, & par conséquent les

nombres $\frac{1}{n^3}$ ſont finis, & leurs différences $\frac{3n^2+3n+1}{\infty}$ ſont de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$. Quand $n^3 = \infty$, les nombres ſont $\frac{1}{\infty}$, & les différences $\frac{3n^2+3n+1}{\infty^2}$ de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, car ſi $n^3 = \infty$, $n^6 = \infty^2$. Quand $n^{\frac{3}{2}} = \infty$, $n^3 = \infty^2$, & les nombres ſont $\frac{1}{\infty^2}$, & les différences ſont $\frac{\infty^{\frac{4}{3}}}{\infty^4}$, car alors $n = \infty^{\frac{2}{3}}$, $n^2 = \infty^{\frac{4}{3}}$, & $n^6 = \infty^4$. Or $\frac{\infty^{\frac{4}{3}}}{\infty^4} = \frac{1}{\infty^{\frac{8}{3}}}$, de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$. Enfin quand $n = \infty$, les nombres ſont $\frac{1}{\infty^3}$, & les différences $\frac{\infty^2}{\infty^6} = \frac{1}{\infty^4}$.

Ce ſera encore la même choſe pour $\frac{1}{A^4}$, dont les nombres ſont $\frac{1}{n^4}$, $\frac{1}{n^4+4n^3+6n^2+4n+1}$, & les différences $\frac{4n^3+6n^2+4n+1}{n^8+4n^7+6n^6+4n^5+n^4}$, & pour toutes les autres $\frac{1}{A^n}$ ſuivantes, leur expoſant n étant Fini déterminable.

1399. Quelque nombre fini déterminable que ſoit n, les A^n n'ont un nombre infini de grandeurs que dans leurs deux derniers ordres (227), & par conſéquent auſſi les $\frac{1}{A^n}$. Quand ces $\frac{1}{A^n}$ repréſentent des Courbes Aſymptotiques, il en faut retrancher les grandeurs du dernier ordre, en ne conſervant que les deux premieres, & alors les Courbes $\frac{1}{A^n}$ n'ont qu'un dernier ordre où le nombre des Ordonnées ſoit infini ſelon l'art. 1388.

Détermination des eſpaces Aſymptotiques infinis, ou finis, & plus ou moins grands dans leur ordre. Li-

1400. Tout cela poſé, il eſt très-facile de voir quand les Eſpaces Aſymptotiques ſeront finis ou infinis.

Je diviſe l'eſpace total $ABCMA$ en deux parties, l'une $Ap\mu MA$, que j'appelle P, parce qu'elle eſt la premiere, l'autre $pBC\mu p$, ou la ſeconde, que j'appelle S. P eſt toujours un eſpace fini, égal à quelque rectangle, qui auroit pour

base Ap, & pour hauteur quelque Ordonnée moyenne entre AM & $p\mu$. S est toujours un espace infiniment étendu à cause de sa base $pB = \infty$, reste à savoir quelle est sa hauteur, ou plutôt quels seront les espaces partiaux dont il peut être composé.

mites où sont compris les espaces Asymptotiques infinis.

Après le point μ, viennent toujours des Ordonnées finies. Si elles sont en nombre infini, comme dans la Courbe des art. 1383, 1384, & 1385, elles tiennent tout l'espace S, car les deux dernieres de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ ne sont pas à compter ici. Donc S est égal à un rectangle, dont la base seroit ∞, & la hauteur quelque Ordonnée moyenne entre toutes les Finies décroissantes. Donc $S = \infty \times 1 = \infty$. Donc $P + S = S$.

Si après le point μ, les Ordonnées finies ne sont qu'en nombre fini, & qu'ensuite il en vienne une infinité de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, comme dans la Courbe de l'art. 1386, S sera composé de deux espaces partiaux, le premier ayant une base finie, qui répondra au nombre fini des Ordonnées, & une hauteur finie, & par conséquent cet espace sera fini, le second aura une base infinie, car ce sera $pB = \infty$ moins quelque grandeur finie, & sa hauteur sera moyenne entre toutes les Ordonnées de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & par conséquent sera de cet ordre. Donc ce second espace partial de S sera $\infty \times \frac{1}{\infty} = 1$. Donc les deux espaces partiaux qui composeront S, étant finis, S le sera aussi, & $P + S$ fini.

Si comme dans la Courbe de l'art. 1387, il y a après le point μ, un nombre seulement fini, tant d'Ordonnées finies, que d'Ordonnées de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & un nombre infini de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, S sera composé de 3 espaces partiaux, le 1er $= 1 \times 1$, le 2d $= 1 \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty}$, le 3me $= \infty \times \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$. Donc S fini, & $P + S$ aussi.

On voit, sans aller plus loin, que S, & par conséquent l'espace total Asymptotique, ne sera infini que dans le 1er cas,

où les Ordonnées finies sont en nombre infini, & que dans tous les autres S sera fini, parce que son 1[er] espace partial sera toujours fini, les suivans n'étant que des infiniment petits, toujours d'ordres plus bas & consécutifs.

1401. Il est bon de remarquer qu'il suit de-là que quand même on donneroit aux Courbes Asymptotiques représentées par les Suites $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{A^2}$, &c. deux dernieres infinités d'Ordonnées correspondantes aux deux dernieres infinités de nombres de ces Suites, on ne changeroit rien à l'ordre trouvé de S. Car quand dans la Courbe $\frac{1}{A}$ on conserveroit une derniere infinité d'Ordonnées $= \frac{1}{\infty}$, on auroit seulement un 2[d] espace partial de S, qui seroit $\infty \times \frac{1}{\infty}$ de l'ordre du Fini, ce qui ne changeroit rien à l'ordre de l'espace partial précédent, qui seroit toujours $\infty \times 1$, ou de l'ordre de ∞. On verra aisément la même chose pour les autres cas.

1402. Du 1[er] ordre potentiel d'Asymptotisme, qui est celui où les Ordonnées finies sont en nombre infini, au 2[d] où les Ordonnées finies sont en nombre fini, S, d'infini qu'il étoit, devient Fini, & l'est toujours ensuite, ce qui marque que S infini ne doit être qu'un très-petit Infini. On en a un exemple dans la Suite $\frac{1}{A}$, qui représente une Courbe où S est infini. Car dès que $\frac{1}{A}$ a des nombres Finis, dont les différences sont $= \frac{1}{\infty}$, ce qui est le commencement du cours Asymptotique, les nombres toujours moindres que 1, dont elle est composée, sont des $\frac{1}{x}$ en nombre infini, tels que x deviendroit infini par l'élévation au quarré (363). Donc les $\frac{1}{x}$ sont de très-petits nombres Finis, & par conséquent aussi le nombre $\frac{1}{x}$, moyen entr'eux tous, qui sera la hauteur d'un rectangle, dont la base $= \infty$. Donc ce rectangle est $\infty \times \frac{1}{x} = \frac{\infty}{x}$, très-petit Infini. Quand dans l'art. 1400, nous avons

posé

posé ce rectangle $= \infty \times 1$, nous n'avons entendu par 1 qu'une grandeur Finie indéterminée.

1403. *S* infini est d'autant plus petit, que la derniere différence de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ est plus petite dans son ordre, car les Ordonnées finies en nombre infini en sont plus petites, ou la Courbe plus proche de son axe.

1404. *S* fini est d'autant plus petit, que la derniere différence d'un ordre inférieur à $\frac{1}{\infty^2}$ est d'un ordre plus bas, & plus petite dans son ordre. Car le nombre des différens ordres d'Ordonnées en est plus grand (1390), & par conséquent le nombre des Ordonnées finies moindre, & elles sont moindres aussi.

1405. L'espace *P* est aussi d'autant moindre, que la derniere différence est d'un ordre plus bas, car le point μ approche davantage de l'origine *M* (1393), & *Ap* base de *P* en est plus petite, & l'Ordonnée moyenne qui sera sa hauteur plus petite.

1406. Donc l'espace total Asymptotique est toujours d'autant plus petit, que la derniere différence est d'un ordre plus bas, & plus petite dans son ordre.

1407. Plus l'Asymptotisme est grand, selon l'idée de l'art. 1381, plus l'espace Asymptotique est petit, & au contraire; & cela tant en ordre qu'en grandeur.

1408. Il reste les Courbes Asymptotiques, qui étant toujours prises de la maniere dont elles le sont ici, auroient leur derniere différence de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ incomplet. Telles sont les 1res Hyperboles de chaque degré passé le 2d. La 1re du 3me a pour sa derniere différence $\frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$, la 1re du 4me $\frac{1}{\infty^{\frac{4}{3}}}$, la 1re du 5me $\frac{1}{\infty^{\frac{5}{4}}}$, &c. c'est-à-dire, que ces différences sont des ordres $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{4}$, &c. d'infiniment petit. On a négligé les coëfficiens inutiles à l'ordre. Il est clair que si les Courbes, dont la derniere différence est de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$

ont un eſpace Aſymptotique infini, à plus forte raiſon celles-ci, dont l'Aſymptotiſme eſt moindre, & par conſéquent l'eſpace Aſymptotiſme plus grand (1407).

1409. Quelles que ſoient leurs différences de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ incomplet, comme leur expoſant ſera toujours 1 plus une fraction pure, en retranchant cet 1 pour avoir l'ordre des deux dernieres Ordonnées qui ont ces différences, on aura la fraction pour expoſant des Ordonnées, qui ſeront donc des $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$.

1410. Ces deux dernieres Ordonnées ne peuvent être précédées que d'une infinité d'Ordonnées finies, puiſque les autres Courbes, immédiatement inférieures, en ont bien auſſi une infinité, quoiqu'elles aient un plus grand Aſymptotiſme, ou ſoient plus proches de l'axe, mais ici les Ordonnées ſeront plus grandes.

1411. Il y aura Aſymptotiſme tant que la derniere différence ſera de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ incomplet, c'eſt-à-dire, quelque grande qu'elle ſoit ſans ſortir de cet ordre. Mais ſi on conçoit qu'elle aille juſqu'à $\frac{1}{\infty}$, il n'y a plus d'Aſymptotiſme, il eſt devenu nul en décroiſſant toujours. Car ſi la derniere différence eſt $= \frac{1}{\infty}$, le parallélisme de la Courbe n'eſt donc que là, ce qui eſt impoſſible dans une Courbe Aſymptotique. Mais dans ce cas impoſſible toutes les Ordonnées, & même les deux dernieres, étant finies, l'eſpace ſeroit $\infty \times 1$, toujours de l'ordre de ∞, & par conſéquent du même ordre que l'eſpace Aſymptotique des Courbes qui ont leur derniere différence de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ complet. Donc dans toute cette étendue l'eſpace Aſymptotique infini de toutes les différentes Courbes, qui y ſont compriſes, ne change point d'ordre, & il faut bien remarquer qu'il y a pourtant un ∞ extreme juſqu'où il ne peut aller.

1412. Cependant ſi l'on conçoit toutes ces Courbes diſpoſées de ſuite, à commencer par celle qui aura ſa derniere

différence plus approchante de $\frac{1}{\infty^2}$ complet, ou, ce qui est le même, ses deux dernieres Ordonnées d'un ordre d'infiniment petit radical pur (1409), le moindre qu'il soit possible, jusqu'à la Courbe de l'art. précédent où l'Asymptotisme cesseroit; il est clair que l'Asymptotisme iroit toujours en décroissant par des ordres radicaux, puisque le dernier parallélisme des Courbes décroîtroit par des ordres radicaux, & par conséquent (1407) l'espace Asymptotique croîtroit en même temps par des ordres radicaux. Mais cet accroissement de l'espace par des ordres radicaux n'a rien de contraire à l'art. précédent, puisque selon ce même art. cet accroissement se fera dans le seul ordre potentiel de ∞, & sans aller jusqu'à ∞ complet, pourvû que ces ordres radicaux soient radicaux purs.

1413. Donc dans l'intervalle que nous considérons ici, & qui est celui où les plus grands espaces Asymptotiques sont nécessairement, les plus grands espaces Asymptotiques infinis ne sont que des Infinis radicaux purs; & comme c'est là la moindre espece d'Infinis, les plus petits espaces infinis ne seront aussi que de cette espece, mais d'ordres radicaux inférieurs, & un espace Asymptotique infini ne pourra être infiniment plus grand qu'un autre infini, que de quelques ordres radicaux purs.

Que les plus grands espaces Asymptotiques infinis, ne sont que des infinis radicaux purs.

1414. Ces Courbes, dont la derniere différence est de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ incomplet, sont analogues aux Suites $\frac{1}{A^{\frac{1}{n}}}$. Il suffira d'en donner un exemple dans la Suite $\frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}$, dont les nombres sont $\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{\overline{n+1}^{\frac{1}{2}}}$, & les différences $\frac{\overline{n+1}^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}}{\overline{n+1}^{\frac{1}{2}} \times n^{\frac{1}{2}}} =$

$$\frac{\overline{n+1}^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}}{\overline{nn+n}^{\frac{1}{2}}}.$$

$\frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}$ a une infinité de termes finis, & une infinité moindre

d'infiniment petits de l'ordre de $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$ (254). La Courbe correſpondante eſt terminée, dès qu'elle arrive aux deux 1[ers] nombres de ce dernier ordre, qui repréſentent ſes deux dernieres Ordonnées ſelon l'art. 1409.

La différence générale de $\frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}$ eſt la différence des $\sqrt[2]{}$ de deux nombres conſécutifs de la Suite naturelle, diviſée par la $\sqrt[2]{}$ du produit de ces deux nombres. La différence $\sqrt{2} - \sqrt{1}$ eſt beaucoup moindre que 1, puiſque 1 eſt la différence des quarrés 2 & 1. $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ eſt encore moindre, puiſque les quarrés 3 & 2 approchent plus de l'égalité que 2 & 1, & toujours ainſi de ſuite. Donc la différence des $\sqrt{}$ de deux nombres conſécutifs peut être exprimée par $\frac{1}{x}$, x étant un nombre toujours croiſſant, & comme les deux 1[ers] $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$ de $\frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}$ feront arrivés à l'égalité $\frac{1}{x}$ ſera $= \frac{1}{\infty}$. Le produit de ces deux nombres ſera $\infty^{\frac{1}{2}} \times \infty^{\frac{1}{2}} = \infty$, dont la $\sqrt{}$ ſera $\infty^{\frac{1}{2}}$. Donc la derniere différence ſera $\frac{1}{\infty \times \infty^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$, ainſi que l'analogie propoſée le demandoit.

Quand n eſt ſi grand, que par l'élévation au quarré il devient infini, la différence générale $\frac{\overline{n+1}^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}}{\overline{nn+n}^{\frac{1}{2}}}$ eſt $= \frac{\overline{n+1}^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}}{n} = \frac{1}{xn}$. Or ſi alors x, qui a toujours crû, & doit devenir $= \infty$, eſt égal à n, ou plus grand, $\frac{1}{xn}$ eſt $= \frac{1}{n^2}$, qui ſeroit $= \frac{1}{\infty}$, ou bien $\frac{1}{xn}$ eſt encore moindre dans ce même ordre. Si x eſt moindre que n, x croiſſant toujours trouvera bien-tôt un autre n plus grand auſſi, avec

lequel il fera un produit $= n^2 = \infty$, & la différence de deux nombres finis fera de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, ce qui eft toujours le commencement du cours vraiement Afymptotique.

1415. Il refte encore les Courbes dont la derniere différence feroit entre l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, qui donne l'efpace Afymptotique infini, & l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$, qui le donne fini (1400), c'eft-à-dire, que cette derniere différence feroit de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$ incomplet, telle que $\frac{1}{\infty^{\frac{7}{3}}}$, qui eft celle de la 4me Hyperbole du 7me degré. Dans le préfent intervalle l'efpace S pourroit ou continuer d'être infini, on devenir fini, ou paffer de l'Infini au Fini vers le milieu de l'intervalle. Mais il eft aifé de voir par analogie, que fi les dernieres différences de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ incomplet donnent des efpaces infinis auffi-bien que celles de cet ordre complet, des dernieres différences de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$ incomplet ne donneront que des efpaces finis, puifque tels font ceux que donnent les dernieres différences de cet ordre complet. En général on a toujours vû que les ordres incomplets ont les mêmes propriétés que les complets, & la raifon effentielle en eft que les incomplets font toujours des parties finies, & par conféquent du même ordre que les complets confidérés comme des Touts. Donc dans le cas préfent, S eft toujours fini.

1416. On peut le voir encore plus précifément. La derniere différence de ces Courbes aura pour expofant $2\frac{1}{2}$, ou $2\frac{1}{3}$, ou $2\frac{1}{4}$, &c. & en général $2 + \frac{1}{n}$. Il en faut retrancher un ordre pour avoir les deux dernieres Ordonnées, encore un ordre pour avoir les Ordonnées en nombre infini qui précederont les deux dernieres. Donc ces Ordonnées en nombre infini feront des infiniment petits de quelque ordre radical pur. Et en effet cela doit être, puifque les Ordonnées en nombre infini étoient finies dans les Courbes fupérieures (1410), & qu'elles feront de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ dans les Courbes

immédiatement inférieures, dont la derniere différence sera de l'ordre de $\frac{1}{\infty^1}$ complet (1386). Or la base pB étant du même ordre dans les Courbes du présent art. & dans les supérieures, les deux espaces S seront pour l'ordre comme les hauteurs, qui sont dans celles-ci des $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$, & dans les autres des grandeurs finies. Donc dans celles-ci, S sera infiniment petit par rapport à S dans les autres, donc S dans celles-ci sera fini, puisqu'il est infini dans les autres.

1417. Il auroit pû se présenter ici une difficulté. Dans les Courbes présentes, l'Ordonnée moyenne, hauteur du rectangle égal à S, est $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$, & on trouveroit $S = \infty \times \frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}} = \infty^{\frac{n-1}{n}}$, infini radical pur, ce que S n'est pourtant pas. Mais il faut prendre garde que comme pour les Courbes supérieures, la même maniere de prendre le produit égal à S, a donné $\infty \times 1$ (1400) infini potentiel, que l'on a reconnu ensuite être toujours infiniment plus grand que S, puisque S ne peut être qu'un infini radical pur (1412) : ainsi dans le cas présent le produit $\infty \times \frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$ donne S infiniment plus grand qu'il ne doit être : mais ces deux produits conservés tels qu'ils sont, donnent le rapport des deux S, qui sont $:: 1 . \frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$. Or le 1er S est un infini radical pur, donc le 2^d^ est fini.

On pourroit dire que comme il y a une infinité d'ordres radicaux purs, toujours infiniment grands les uns par rapport aux autres, le 1er S peut être un infini radical pur, & le 2^d^ un inférieur. Mais cela ne peut avoir lieu ici. Car tous les infinis radicaux purs étant renfermés dans le seul ordre potentiel de ∞, les Courbes, dont la derniere différence seroit de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ jusqu'à celle exclusivement où elle seroit de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ (1411 & 1412), auront pour leurs S tous les

infinis radicaux purs possibles, & il n'en restera point pour les Courbes inférieures.

1418. Les présentes Courbes, dont les deux dernieres Ordonnées seront toujours des infiniment petits de l'ordre de $1 + \frac{1}{2}$, ou $1 + \frac{1}{3}$, &c. (1416), ou en général de l'ordre de $\frac{n}{n-1}$, seront analogues aux Suites $\frac{1}{A^{\frac{n}{n-1}}}$ des art. 279, 280, 281, il sera aisé de le voir plus en détail, selon la méthode qu'on a tenue dans cette Section.

1419. Nous avons toujours supposé ici, pour plus de facilité, que les grandeurs radicales pures, soit infinies, soit infiniment petites, étoient de l'ordre de $\frac{1}{n}$, mais il est bien sûr qu'il y en a encore d'autres ordres, & quoique ce qui est vrai des uns, le soit aussi des autres, & que la supposition que nous avons faite ne conduise à aucune erreur, il sera bon d'approfondir un peu plus cette matiere.

Les fractions pures se partagent en deux especes opposées. La 1re est celle des fractions comprises dans la Suite $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. & en général $\frac{1}{n}$. La 2de est celle des fractions comprises dans la Suite $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. & en général $\frac{n}{n+1}$. Ces deux Suites sont opposées, en ce que la 1re est décroissante & aboutit à $\frac{1}{\infty}$, la 2de croissante & aboutit à 1. Toute fraction pure, qui n'appartiendra pas à l'une des deux, sera moyenne entre deux fractions, dont l'une appartiendra à la Suite $\frac{1}{n}$, & l'autre à la Suite $\frac{n}{n+1}$. Ainsi $\frac{2}{5}$ est moyenne entre $\frac{1}{5}$, qui appartient à $\frac{1}{n}$, & $\frac{4}{5}$ qui appartient à $\frac{n}{n+1}$. Il suffira donc de raisonner sur les deux Suites opposées.

$\frac{1}{n}$ est toujours moindre que $\frac{n}{n+1}$, donc $\infty^{\frac{1}{n}} < \infty^{\frac{n}{n+1}}$, & $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}} > \frac{1}{\infty^{\frac{n}{n+1}}}$. D'ailleurs $\frac{1}{2}$ est la plus grande des $\frac{1}{n}$ &

la moindre des $\frac{n}{n+1}$. Donc $\infty^{\frac{1}{2}}$ eſt toujours moyen entre tous les Infinis radicaux purs, & $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$ entre les Infiniment petits correſpondans.

1420. Donc tous les eſpaces Aſymptotiques infinis étant des infinis radicaux purs, un eſpace $= \infty^{\frac{1}{2}}$ ſera le moyen entr'eux tous. Ils commenceront par un $\infty^{\frac{1}{n}}$, tel que n y ſoit la dénomination de la plus grande $\sqrt{}$ poſſible, qui ne change point ∞ en fini. Or cette dénomination ou ce nombre n eſt indéterminable. Cependant il eſt certain que les Courbes dont la derniere différence eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ complet, ont un eſpace infini de cet ordre radical indéterminable, & le moindre de tous. D'un autre côté le plus grand eſpace infini poſſible ſera un $\infty^{\frac{n}{n+1}}$, tel que n ſoit le plus grand qu'il ſe puiſſe ſans être infini par rapport à 1, car alors on auroit $\infty^{\frac{n}{n}} = \infty$, ce qui eſt impoſſible (1411). Or ce n eſt pareillement indéterminable.

1421. Les Courbes, dont la derniere différence eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$ incomplet, ayant toutes leurs dernieres Ordonnées en nombre infini, de quelque ordre d'infiniment petit radical pur, & des eſpaces Aſymptotiques finis (1416), ces eſpaces ſeront d'autant plus grands, que ces Ordonnées ſeront de grands infiniment petits radicaux, & au contraire. Celle qui aura ſes Ordonnées de l'ordre $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$, aura ſon eſpace fini moyen entre tous les autres, & il eſt aiſé de voir par l'art. précédent, que les Ordonnées qui détermineroient les eſpaces extremes ſeroient d'un ordre indéterminable.

1422. Il eſt clair que toutes les Courbes inférieures à celles que nous avons vues, n'auront plus que des eſpaces Aſymptotiques finis toujours décroiſſans.

1423. Donc il y a infiniment plus d'eſpaces Aſymptotiques finis que d'infinis.

1424. Un rectangle formé de la baſe AB & de la 1[re] Ordonnée AM de la Courbe MC, eſt $AM \times \infty$, infini du 1[er] ordre potentiel, & par conſéquent infiniment plus grand que tout eſpace Aſymptotique, même infini. On pourroit dire que cela ſe voit à l'œil. C'eſt une eſpece de repréſentation de ce que ſont les Infinis radicaux purs par rapport à l'Infini potentiel du 1[er] ordre, ce que les expreſſions en nombres ne font pas ſi bien appercevoir.

1425. Et même comme on peut ſuppoſer que les mêmes lignes AB & AM ſoient, l'une l'axe ou Aſymptote, & l'autre la 1[re] Ordonnée de toutes les Courbes Aſymptotiques, le même rectangle $AM \times \infty$ comprendra tous les eſpaces Aſymptotiques poſſibles, tant finis qu'infinis, & l'on verra qu'ils doivent être aſſez peu différens les uns des autres, non-ſeulement les infinis ſupérieurs des ſupérieurs en ordre, mais même les infinis des Finis. Le plus grand eſpace Aſymptotique infini ſera celui de la 1[re] Hyperbole d'un degré le plus élevé qu'il ſoit poſſible (1408), & le plus petit eſpace fini poſſible ſera celui de la Logarithmique de l'art. 1391.

1426. Toute cette Théorie ſuppoſe pour plus de facilité que la Courbe générale MC ait ſon Aſymptote pour axe, & lui devienne parallele. On voit qu'il ſera très-aiſé de ramener à ces deux conditions les Courbes qui ne les auront pas. Par exemple, ſi l'on veut juger quel eſt l'eſpace Aſymptotique de la 1[re] Hyperbole du 3[me] degré, du côté où $x = \frac{1}{\infty}$ (1215), c'eſt-à-dire, du côté où elle eſt perpendiculaire à ſon axe, qui n'eſt point alors ſon Aſymptote, cette Hyperbole, qui eſt $x \,.\, a :: a^2 \,.\, y^2$, deviendra par une ſimple tranſpoſition d'axe, $y \,.\, a :: a^2 \,.\, x^2$, & ſera parallele à ſon axe ou Aſymptote x. Alors ſa derniere différence, priſe comme on les prend toujours ici, ſera $\frac{1}{\infty^3}$, & par conſéquent l'eſpace Aſymptotique fini, comme on l'a trouvé directement (1215). En effet $y \,.\, a :: a^2 \,.\, x^2$ eſt la même choſe que la 2[de] Hyperbole du 3[me]

degré, dont l'espace Asymptotique est fini du côté où $x = \infty$. (1216).

Les Courbes Asymptotiques obliques à leur axe, comme l'Hyperbole ordinaire rapportée à son axe traversant, se rameneront aussi très-facilement à notre Théorie. On en voit un exemple dans cette Hyperbole même.

Toutes les Hyperboles de tous les degrés fourniront autant d'exemples qu'on voudra de la Théorie présente. En voici encore quelques-uns.

Espace Asymptotique de la Cissoïde fini.

1427. La Cissoïde étant prise comme elle l'est, p. 24 & 25 des *Inf. petits*, & dans la même Fig. XIV, on peut lui donner pour axe son Asymptote, qui sera une droite infinie tirée perpendiculairement sur l'extrémité B du diametre FB (a) du demi-Cercle générateur FAB, & la Cissoïde deviendra parallele à cet axe. Alors la 1re & plus grande Ordonnée de la Cissoïde est BF (a), après laquelle toutes les autres qui seront paralleles & égales aux parties BL, BG, BE, &c. du diametre BF, iront toujours en décroissant. Si l'on conçoit dans la Fig. la ligne LM tirée jusqu'au demi-Cercle, elle en sera une Ordonnée y, & l'expression de BL égale à l'Ordonnée correspondante de la Cissoïde sera $\frac{yy}{LF}$, & cette expression sera générale, pourvu que l'on conçoive LF variable & croissante. Or LF ne peut être plus grande que a, donc $\frac{yy}{a}$ est la derniere Ordonnée de la Cissoïde. Or alors y, derniere Ordonnée du demi-Cercle, est $= \frac{1}{\infty}$. Donc la derniere, ou plutôt les deux dernieres Ordonnées de la Cissoïde sont $= \frac{1}{a\infty^2}$. Donc les Ordonnées précédentes en nombre infini sont de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$. Donc l'espace Asymptotique Cissoïdal est fini.

Celui de la Conchoïde fini aussi.

1428. Si l'on prend l'Asymptote d'une Conchoïde pour son axe, & que l'on conçoive une infinité de droites tirées du Pole à la Courbe, & coupant par conséquent l'Asymptote, chaque Ordonnée de la Courbe sera le Sinus de l'angle que

fera chacune de ces lignes avec l'Asymptote, le Sinus total étant la partie de ces lignes comprise entre l'Asymptote & la Courbe. Et comme par la nature de la Conchoïde cette partie est constante, & que tous les angles de ces lignes avec l'Asymptote depuis le 1[er] qui est droit, sont aigus & décroissans, les Ordonnées de la Conchoïde sont des Sinus toujours décroissans, pris dans un même Cercle fini. Donc une Ordonnée infiniment petite de la Conchoïde sera le Sinus d'un angle infiniment petit pris dans ce Cercle. Mais rien ne détermine la Conchoïde à se terminer au point où se fait sur son Asymptote un angle infiniment petit du 1[er] ordre ; & l'on peut encore tirer du Pole des lignes qui feront avec l'Asymptote des angles de tous les ordres inférieurs d'infiniment petit. Donc la Conchoïde, aussi-bien que la Logarithmique, a des Ordonnées infiniment petites de tous les ordres, donc son espace Asymptotique est fini.

1429. Il sera bon de prévenir ici une difficulté, qui n'auroit pourtant pas de rapport à la Théorie des espaces Asymptotiques. Pourquoi la Cissoïde n'a-t'elle pas par la même raison que la Conchoïde des Ordonnées infiniment petites d'ordres quelconques? Car les Ordonnées de la Cissoïde se rapportent aussi à celles d'un Cercle, qui peuvent être d'un ordre si bas qu'on voudra. Mais il faut prendre garde que l'Ordonnée de la Cissoïde en général étant $\frac{yy}{LF}$, & que LF, qui croît toujours, ne pouvant être plus grande que a, la Courbe est nécessairement terminée, quand cela arrive ; & alors il n'est nécessaire de concevoir y que $= \frac{1}{\infty}$. Il n'en est pas de même de la Conchoïde.

1430. Il sera utile pour fixer mieux les idées, & même par rapport à ce qui va suivre, de rassembler sous un seul coup d'œil le résultat de tout ce qui a été dit.

Les Ordonnées des Courbes Asymptotiques étant exprimées en nombres, ce sont toujours des fractions $\frac{1}{x}$ décroissantes, la 1[re] Ordonnée ayant été prise pour 1.

Si au lieu de prendre leur derniere différence, comme nous avons fait ordinairement, on ne prend que les deux dernieres Ordonnées égales dont elle eſt la différence, & qui ſont toujours d'un ordre potentiel ſupérieur, ou plutôt la derniere Ordonnée ſeule, ce qui ſuffit, on a vû

Que quand la derniere Ordonnée eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ incomplet, ou, ce qui eſt le même, d'un ordre d'infiniment petit radical pur, les Ordonnées précédentes en nombre infini ſont finies, & l'eſpace Aſymptotique infini (1408, 1409 & 1410).

Que quand la derniere Ordonnée eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ complet, les Ordonnées précédentes ſont encore finies, & l'eſpace Aſymptotique infini (1400).

Quand la derniere Ordonnée eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ incomplet, comme $\frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$, les Ordonnées précédentes en nombre infini ſont des infiniment petits radicaux purs, & l'eſpace Aſymptotique fini (1415 & 1416), après quoi les eſpaces Aſymptotiques ne peuvent être que Finis.

Solides formés par deux différentes révolutions d'un même eſpace Aſymptotique.

1431. Venons maintenant aux Solides formés par la révolution des eſpaces Aſymptotiques. On ne peut faire tourner l'eſpace ou plan *ABCMA* que de deux manieres, ou autour de *AM*, 1[re] Ordonnée de la Courbe, ce que j'appelle 1[re] *révolution*, ou autour de l'Aſymptote *AB*, 2[de] *révolution*.

Il eſt clair d'abord que les Solides de chacune de ces deux révolutions ſeront décroiſſans entr'eux, auſſi-bien que les Eſpaces qui les auront produits.

1432. Commençons par la 1[re] révolution. J'appelle *P* la partie du Solide produite par la révolution du plan *AMμpA* autour de *AM*, & *S* la partie formée par la révolution du plan *pBCμp*.

P eſt égal à un Cylindre qui auroit pour baſe un Cercle dont le rayon ſeroit *Ap*, & pour hauteur quelque Ordonnée moyenne entre *AM*, & *pμ*, toutes deux Finies.

S peut être composé d'autant de Solides partiaux qu'il y aura dans la Courbe après le point μ d'ordres différens d'Ordonnées. Mais comme il n'y a d'Ordonnées en nombre infini que celles qui précédent la derniere, & sont de l'ordre immédiatement supérieur, on ne peut concevoir de Cylindre partial dans *S* qui ait pour base un Cercle dont le rayon soit $= \infty$, que celui qui aura pour rayon de sa base la derniere portion infinie de l'axe où seront les dernieres Ordonnées en nombre infini; & la hauteur de ce Cylindre sera une Ordonnée moyenne entre toutes celles-là. S'il y a plusieurs Cylindres partiaux dans *S*, le premier sera toujours fini, parce qu'il n'aura pour rayon de sa base qu'une étendue finie de l'axe, & pour hauteur une Ordonnée moyenne entre des Ordonnées Finies. Ainsi le Solide total *S* sera toujours au moins Fini. La détermination de son ordre fini ou infini dépendra du dernier Cylindre, qui peut être aussi le seul. Tout cela convient avec ce qui a été dit dans l'art. 1400, & en est une suite. Nous appellerons desormais *S* ce dernier Cylindre, soit qu'il soit précédé de quelques autres, soit qu'il soit seul.

Limites où sont compris les Solides infinis de la 1re révolution.

1433. *S* égal à un Cylindre qui auroit pour rayon de sa base un Cercle dont le rayon $= \infty$, a donc une base de l'ordre de ∞^2. Donc il ne peut être fini que quand il aura une hauteur $= \frac{1}{\infty^2}$, & il ne l'aura que quand la derniere Ordonnée sera de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$. Donc pour toutes les Courbes dont la derniere Ordonnée sera au dessus de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$; le Solide Asymptotique de la 1re révolution sera infini.

1434. Donc pour toutes les Courbes dont la derniere Ordonnée sera de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$, ou de tous les ordres inférieurs, ce Solide ne sera que Fini.

Qu'il y a des Solides infinis produits par des espaces finis.

1435. L'espace Asymptotique cesse d'être infini dès que la derniere Ordonnée est au dessous de $\frac{1}{\infty}$ (1430), donc il y a deux intervalles potentiels, celui de $\frac{1}{\infty}$ exclusivement à $\frac{1}{\infty^2}$, & celui de $\frac{1}{\infty^2}$ à $\frac{1}{\infty^3}$ exclusivement, où les espaces Finis donnent des Solides Infinis.

1436. Trois intervalles comprennent les dernieres Ordonnées auxquelles répondent les Solides infinis. Le 1[er] intervalle commence par des dernieres Ordonnées de l'ordre d'infiniment petit radical pur, le plus élevé qu'il soit possible, & finit par celles de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ complet, & par conséquent comprend toutes celles de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ incomplet, ou qui ne sont des infiniment petits radicaux purs. Le 2[d] commence par celles de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ complet, & finit par celle de $\frac{1}{\infty^2}$ complet, & par conséquent comprend toutes celles de $\frac{1}{\infty^2}$ incomplet. Le 3[me] commence par celles de $\frac{1}{\infty^2}$ incomplet, & finit par celles de $\frac{1}{\infty^3}$ complet, & comprend toutes celles de $\frac{1}{\infty^3}$ incomplet. Les *S* infinis doivent, à commencer par le plus grand, décroître selon ce même ordre, & avec analogie à cet ordre.

La base de *S* est toujours de l'ordre de ∞^2. Quand la derniere Ordonnée est $= \frac{1}{\infty}$, il faut multiplier ∞^2 par la même grandeur $\frac{1}{x}$ qui dans l'art. 1402 a donné l'espace Asymptotique. Or cet espace $\frac{\infty}{x}$ n'est qu'un infini radical pur (1413), ou, ce qui est le même, n'est que de l'ordre de ∞ incomplet. Donc le Solide $\frac{\infty^2}{x}$ ne sera que de l'ordre de ∞^2 incomplet, comme est, par exemple, $\infty^{\frac{3}{2}}$. Mais une derniere Ordonnée de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ complet est la grandeur qui finit le 1[er] des 3 intervalles posés. Donc à cette grandeur répond un *S* de l'ordre de ∞^2 incomplet, & cet *S* est unique dans cet intervalle, comme l'étoit l'Ordonnée $= \frac{1}{\infty}$. Donc à toutes les Ordonnées supérieures ont répondu des *S* de l'ordre de ∞^2 complet.

Ensuite dans le 2[d] intervalle il n'y aura que des *S* de l'ordre de ∞^2 incomplet, & décroissans jusqu'au dernier qui sera de l'ordre de ∞. Et dans le 3[me] intervalle seront des *S*

infinis radicaux purs décroissans jusqu'au dernier qui sera Fini.

1437. Les Solides Asymptotiques infinis de la 1[re] révolution ne passent point l'ordre de ∞^2 complet.

1438. Soit maintenant la 2[de] révolution. *S* y est égal à un Cylindre dont la hauteur sera toujours $= \infty$, & la base le quarré de l'Ordonnée moyenne entre celles qui précedent la derniere, & sont en nombre infini.

S'il y a des *S* infinis, ils seront au moins dans le 1[er] des 3 intervalles de l'art. précédent. Dans cet intervalle les Ordonnées en nombre infini sont toujours Finies, & sont des $\frac{1}{x}$ (1430), non-seulement toujours décroissantes dans une même Courbe, mais encore d'une supérieure ou moins Asymptotique à une inférieure ou plus Asymptotique. Par conséquent leurs dénominateurs *x* sont croissans de la même façon.

Dans cet intervalle $S = \infty \times \frac{1}{x^2} = \frac{\infty}{x^2}$, sera infini, x^2 étant fini: mais il ne sera que fini, si x^2 peut être infini. Les *x* étant toujours croissans des Courbes supérieures de cet intervalle aux inférieures, les *x* des Courbes les plus supérieures peuvent être trop petits pour devenir infinis par l'élévation au quarré, mais ils pourront être assez grands pour cela dans quelques Courbes inférieures. La derniere Courbe de cet intervalle est celle dont la derniere Ordonnée est $\frac{1}{\infty}$ complet. Or il est certain que dans cette Courbe analogue à $\frac{1}{A}$ (1396), les *x* du cours Asymptotique sont tels qu'ils deviennent infinis par l'élévation au quarré. Donc dans cette Courbe $S = \frac{\infty}{\infty}$ grandeur finie (188).

1439. Je dis en même temps que toutes les Courbes de ce même intervalle, supérieures à la derniere, doivent avoir leurs *S* infinis Car cet intervalle comprend toutes les Courbes, dont les dernieres Ordonnées sont des infiniment petits radicaux purs, qui descendent par tous les ordres radicaux possibles supérieurs à $\frac{1}{\infty}$, & tous compris dans le seul ordre

Limites où sont compris les Solides infinis de la 2de révolution.

potentiel qui eſt entre 1 & $\frac{1}{\infty}$. Donc les *S* correſpondans, dont la Suite ſe termine par un *S* Fini (1438), doivent être tous compris dans le ſeul ordre potentiel qui eſt entre ∞ & 1. Et comme la Suite des dernieres Ordonnées n'eſt compoſée que de différens ordres d'infiniment petits radicaux purs, qui ſe terminent par $\frac{1}{\infty}$, la Suite des *S* n'eſt compoſée que d'infinis radicaux purs, qui ſe terminent par 1. Donc, &c.

Que les Solides infinis de la 2de révolution ne ſont que des Infinis radicaux purs.

1440. La même correſpondance ou analogie des deux Suites fait voir que comme celle des dernieres Ordonnées ne peut commencer par 1, 1er terme de l'ordre potentiel qui s'étend depuis 1 juſqu'à $\frac{1}{\infty}$, puiſque jamais la derniere Ordonnée d'une Courbe Aſymptotique ne peut être Finie dans l'hypotheſe de toute cette Sect. de même la Suite des *S* ne peut commencer par ∞ potentiel, 1er terme de l'ordre qui s'étend depuis ∞ juſqu'à 1. Donc tous les *S* infinis de la 2de révolution, ne ſont que des infinis radicaux purs.

1441. Donc depuis le dernier *S* incluſivement du 1er intervalle, qui eſt en même temps le 1er *S* du 2d, tous les *S* ſont finis ou infiniment petits pour toutes les Courbes inférieures, & par conſéquent les Solides totaux de la 2de révolution toujours Finis.

1442. Mais il ſera bon d'approfondir davantage ce qui arrive dans le 2d intervalle, où l'on pourroit trouver de la difficulté. Les Ordonnées en nombre infini, dont la moyenne détermine l'ordre de *S*, ſont des infiniment petits radicaux purs, dont les plus grands ſont des $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$, & les moindres des $\frac{1}{\infty^{\frac{n}{n+1}}}$, & le moyen $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$ (1419). Si l'on prend le *S* d'une Courbe, dont les Ordonnées en nombre infini ſoient des $\frac{1}{\infty^{\frac{n}{n+1}}}$, on aura $S = \infty \times \frac{1}{\infty^{\frac{2n}{n+1}}} = \infty^{\frac{1-n}{n+1}}$. Si $n = 1$,

auquel

auquel cas $\frac{1}{\infty^{\frac{n}{n+1}}} = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$, on aura $S = \infty^{\frac{0}{n+1}} = 1$, & ensuite n étant plus grand que 1, on aura toujours S infiniment petit. Cela quadre avec l'art. précédent, & fait juger que pour les Courbes supérieures, dont les Ordonnées en nombre infini seront des $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$, S sera fini. Cependant on trouve $S = \infty \times \frac{1}{\infty^{\frac{2}{n}}} = \infty^{\frac{n-2}{n}}$, qui n'est $= 1$ que dans le cas, où $n = 2$, qui est celui où $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$, & pour tous les autres cas où $n > 2$, $\infty^{\frac{n-2}{n}}$ est un infini radical pur. Or il n'est pas possible que cela soit, puisque le 1er S de ce 2^d^ intervalle n'est que Fini. Mais voici d'où est venue l'erreur.

Les Ordonnées en nombre infini d'une Courbe Asymptotique quelconque sont décroissantes dans leur ordre, quel qu'il soit. Si elles sont de l'ordre de $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$, & par exemple, de l'ordre de $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{3}}}$, il faut, pour les concevoir décroissantes, concevoir que ce sont des $\frac{1}{z\infty^{\frac{1}{3}}}$; z étant un nombre fini variable, toujours croissant. Ce z ne fait rien à l'ordre des Ordonnées, tant qu'on ne les prend qu'à leur 1re puissance: mais si on les quarre, on a $\frac{1}{z^2\infty^{\frac{2}{3}}}$, & z^2 peut être devenu un infini qui élevera l'ordre de $\infty^{\frac{2}{3}}$, & il n'a besoin pour

cela que d'être un très-petit infini. Ici, où il faut quarrer une Ordonnée moyenne, il ne la faut pas prendre ſimplement $= \frac{1}{\infty^{\frac{2}{3}}}$, mais $= \frac{1}{z^2 \infty^{\frac{2}{3}}}$, ce qui donnera S, non pas $= \infty \times \frac{1}{\infty^{\frac{2}{3}}} = \infty^{\frac{1}{3}}$, mais $= \frac{\infty}{z^2 \infty^{\frac{2}{3}}}$, & cette grandeur ſera finie, pourvu que z^2 ſoit un petit infini : or il peut l'être, & il le ſera néceſſairement, puiſque S ne peut être alors infini, un S ſupérieur étant fini (1438).

1442. On voit par-là que dans le 2[d] intervalle le dernier S fini ne ſera pas préciſément celui du milieu qui appartient aux Courbes, dont les Ordonnées en nombre infini ſont des $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$, mais qu'il ſera un peu plus haut, ce qui eſt indéterminable.

Qu'il y a des Solides finis produits par des eſpaces infinis.

1443. Le 1[er] S de cet intervalle étant fini, & par conſéquent le Solide total de toutes les Courbes Aſymptotiques, dont la derniere Ordonnée eſt $\frac{1}{\infty}$, & ces Courbes ayant leur eſpace Aſymptotique infini (1430), il y a donc des Solides finis formés par des eſpaces infinis, ce qui eſt le cas oppoſé à celui de l'art. 1435.

1444. Le cas de l'art. 1435 arrive dans l'étendue de deux ordres potentiels, au lieu que celui-ci n'arrive qu'à l'extrémité d'un ſeul.

Exemples de Solides des deux révolutions en différentes Courbes.

1445. L'Hyperbole du 2[d] degré a ſon ſolide de la 1[re] révolution, infini, & celui de la 2[de], fini.

1446. Et pour donner un exemple de toutes les Hyperboles dans un ſeul degré, qui fera ſuffiſamment juger de tous les autres, je prens les quatre Hyperboles du 5[me] degré. La derniere Ordonnée de la 1[re] eſt $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{4}}}$, de la 2[de], $\frac{1}{\infty^{\frac{2}{3}}}$, de la 3[me], $\frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$, de la 4[me], $\frac{1}{\infty^4}$. Donc la 1[re] aura ſes deux Solides infinis, la 2[de] pareillement, la 3[me] aura celui de la 1[re]

révolution, infini, & celui de la 2de, fini, la 4me, tous deux finis.

1447. La derniere Ordonnée de la Cissoïde étant $\frac{1}{\infty^2}$ (1427), son Solide de la 1re révolution sera infini, & celui de la 2de, fini.

1448. La Conchoïde les a tous deux finis, & pareillement la Logarithmique.



SECTION VII.

Sur la Communication ou non-Communication des Rapports éntre l'Infini & le Fini.

1449. DEs Grandeurs du même ordre quelconque ne peuvent avoir entr'elles que des rapports finis, & tous les ordres étant parfaitement analogues les uns aux autres, dès que certains rapports finis ſont dans un ordre, ils doivent être néceſſairement dans un autre ordre quelconque; il y a dans tous les ordres des grandeurs qui ſont comme 1 à 2, & comme 1 à 3, &c. cela eſt bien ſûr, & ce n'eſt pas ce que nous voulons traiter ici. Mais il y a des grandeurs infinies entre leſquelles on ne trouve des rapports finis que par le moyen du Calcul de l'Infini, & par les principes qui lui ſont particuliers. Par ex. on ne ſait que par le Calcul de l'Infini, que la ſomme des Quarrés naturels eſt $\frac{\infty^3}{3}$, car pour avoir cette ſomme, il a fallu négliger des grandeurs (580) que l'on n'eût pas négligées dans le Fini, & ſi l'on conçoit une autre Suite formée du même nombre de grandeurs toutes égales à ∞^2, dernier Quarré naturel, ſa ſomme ſera ∞^3, & les ſommes des deux Suites :: 1 . 3, rapport fini, que je dis qui ſe retrouvera entre deux autres ſommes pareilles, quoique finies. C'eſt là ce que j'appelle *Communication des rapports entre l'Infini & le Fini*, parce que ces rapports ne ſe trouvent dans le Fini que conſidéré comme Infini, & quelquefois ne ſe trouveroient pas autrement, ou du moins, pas ſi aiſément, & d'une maniere ſi naturelle.

1450. Une Suite croiſſante d'un nombre infini de grandeurs, que je ſuppoſe toujours $= \infty$, étant poſée, j'appelle Suite *pleine*, par rapport à celle-là, celle qui ſeroit formée du même nombre de grandeurs toutes égales à la derniere de la Suite croiſſante.

1451. Toutes les Suites croissantes de nombres, telles que les A, A^n, $A^{\frac{1}{n}}$, &c. pouvant être conçues comme des Lignes disposées sur un axe $= \infty$, & divisé en une infinité de parties toutes $= 1$, elles forment ou remplissent un certain espace, & la Suite pleine correspondante en forme un autre qui est un parallélogramme, dont un des côtés est l'axe $= \infty$, & l'autre la plus grande ligne de la Suite croissante. J'appelle ce parallélogramme *circonscrit* à l'espace rempli par les Lignes croissantes, ou à l'espace *croissant*.

1452. Le rapport du parallélogramme circonscrit à l'espace croissant est le même que celui de la somme de la Suite pleine à celle de la Suite croissante.

Que les Parallélogrammes circonscrits à des Espaces croissans, ont le même rapport à ces Espaces, tant dans le fini que dans l'infini.

1453. Si le rapport d'une de ces sommes infinies à l'autre, & par conséquent celui des deux espaces, est fini, il demeurera encore le même, quand les intervalles finis égaux, qu'on a supposés entre les Lignes, & qui ne faisoient rien au rapport de ces Lignes, seront devenus des infiniment petits égaux, & quand en même temps les Lignes de chaque ordre différent seront devenues de l'ordre immédiatement inférieur, en conservant le même rapport entr'elles. Or alors les espaces infinis sont devenus Finis. Donc le rapport fini du parallélogramme circonscrit à l'espace croissant sera le même dans l'Infini & dans le Fini, dans les deux Touts, & dans leurs parties quelconques correspondantes.

1454. Quand le dernier terme d'une Suite infinie croissante est $\infty^{\frac{n}{m}}$, quelques nombres que soient n & m, & que la somme de cette Suite est $\infty^{\frac{n}{m}+1}$, de quelques coëfficiens finis $\frac{r}{p}$ que soit affecté cet $\infty^{\frac{n}{m}+1}$, la somme de la Suite pleine, qui est le dernier terme de la Suite croissante multiplié par ∞, ou $\infty^{\frac{n}{m}+1}$, a toujours un rapport fini à la somme

de la Suite croiſſante qui eſt $\frac{r\infty^{\frac{n}{m}+1}}{p}$, car la 1[re] eſt à la 2[de] :: 1 . $\frac{r}{p}$. Donc il y aura toujours un parallélogramme circonſcrit qui aura ce rapport à l'eſpace croiſſant, tant dans le Fini que dans l'Infini.

Détermination du rapport des Eſpaces Paraboliques aux parallélogrammes circonſcrits.

1455. La Parabole ordinaire ou du 2[d] degré étant $x = y^2$; où x eſt un axe ou infini ou fini, diviſé en une infinité de parties égales finies ou infiniment petites, & par conſéquent croiſſant ſelon la Suite des nombres naturels, la Suite des Ordonnées y eſt croiſſante comme les $\sqrt[2]{}$ des nombres naturels. Or la ſomme de la Suite de ces $\sqrt[2]{}$ eſt $\frac{2\infty^{\frac{3}{2}}}{3}$ (584) qui eſt à $\infty^{\frac{1}{2}} \times \infty = \infty^{\frac{3}{2}}$, ſomme de la ſuite pleine :: 2 . 3. Donc tout eſpace de cette Parabole fini ou infini eſt à ſon parallélogramme circonſcrit :: 2 . 3.

1456. De même dans la 1[re] Parabole du 3[me] degré $x = y^3$, les y étant croiſſantes comme les $\sqrt[3]{}$ des nombres naturels, dont la ſomme eſt $\frac{3\infty^{\frac{4}{3}}}{4}$ (584), & celle de la Suite pleine étant $\infty^{\frac{1}{3}} \times \infty = \infty^{\frac{4}{3}}$, l'eſpace croiſſant eſt au parallélogramme circonſcrit :: 3 . 4.

1457. Dans la 2[de] Parabole du même degré $x^2 = y^3$, les y étant croiſſantes comme les nombres naturels élevés à $\frac{2}{3}$, dont la ſomme eſt $\frac{3\infty^{\frac{5}{3}}}{5}$, & la ſomme de la Suite pleine étant $\infty^{\frac{2}{3}} \times \infty = \infty^{\frac{5}{3}}$, les deux eſpaces ſont :: 3 . 5.

1458. En général on trouvera toujours que les y de toutes les Paraboles croiſſant toujours comme les nombres naturels élevés à $\frac{1}{n}$ ou $\frac{n}{m}$, n étant $< m$, les eſpaces Paraboliques croiſſans finis ou infinis auront à leurs parallélogrammes

circonſcrits les mêmes rapports finis que les ſommes des Suites des nombres naturels, ainſi élevés, aux ſommes des Suites pleines.

1459. Les eſpaces Paraboliques que nous trouvons ici, ſont les eſpaces intérieurs, c'eſt-à-dire, pris du côté que les Paraboles ſont concaves vers leur axe, mais il reſte les extérieurs, ceux qui ſont de l'autre côté, toujours compris les uns & les autres dans le même parallélogramme circonſcrit, auquel, pris tous deux enſemble, ils ſont égaux. Donc le rapport de l'eſpace intérieur au parallélogramme étant connu, celui de l'extérieur, complément du parallélogramme, l'eſt auſſi. Par exemple, dans la Parabole du 2d degré, l'eſpace intérieur étant les $\frac{2}{3}$ du parallélogramme, l'extérieur en eſt $\frac{1}{3}$. Mais cela ſe peut trouver encore directement, en tranſpoſant les axes des Paraboles, c'eſt-à-dire, en mettant dans leur équation x au lieu de y, & y au lieu de x, x repréſentant toujours la Suite des nombres naturels. Par exemple, dans la Parabole du 2d degré on aura $x^2 = y$, & par conſéquent les Ordonnées croiſſantes comme les Quarrés des nombres naturels, dont la ſomme eſt $\frac{\infty^3}{3}$ (580). Le parallélogramme ſera $\infty^2 \times \infty = \infty^3$, & l'eſpace Parabolique au parallélogramme :: 1 . 3.

1460. Il peut ſe préſenter ici une difficulté apparente. Lorſqu'on a conſidéré l'eſpace intérieur de cette Parabole, on a eu $x = \infty$, & $y = \infty^{\frac{1}{2}}$; or en la tranſpoſant, on doit ſeulement trouver que ce qui étoit x eſt devenu y, & réciproquement, donc ici $x = \infty^{\frac{1}{2}}$, & non pas $= \infty$, & $y = \infty$, & non pas $= \infty^2$, ce qui donnera ſeulement pour le parallélogramme circonſcrit $\infty^{\frac{3}{2}}$, comme on l'avoit eu d'abord, & non pas ∞^3. Mais il faut obſerver que quand dans l'hypotheſe de la tranſpoſition on ne prendra x que $= \infty^{\frac{1}{2}}$, cela n'empêchera pas qu'il ne ſoit diviſé en une infinité de parties finies égales, & qu'il ne croiſſe ſelon la Suite des nombres naturels, ſeulement ſes parties égales ſeront moindres que

l'unité qu'on ſuppoſoit dans la premiere hypotheſe, & les y croîtront toujours comme les Quarrés naturels, ce qui donne toujours le même rapport du parallélogramme circonſcrit à l'eſpace Parabolique; or il ne s'agit ici que de rapports.

1461. On trouvera très-aiſément de la même maniere que les Ordonnées extérieures de toutes les Paraboles quelconques ſont les Suites infinies des nombres naturels élevés à n, ou à $\frac{m}{n}$, m étant $> n$, & comme on a les ſommes de toutes ces Suites (584), on aura auſſi directement tous les eſpaces Paraboliques extérieurs par leurs rapports aux parallélogrammes circonſcrits.

1462. On peut regarder le Triangle comme la Parabole du 1[er] degré, & en effet il eſt la ſomme des nombres naturels élevés à 1, il eſt donc $\frac{\infty^2}{2}$, & ſon parallélogramme circonſcrit eſt ∞^2, ce qui donne le rapport ſi connu de 1 à 2.

1463. S'il étoit impoſſible d'avoir ou tous ces rapports, ou quelques-uns d'entr'eux, par des méthodes qui ne ſuppoſaſſent point l'Infini, on les auroit par celles qui le ſuppoſent, mais du moins les a-t'on par celles-ci d'une maniere plus courte, plus générale, & plus lumineuſe. Il eſt même certain qu'on les prend ici dans leur véritable ſource, car réellement tout Fini eſt un Infini.

Que le rapport d'un Eſpace Aſymptotique infini ou fini à ſon parallélogramme circonſcrit, ne peut ſe retrouver dans le fini.

1464. Les eſpaces Aſymptotiques peuvent toujours avoir un parallélogramme circonſcrit, puiſqu'ils ſont étendus le long d'un axe $= \infty$, & qu'il y a une 1[re], & plus grande Ordonnée finie de la Courbe, ce qui fait le rectangle $1 \times \infty = \infty$. Mais tout eſpace Aſymptotique eſt fini ou infini, & s'il eſt Infini, il ne peut être qu'un Infini radical pur (1413): or le rapport de ∞ ſoit au Fini, ſoit à un Infini radical pur, ne peut jamais être dans le Fini; donc il n'eſt pas poſſible qu'il y ait dans le Fini un eſpace qui ait à un autre le rapport d'un eſpace Aſymptotique à ſon parallélogramme circonſcrit. C'eſt là ce que j'appelle la *non-Communication des rapports entre l'Infini & le Fini*.

1465. Il est visible que cela n'empêche pas qu'un espace Asymptotique fini n'ait un rapport fini à quelqu'autre espace que son parallélogramme circonscrit. Ainsi l'espace Asymptotique Cissoïdal est triple du demi-Cercle générateur. De même il est possible qu'un espace Asymptotique infini ait un rapport fini à quelqu'autre espace infini que son parallélogramme.

1466. Il n'y a point de portion finie d'un espace Asymptotique, qui puisse avoir à son parallélogramme circonscrit le même rapport que l'espace Asymptotique entier a au sien; car ce rapport est celui de 1 ou de $\infty \frac{1}{n}$ à ∞, & ce rapport ne peut être entre deux grandeurs Finies. C'est là le contraire de ce qu'on a vû dans les espaces Paraboliques.

1467. Au défaut du rapport de l'espace Asymptotique à son parallélogramme circonscrit, on peut trouver l'ordre dont est cet espace, qui est toujours ou Fini ou Infini radical pur, son parallélogramme étant ∞, & cela se trouve tout d'un coup, quand les Ordonnées de la Courbe sont représentées par des Suites de nombres, dont on connoît l'ordre des sommes, l'axe ou Asymptote x croissant toujours comme les nombres naturels. Ainsi parce que l'Hyperbole ordinaire ou du 2d degré, prise entre ses Asymptotes, est $xy = 1$, on a $y = \frac{1}{x}$, c'est-à-dire, les Ordonnées décroissantes comme la Suite $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, &c. qui est celle des nombres naturels réduits en fractions, dont la somme est infinie (*362* & *600*).

Que les Espaces Asymptotiques de toutes les Hyperboles sont représentés par les sommes des Suites $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{A^2}$, *&c.*

De même de ce que la 1re Hyperbole du 3me degré est $xy^2 = 1$, il suit $y = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, & par conséquent la Suite des Ordonnées est celle des $\sqrt[2]{}$ des nombres naturels réduites en fractions, or la somme en est infinie (*366*).

La 2de Hyperbole du 3me degré est $x^2 y = 1$, & par conséquent $y = \frac{1}{x^2}$, & la Suite des Ordonnées est celle des

Quarrés naturels réduits en fractions, dont la ſomme eſt finie (363).

1468. Nous n'avons conſidéré ici les eſpaces Hyperboliques que du côté où l'une des Aſymptotes a été priſe pour l'axe $x = \infty$. Si l'on veut conſidérer dans chaque Hyperbole l'eſpace qui eſt de l'autre côté, il n'y a qu'à prendre pareillement l'autre Aſymptote pour l'axe $x = \infty$, & pour cela changer en x ce qui étoit y dans l'équation des Hyperboles, & en y ce qui étoit x. On trouvera que dans l'Hyperbole du 2d degré, ce changement ne fera rien à l'eſpace, que la 1re du 3me deviendra la 2de du même degré, & que par conſéquent l'eſpace qu'elle avoit infini deviendra fini, & toujours ainſi de ſuite. Ce qui revient à l'art. 1426.

Comme les Eſpaces Paraboliques le ſont par les ſommes des A, *ou* $A^{\frac{1}{2}}$, *ou* A^2, *&c.*

1469. De tout cela il ſuit, & on le pourra voir plus en détail, ſi l'on veut, que tous les eſpaces Paraboliques étant des ſommes de Suites infinies des nombres naturels élevés à des puiſſances quelconques parfaites ou imparfaites (1455, &c. 1461), les eſpaces Aſymptotiques des Hyperboles ſont les ſommes de ces mêmes Suites réduites en fractions, dont 1 eſt le numérateur conſtant. Ainſi puiſqu'on a les ſommes de toutes les Suites des nombres naturels élevés à des puiſſances quelconques (580, &c. 584), & l'ordre des ſommes de toutes ces Suites réduites en fractions (366, 367, 368), on a par les propriétés des nombres naturels la quadrature de tous les eſpaces Paraboliques finis ou infinis, & l'ordre de tous les eſpaces Aſymptotiques Hyperboliques, de ſorte que ſur les ſommes ou ſur l'ordre des ſommes des nombres naturels élevés à des puiſſances quelconques, ſoit entiers, ſoit réduits en fractions, il ne reſte rien qui ne ſoit pris, pour ainſi dire, par les eſpaces Paraboliques, ou Hyperboliques.

Que les ſommes infinies des $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}$ *&c. ne ſont que des Infinis radicaux purs.*

1470. Quand ces Suites fractionnaires ont des ſommes infinies, comme le ſont celles de $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. ou de $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, &c. ces ſommes ne ſont que des Infinis radicaux purs, car elles repréſentent des eſpaces Aſymptotiques, qui quand ils ſont infinis, ne peuvent être que de cette eſpece

d'Infinis. C'eſt là une connoiſſance ſur ces Suites que l'on n'auroit pas eue, en ne les conſidérant qu'en elles-mêmes, & ſans les appliquer à des eſpaces Hyperboliques. On eût pû croire que leurs ſommes toujours néceſſairement moindres que ∞, ſomme des Unités, en étoient quelque partie d'une dénomination Finie.

1471. Donc le rapport de ces ſommes infinies à ∞ ne peut jamais être déterminé, car c'eſt celui d'un infini radical pur à ∞.

1472. Par la même raiſon ces ſommes, quoiqu'infinies, & de l'ordre potentiel de ∞, ſont infiniment moindres que ∞. La ſomme infinie de $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. $\frac{1}{\infty}$ eſt infiniment moindre que celle des Unités.

1473. Comme on a les ſommes de toutes les Suites infinies de nombres Polygones (572), & par conſéquent leurs rapports finis aux ſommes des Suites pleines, on aura les quadratures des eſpaces infinis des Courbes, dont les Ordonnées feroient ces nombres Polygones, & par conſéquent auſſi les quadratures des eſpaces curvilignes finis. Ainſi la ſomme infinie des Triangulaires étant $\frac{1\,\infty^3}{6}$, celle des Quarrés $\frac{2\,\infty^3}{6}$, des Pentagones $\frac{3\,\infty^3}{6}$, &c. & les ſommes pleines étant $\frac{1\,\infty^3}{2}$, $\frac{2\,\infty^3}{2}$, $\frac{3\,\infty^3}{2}$, &c. parce que les derniers des Triangulaires, des Quarrés, des Pentagones, &c. ſont $\frac{1\,\infty^2}{2}$, $\frac{2\,\infty^2}{2}$, $\frac{3\,\infty^2}{2}$, &c. on aura toujours le rapport de 1 à 3 pour celui de l'eſpace infini croiſſant à ſon parallélogramme circonſcrit, & pour celui de tout eſpace curviligne fini de la Courbe qui exprimera les nombres Polygones quelconques à ſon parallélogramme.

Que l'on trouve par la voie de l'Infini les quadratures de toutes les Courbes, dont les Ordonnées ſuivront le rapport des nombres Polygones quelconques.

1474. La Courbe des nombres Quarrés eſt évidemment la Parabole priſe du côté qu'elle eſt convexe vers un axe diviſé en parties égales, ou croiſſant ſelon la Suite des nombres naturels, car alors ſes Ordonnées croiſſent comme les Quarrés de ces nombres. On a vû auſſi que ſon eſpace curviligne eſt au parallélogramme circonſcrit :: 1. 3 (1459).

1475. n étant un nombre naturel quelconque, le Triangulaire correſpondant eſt $\frac{nn+n}{2}$, & par conſéquent l'équation de la Courbe des Triangulaires eſt $2ay = xx + ax$, x étant l'axe qui croît ſelon la Suite naturelle. On voit par cette équation que la Courbe des Triangulaires eſt encore la Parabole, mais dont il faut retrancher une certaine portion ſelon que feu M. Carré l'a enſeigné dans les Mém. de l'Acad. de 1701. La portion reſtante infinie, & qui eſt la Courbe des Triangulaires, eſt encore convexe vers l'axe, il n'eſt plus le même, & ne part plus du même point que celui de la Parabole entiere, Courbe des Quarrés. Ses diviſions ne répondent point à celles de l'autre, & les Ordonnées qui en partent, terminées à d'autres points de la Courbe, croiſſent ſelon d'autres rapports.

1476. L'équation différentielle de la portion Parabolique ou Courbe des Triangulaires eſt $2ady = 2xdx + adx$, ce qui donne $dy. dx :: 2x + a. 2a$, & au point où $x = 0$, $dy. dx :: a. 2a :: 1. 2$. La Courbe à ſon origine eſt donc oblique à ſon axe, ce qu'on voit qui ne conviendroit pas à la Parabole entiere.

Que ces Courbes ſeront toujours ou la Parabole du 2d degré, ou des portions de cette Parabole.

1477. En prenant de ſuite les formules des Polygones (572), on verra que l'équation de la Courbe des Pentagones ſera $2ay = 3xx - ax$, de celle des Exagones, $2ay = 4xx - 2ax$, ou $ay = 2xx - ax$, &c. Et comme ces équations ne ſortent point du 2d degré, & qu'elles ſont toujours à la Parabole de ce degré, on voit que les Courbes des nombres Polygones ſeront toujours ou la Parabole de ce degré, ou des portions de cette Parabole, mais différentes, & qui appartiendront ou à une même Parabole, ou à des Paraboles de différens parametres, ce qu'il ſeroit inutile ici d'examiner plus en détail.

Que l'on aura auſſi par la voie de l'Infini les quadratures

1478. On doit raiſonner des Nombres Figurés comme des Polygones.

Le dernier des Naturels étant ∞, & leur ſomme $\frac{\infty^2}{2}$.

Le dernier des Triangul. étant $\frac{\infty^2}{2}$, & leur somme $\frac{\infty^3}{6}$

Le dernier des Pyramidaux étant $\frac{\infty^3}{6}$, & leur somme $\frac{\infty^4}{24}$

Le dernier des Triang. Pyr. étant $\frac{\infty^4}{24}$, & leur somme $\frac{\infty^5}{120}$, &c.

de toutes les Courbes, dont les Ordonnées suivroient le rapport des Nombres Figurés.

Le Parallélogramme circonscrit à la Courbe des Naturels, qui ne sera qu'un Triangle, sera ∞^2, dont le rapport à la somme des Naturels sera $\frac{2}{1}$.

Le parallélogramme circonscrit à la Courbe des Triangulaires sera $\frac{\infty^3}{2}$, dont le rapport à l'espace curviligne des Triangulaires sera $\frac{3}{1}$.

Le Parallélogramme circonscrit à la Courbe des Pyramidaux sera $\frac{\infty^4}{6}$, dont le rapport à l'espace curviligne des Pyramidaux sera $\frac{4}{1}$, & toujours ainsi de suite.

Donc aussi dans toutes les Courbes, dont les Ordonnées représenteront les différens ordres des nombres Figurés, les espaces curvilignes finis seront à leurs parallélogrammes circonscrits : : 1. 2, à compter le Triangle parmi ces Courbes, ou : : 1. 3, ou : : 1. 4, &c.

1479. La quadrature des Courbes des nombres Figurés prise de suite, à commencer par celle des nombres Naturels, est donc la même, ou consiste dans le même rapport que celle des 1res Paraboles de chaque degré prises de suite, à commencer par le Triangle, & considérées du côté qu'elles sont convexes vers leur axe (1459, 1461 & 1462).

Que ces Courbes seront les 1res Paraboles de chaque degré, ou des portions de ces Paraboles.

1480. De-là, & de ce que les quadratures des deux 1ers ordres de nombres Figurés sont effectivement celles de deux Paraboles des deux 1ers degrés, le Triangle, & la Parabole ordinaire, on peut conjecturer que les quadratures des ordres suivans de nombres Figurés, sont celles des 1res Paraboles des degrés suivans. Et en effet l'équation de la Courbe des Pyramidaux étant $6a^2y = x^3 + 3ax^2 + 2a^2x$, celle des Triang. Pyram. $24a^3y = x^4 + 6ax^3 + 11a^2x^2 + 6a^3x$ (126), &c. on voit que toutes ces équations sont toujours à des Paraboles de tous les degrés consécutifs, mais

différemment prises, de la maniere dont on a donné l'idée dans l'art. 1475.

Que des Espaces Asymptotiques Hyperboliques, mais modifiés, seront représentés par les sommes des Polygones ou Figurés réduits en fractions.

1481. L'analogie conduit à croire que si on réduit en fractions les différentes Suites de nombres Polygones, & de Figurés, les espaces curvilignes formés de ces différentes Suites d'Ordonnées décroissantes seront des espaces Hyperboliques Asymptotiques, ceux qui seront formés par des nombres Poligones appartenant tous à une même Hyperbole, & ceux qui seront formés par des nombres Figurés appartenant de suite à des Hyperboles de degrés consécutifs. C'est ce qui se trouve en effet.

Il est sûr déja qu'entre les Polygones les nombres Quarrés réduits en fractions appartiennent à la 2de & derniere Hyperbole du 3me degré, prise du côté où $x = \infty$ (1216), car x étant tous les nombres Naturels de suite, dont les Quarrés réduits en fractions sont $\frac{1}{xx}$, l'équation de cette Hyperbole est $y = \frac{1}{xx}$. De même l'équation de la Courbe des Triangulaires étant $y = \frac{xx+ax}{2a}$ (1475) elle devient, lorsqu'elle est réduite en fractions, $y = \frac{2a}{xx+ax} = \frac{1}{xx+x}$, qui est encore une équation à cette même Hyperbole, mais modifiée. Il en ira de même des autres nombres Polygones, qui ne sortent point d'un même degré.

Il est sûr aussi que les 1ers des Figurés, c'est-à-dire, les Naturels réduits en fractions, forment l'espace Asymptotique de l'Hyperbole ordinaire ou du 2d degré. Nous venons de voir que les Triangulaires, les 2ds des Figurés réduits en fractions appartiennent à la 2de Hyperbole du 3me degré, ce qui doit déterminer tous les Figurés suivans à appartenir aux Hyperboles des degrés suivans, & même à la derniere de chaque degré. Cette derniere circonstance paroîtra encore plus clairement, si l'on considere que les derniers termes des Figurés s'élevant toujours d'un ordre potentiel, & par conséquent s'abaissant toujours aussi d'un ordre, lorsqu'ils sont réduits en fractions, les dernieres Ordonnées des dernieres Hyperboles

de chaque degré s'abaiſſent toujours préciſément de même (1215, 1216, 1217, &c.)

1482. Donc les eſpaces Paraboliques & Hyperboliques Aſymptotiques répondent non-ſeulement à toutes les Suites poſſibles de Nombres Naturels entiers, ou réduits en fractions élevés à des puiſſances quelconques, mais encore à toutes les Suites de nombres Polygones ou Figurés entiers ou réduits en fractions.

Quadrature de tous les Eſpaces Spiraux par l'infini.

1483. S'il s'agiſſoit de plans formés, non par des lignes paralleles entr'elles, mais par des lignes concourantes en un point, on en auroit les quadratures par la même communication de rapports entre l'Infini & le Fini. Soit, par exemple, la Spirale d'Archimede, telle que c étant la circonférence du Cercle, dans lequel elle ſe décrit, r le rayon, x l'arc indéterminé de la circonférence correſpondant au mouvement, par lequel une portion de la Spirale a été décrite, & y le rayon de la Spirale correſpondant à x, on ait toujours $c. x :: r. y$, je dis que la quadrature de la Spirale, ou le rapport de l'eſpace Spiral au circulaire ſe trouvera par l'Infini.

Il faut imaginer un Cercle dont le rayon ſoit $= \infty$, & dont l'aire (1365) ſoit remplie par une infinité de Triangles égaux iſoſceles, infiniment petits par rapport à elle. Il faut d'un autre côté imaginer dans ce Cercle une Spirale pareillement infinie, dont l'aire ſoit remplie d'uu même nombre infini de Triangles, infiniment petits auſſi par rapport à elle, & croiſſans. Ils ne ſont pas iſoſceles comme ceux du Cercle; car la Spirale s'éloignant toujours du centre du Cercle à meſure qu'elle croît, ou s'étend, un Triangle Spiral quelconque, dont la baſe eſt un arc fini de la Spirale, a toujours un de ſes côtés plus grand que l'autre. Mais on doit concevoir que du centre du Cercle, où ſont les ſommets de tous les Triangles, il ſoit décrit par l'extremité du plus petit côté d'un Triangle Spiral, un arc circulaire fini, qui rendra chaque Triangle iſoſcele, en y négligeant la partie retranchée du plus grand côté, ou plutôt l'eſpace mixtiligne qui ſe formera à l'extremité de chaque Triangle; car cet eſpace qui eſt fini, eſt infiniment

petit par rapport au Triangle, qui eſt de l'ordre de ∞, & quoiqu'exiſtant, l'exactitude demande qu'on le néglige, comme dans l'exemple de l'art. 1203.

Tous les Triangles Spiraux ſont donc iſoſceles, & parce qu'ils ont tous le même angle au ſommet, ils ſont ſemblables. D'un autre côté le dernier, & plus grand Triangle Spiral eſt égal à un des Circulaires qui ſont tous égaux entr'eux. Donc tout Triangle Spiral eſt ſemblable à un Circulaire.

L'aire du Cercle eſt la ſomme des aires de tous les Triangles Circulaires, & l'aire de la Spirale eſt la ſomme des aires de tous les Triangles Spiraux, tous ſemblables aux Circulaires. Or les aires de deux Triangles ſemblables ſont comme les Quarrés de leurs côtés homologues, donc la ſomme des aires de tous les Triangles circulaires ſera à la ſomme des aires de tous les Spiraux, comme la ſomme des Quarrés des rayons du Cercle infini à la ſomme des Quarrés des y de la Spirale, qui ſont des côtés des Triangles Spiraux homologues à ceux des Circulaires.

Or la ſomme des Quarrés des rayons du Cercle eſt $\infty^2 \times \infty = \infty^3$, & les y de la Spirale croiſſent comme les nombres naturels, parce qu'ils croiſſent toujours comme les x, qui ſont toujours ſuppoſés croître comme ces nombres. La ſomme des Quarrés naturels eſt $\frac{\infty^3}{3}$. Donc l'eſpace Circulaire eſt au Spiral :: 3. 1. Et de-là ſuit le même rapport dans le Fini.

1484. Si dans une autre Spirale que celle d'Archimede, on avoit $c. x :: r^2. y^2$, les y ou côtés des Triangles infiniment petits de cette Spirale, priſe dans le Fini, ſeroient donc tels que leurs Quarrés croîtroient comme les nombres naturels. Or des grandeurs dont les Quarrés croiſſent comme les nombres naturels, ne peuvent être que comme les $\sqrt[2]{}$ de ces nombres. Donc les y ſont repréſentés par les $\sqrt[2]{}$ des nombres naturels. Donc l'eſpace Spiral, qui eſt comme la ſomme des Quarrés des y, eſt comme la ſomme des nombres naturels

rels

rels $= \frac{\infty^2}{2}$. D'un autre côté la somme des quarrés de tous les côtés des Triangles égaux du Cercle, sera comme $\infty \times \infty = \infty^2$ Donc l'espace Circulaire sera au Spiral :: 2. 1.

1485. Si on a $c . x :: r^3 . y^3$, les y de la Spirale croissent donc comme les $\sqrt[3]{}$ des nombres naturels, & ces y étant quarrés, on a pour l'espace Spiral la somme des nombres naturels élevés à $\frac{2}{3}$. Or cette somme est $\frac{3\infty^{\frac{5}{3}}}{5}$ (584); la somme des quarrés de tous les côtés des Triangles égaux du Cercle, sera $\infty^{\frac{2}{3}} \times \infty = \infty^{\frac{5}{3}}$. Donc l'espace Circulaire sera au Spiral :: 5. 3.

1486. En général, si on a $c . x :: r^{\frac{n}{m}} . y^{\frac{n}{m}}$, les y de la Spirale sont donc tels, qu'élevés à $\frac{n}{m}$ ils croissent comme les nombres naturels. Or les seuls nombres qui élevés à $\frac{n}{m}$ croissent comme les naturels, sont les naturels élevés à $\frac{n}{m}$ car $x^{\frac{m}{n}}$ élevé à $\frac{n}{m}$, est $x^{\frac{mn}{nm}} = x$. Donc il faut prendre les quarrés des nombres naturels élevés à $\frac{m}{n}$, c'est-à-dire, élever les naturels à $\frac{2m}{n}$, & leur somme représentera l'espace Spiral. Par exemple, si on a $c . x :: r^{\frac{2}{3}} . y^{\frac{2}{3}}$, l'espace Spiral sera comme la somme des naturels élevés à $\frac{3 \times 2}{2} = 3$. Or cette somme est $\frac{\infty^4}{4}$. Donc l'espace Circulaire sera au Spiral :: 4. 1.

1487. Si on a $c^n . x^n :: r^m . y^m$, on a en tirant de ces 4 grandeurs la $\sqrt[n]{}$, $c . x :: r^{\frac{m}{n}} . y^{\frac{m}{n}}$. Ce qui retombe dans l'art. précédent.

1488. Donc le rapport des espaces des Spirales de tous

les degrés aux Cercles circonſcrits, dépend des ſommes infinies des nombres naturels élevés à des puiſſances quelconques, ainſi que le rapport des eſpaces Paraboliques aux parallélogrammes circonſcrits. On voit que ces Cercles auſſi-bien que ces parallélogrammes repréſentent les Suites pleines, & que les premieres & véritables ſources des rapports finis de ces Figures ſont dans l'Infini.

Rapports de différens Conoïdes aux Cylindres circonſcrits, trouvés par l'infini.

1489. On trouvera dans les Solides la même communication des rapports entre l'Infini & le Fini. Il faut les concevoir comme formés de Solides élémentaires en nombre infini, dont ils ſeront les ſommes. Les Solides finis ou infinis croiſſans auront des Solides pleins circonſcrits, qui auront la même hauteur, & toujours la même baſe que la plus grande des Solides croiſſans, les rapports des ſolidités ſeront des rapports de ſommes infinies, & quand on conſiderera des Solides finis, il ne ſera point beſoin de paſſer par les infinis correſpondans : mais on pourra tout d'un coup tranſporter dans le fini les rapports des ſommes infinies.

Soit un Priſme dont la baſe eſt un polygone quelconque fini, & une Pyramide qui ait la même baſe, & la même hauteur ou axe. Le Priſme eſt le Solide plein circonſcrit à la Pyramide, Solide croiſſant. L'axe commun étant diviſé en une infinité de parties égales de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, la ſolidité du Priſme eſt la ſomme d'une infinité de polygones égaux, & ſemblables à celui de la baſe, dont chacun eſt multiplié par $\frac{1}{\infty}$, & la ſolidité de la Pyramide eſt la ſomme d'une même infinité de polygones ſemblables à celui de la baſe, mais dont les rayons, à les compter depuis le ſommet de la Pyramide, croiſſent comme les nombres naturels, & chacun d'eux eſt multiplié par $\frac{1}{\infty}$, ce qui fait que cette multiplication, la même de part & d'autre, n'eſt point à conſidérer. Donc le Priſme eſt à la Pyramide, comme la ſomme des aires de tous les polygones du Priſme eſt à la ſomme des aires de tous les polygones de la Pyramide. Les aires des polygones ſemblables

ſont comme les quarrés de leurs rayons, donc la ſomme des aires des polygones de la Pyramide eſt repréſentée par la ſomme des quarrés des nombres naturels, qui eſt $\frac{\infty^3}{3}$. En même temps la ſomme des aires des polygones du Priſme ne peut être repréſentée que par ∞^3, car chacune de ces aires eſt repréſentée par ∞^2, & elles ſont en nombre $= \infty$. Donc le Priſme eſt à la Pyramide :: 3. 1.

1490. Le Cylindre aura le même rapport au Cone, puiſque la démonſtration précédente laiſſe le polygone de la baſe indéterminé; ce polygone peut donc devenir infini, ou un Cercle, & alors le Priſme eſt un Cylindre, & la Pyramide un Cone.

1491. Si on conçoit qu'un eſpace Parabolique fini du 2d degré tourne autour de ſon axe, ce qui produit un Solide ou Conoïde parabolique, tous les plans qui le formeront ſeront des Cercles croiſſans depuis le ſommet, dont les rayons ſeront les Ordonnées de la Parabole. Or ces Ordonnées étant les $\sqrt[3]{}$ des nombres naturels, les aires de ces Cercles ſeront comme les nombres naturels, dont la ſomme eſt $\frac{\infty^2}{2}$. Le Cylindre circonſcrit au Conoïde ſera repréſenté par ∞^2. Donc il ſera au Conoïde :: 2. 1.

1492. On trouvera de même que les Ordonnées de la 1re Parabole du 3me degré croiſſant comme les $\sqrt[3]{}$ des nombres naturels (1456), les aires des Cercles qui feront le Conoïde de cette Parabole, ſeront comme les nombres naturels élevés à $\frac{2}{3}$. Donc leur ſomme infinie $= \frac{3\infty^{\frac{5}{3}}}{5}$ repréſentera ce Conoïde, auquel le Cylindre circonſcrit ſera :: 5 . 3. Pour la 2de Parabole du même degré, ſes Ordonnées croiſſant comme les nombres naturels élevés à $\frac{2}{3}$, & par conſéquent les aires des Cercles comme ces nombres élevés à $\frac{4}{3}$, la ſomme de ces aires $= \frac{3\infty^{\frac{7}{3}}}{7}$, repréſentera le Conoïde Parabolique auquel le Cylindre ſera :: 7 . 3.

Il ſera aiſé d'en faire, ſi l'on veut, une formule générale.

1493. Les Conoïdes Paraboliques formés par la révolution des eſpaces extérieurs autour de l'axe des Paraboles, pris avec les Conoïdes formés par les eſpaces intérieurs, font le Cylindre circonſcrit, & par conſéquent, ſi dans la Parabole du 2d degré le Conoïde intérieur eſt au Cylindre :: 1 . 2, le Conoïde extérieur lui eſt en même raiſon, & les deux Conoïdes ſont égaux ; ſi dans la 1re Parabole du 3me degré le Conoïde intérieur eſt au Cylindre :: 3 . 5, l'extérieur lui eſt :: 2, 5, & ils ſont l'un à l'autre :: 3 . 2 . &c. Mais pour avoir cela directement, il auroit fallu prendre un autre tour dans la même méthode.

Si dans la Parabole du 2d degré on conſidere l'eſpace extérieur qui tourne autour du même axe, autour duquel tournoit l'eſpace intérieur, la Parabole eſt tranſpoſée, & ſon équation eſt $x^2 = y$, x étant une tangente au ſommet qui devient ſon axe, diviſé en parties égales, & dont les Abſciſſes croiſſent comme les nombres naturels. Les Ordonnées ne décrivent plus des aires de Cercles par la révolution, mais des ſurfaces Cylindriques toujours croiſſantes, qui multipliées chacune par une des parties égales de l'axe, font les Solides élémentaires, dont le Conoïde eſt compoſé. Il eſt inutile de conſidérer cette multiplication. Les ſurfaces Cylindriques ſont en raiſon compoſée des rayons des Cylindres, & de leurs hauteurs. Ici les rayons ſont les Abſciſſes croiſſantes comme les nombres naturels, & les hauteurs ſont les Ordonnées (y) de la Parabole égales à x^2, ou croiſſantes comme les quarrés des nombres naturels. Donc la ſomme infinie des ſurfaces Cylindriques eſt repréſentée par celle des nombres naturels élevés au Cube, qui eſt $\frac{\infty^4}{4}$. D'un autre côté le Cylindre circonſcrit eſt la ſomme d'une infinité de ſurfaces Cylindriques, dont les rayons ſont croiſſans comme les nombres naturels, & les hauteurs toutes égales à ∞^2, la plus grande des hauteurs des ſurfaces du Conoïde croiſſant. Donc ce Cylindre eſt repréſenté par une ſomme $= \frac{\infty^2}{2} \times \infty^2 = \frac{\infty^4}{2}$. Or $\frac{\infty^4}{2} . \frac{\infty^4}{4}$ :: 2 . 1.

De même dans la 1[re] Parabole du 3[me] degré, on trouvera que les surfaces Cylindriques croissantes du Conoïde extérieur auront pour rayons les nombres naturels, & pour hauteurs ces nombres élevés au cube. Donc leur somme sera représentée par $\frac{\infty^5}{5}$, somme des nombres naturels élevés à la puissance 4. Toutes les hauteurs des surfaces du Cylindre circonscrit seront $= \infty^3$, & leurs rayons comme les nombres naturels. Donc ce Cylindre sera représenté par $\infty^3 \times \frac{\infty^2}{2} = \frac{\infty^5}{2}$, & $\frac{\infty^5}{2} . \frac{\infty^5}{5} :: 5 . 2$. Il en ira de même de tous les autres.

1494. En général de ce que 1° tout Fini est réellement un Infini, 2° tous les Finis n'ont entr'eux que des rapports finis, 3° les Infinis peuvent avoir des rapports finis, il suit que tous les Infinis qui ont des rapports finis, ont des Finis correspondans qui ont les mêmes rapports, & que quand des rapports sont communs à des Infinis & à des Finis considérés comme l'assemblage de toutes leurs parties, les sources de ces rapports sont dans l'Infini, & non dans le Fini, parce que le Fini est un Infini, & que l'Infini n'est pas un Fini.

1495. On voit assez, par ce qui a été dit, qu'il ne faut pas espérer de trouver des rapports finis entre les Solides Asymptotiques quelconques, & leurs Cylindres circonscrits. Mais on pourra trouver l'ordre des Solides Asymptotiques quelconques, en les considérant comme formés d'une infinité de Cylindres élémentaires.

Ordres des Solides Asymptotiques trouvés par des sommes infinies.

Soit la Courbe Asymptotique $M\mu C$, dont l'espace Asymptotique tourne autour de AM, 1[re] révolution (1431). Le Solide qui se forme, est composé 1° d'un Conoïde qui a pour base Rm, & pour hauteur RM, 2° d'un Conoïde tronqué, qui a pour base $r\mu$, & pour hauteur rR, & toujours ainsi de suite de pareils Conoïdes tronqués. Il est clair que le 1[er] Conoïde & les Conoïdes tronqués suivans seront du même ordre que des Cylindres de même base & de même hauteur: & comme il ne s'agit ici que d'ordre, je les prends tous pour des Cylindres, & le Solide pour la somme de ces FIG. XVIII.

Cylindres poſés tous les uns ſur les autres parallelement à la baſe *AB*, & de ſorte que leurs axes ſoient dans la même ligne *MA*.

Les rayons de ces Cylindres élémentaires ſeront *AP*, *Ap*, &c. c'eſt-à-dire, les nombres naturels, & leurs hauteurs ou axes ſeront RM, $rR = sm$, &c. c'eſt-à-dire, les différences des Ordonnées. Il eſt vrai que le dernier Cylindre aura pour hauteur la derniere Ordonnée, & non une différence, mais la Suite des Cylindres ne laiſſera pas d'être très-réguliere : car il faut concevoir la Courbe *MC* terminée à la 1re Ordonnée de ſon dernier ordre (1384), & comme les différences ſont toujours de l'ordre immédiatement inférieur à celui des Ordonnées (1380), & qu'elles changent d'ordre en même temps que les Ordonnées (1379), la derniere Ordonnée eſt de l'ordre des différences qui ont été les hauteurs des Cylindres précédens, car quoiqu'il y ait toujours deux dernieres Ordonnées égales à cauſe du parallélisme ſuppoſé de la Courbe, on peut ici n'en conſidérer qu'une.

Dans une Courbe Aſymptotique terminée à la 1re Ordonnée de ſon dernier ordre, il y a toujours une infinité d'Ordonnées de l'ordre immédiatement ſupérieur (1388 & 1389), donc auſſi une infinité de différences de l'ordre de la derniere Ordonnée. D'un autre côté *AB* eſt infinie pendant un cours infini de la Courbe. Donc il y a une infinité de Cylindres qui ont pour rayon *AB* de l'ordre de ∞, ou pour baſe ∞^2, & pour hauteur une grandeur de l'ordre de la derniere Ordonnée, & c'eſt de cette hauteur que dépend l'ordre du Solide Aſymptotique total.

1496. Si la derniere Ordonnée eſt $\frac{1}{\infty}$, il y a une infinité de Cylindres élémentaires dont la hauteur eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & la baſe de l'ordre de ∞^2, & qui par conſéquent ſont de l'ordre de ∞. Leur ſomme ſeroit $= \infty^2$, ſi toutes les baſes étoient $= \infty^2$, mais parce qu'il n'y a que la derniere qui le ſoit, & qu'elles ſont toutes moindres, & enfin la premiere égale au moindre ∞^2 poſſible, que d'ailleurs le nombre infini

de ces Cylindres n'eſt pas $= \infty$, leur ſomme ne peut être qu'entre ∞^2 & ∞. Donc le Solide total Aſymptotique eſt d'un ordre moyen entre ∞^2 & ∞.

1497. Si la derniere Ordonnée eſt $\frac{1}{\infty^2}$, il y a une infinité de Cylindres, qui ſont $\frac{1}{\infty^2} \times \infty^2$, ou Finis, & leur ſomme ou le Solide total eſt de l'ordre de ∞.

1498. Si la derniere Ordonnée eſt $\frac{1}{\infty^3}$, il y a une infinité de Cylindres de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, dont la ſomme eſt Finie.

1499. Il eſt aiſé de voir par là ce que ſeront les Solides de la 1[re] révolution pour des Courbes, dont les dernieres Ordonnées ſeront des Infiniment petits radicaux, ou purs, ou compris entre $\frac{1}{\infty}$ & $\frac{1}{\infty^2}$.

1500. Quant aux Solides Aſymptotiques de la 2[de] révolution, leurs Cylindres élémentaires auront tous une hauteur $= 1$, & une baſe qui ſera le quarré de chaque Ordonnée. La Courbe étant terminée à la 1[re] Ordonnée de ſon dernier ordre, il y aura une infinité d'Ordonnées de l'ordre immédiatement ſupérieur, dont les quarrés détermineront l'ordre du Solide total. Ces quarrés rendront cette conſidération un peu plus difficile, mais ce ne ſera au fond que ce qu'on a vu dans la Sect. précédente, & il ſeroit inutile de le répéter ici.

1501. Juſqu'ici en conſidérant dans les Solides la communication de rapports entre l'Infini & le Fini, nous n'avons conçu les Solides que comme formés par des Solides élémentaires, ou par des Cylindres équivalens tous poſés parallelement les uns ſur les autres. Mais ſi l'on veut concevoir les Solides comme formés par des Solides élémentaires concourans en une ligne commune, tel que ſeroit le Cylindre formé par des Priſmes triangulaires infiniment petits concourans à ſon axe, ſelon l'idée de l'art. 1369, on retrouveroit la même communication de rapports entre l'Infini & le Fini, par exemple, le même rapport du Cylindre au Cone. Car l'élément du Cone ſeroit un Priſme triangulaire coupé en deux du haut en bas par un plan diagonal, & ce Priſme

seroit la somme d'une infinité de triangles isosceles & semblables, dont les côtés croîtroient comme les nombres naturels, & les aires comme les quarrés de ces nombres. Donc le Prisme élémentaire du Cone seroit représenté par $\frac{\infty^3}{3}$. En même temps ce Prisme entier est l'élément du Cylindre qui est représenté par ∞^3, puisque l'aire de chacun de ses Triangles tous égaux est représentée par ∞^2, & qu'ils sont en nombre $= \infty$. Donc l'élément du Cylindre est à celui du Cone, ou le Cylindre au Cone : : 3 . 1, cet exemple suffira.

Qu'il y a une infinité de grandeurs finies absolument inconnues, & telles que leur rapport aux grandeurs finies connues ne peut être déterminé ni en nombres, ni en lignes.

1502. Nous conclurrons cette Théorie par une espece de non-communication de rapport entre l'Infini & le Fini, qui pourroit paroître surprenante, si les principes n'en étoient déja répandus dans tout cet ouvrage. Il y a entre des grandeurs Finies des rapports finis, qui parce qu'ils viennent de l'Infini, nous sont absolument inconnus.

On a vu (460, &c. 464) qu'il y a quatre especes de nombres Finis incommensurables.

Les 1ers sont les $\sqrt[n]{}$ de tous les nombres tels qu'ils ne sont points la puissance n.

Les 2ds sont tous les nombres $n^{\frac{\propto}{\infty}}$ tels que dans l'exposant $\frac{\propto}{\infty}$, $\propto$ & ∞ n'ont qu'une différence Finie.

Les 3mes sont les $\infty^{\frac{n}{\infty}}$, n numérateur de l'exposant étant un nombre Fini.

Les 4mes sont les $\infty^{\frac{\propto}{\infty}}$, le numérateur & le dénominateur de l'exposant ayant une différence Infinie.

Les Incommensurables de la 1re espece sont les seuls qui aient été connus jusqu'à présent. Leur nature fait qu'il est impossible de les exprimer en nombres, on ne peut qu'en approcher toujours de plus en plus, mais il n'y en a aucun qui ne se détermine exactement en lignes, par exemple, $\sqrt[2]{2}$, qui ne se peut déterminer exactement en nombres, est

la

la diagonale de tout quarré. La raison de cette différence est que les nombres sont des quantités *discretes*, qui laissent toujours entr'elles des intervalles, & que les lignes sont des quantités *continues*. Pour avoir $\sqrt[2]{2}$ en nombres, il faudroit remplir actuellement par une infinité de nombres l'intervalle qui est entre 1 & 2, ce qui est impossible : mais pour avoir $\sqrt[2]{2}$ en ligne, il ne faut que tracer la diagonale d'un quarré, parce qu'on sait que le quarré de cette diagonale sera double du quarré dont elle est diagonale.

Ce rapport ou d'autres pareils des Incommensurables de la 1[re] espece à des nombres exacts & commensurables, font que quoiqu'on ne les puisse exprimer en nombres, on les exprime toujours en lignes : mais cette raison cesse entierement à l'égard des Incommensurables des trois autres especes ; ils n'ont à des nombres commensurables aucun rapport qu'on puisse connoître, & qui puisse servir à les déterminer en lignes.

Cela prouve seulement que ces Incommensurables ne pourront être déterminés en lignes, & non pas qu'il n'y aura pas de lignes qui expriment ces Incommensurables. Il y en aura certainement, mais telles que leur rapport à toute grandeur commensurable sera éternellement inconnu.

1503. Il est bien sûr qu'il y a quelque ligne droite égale à la circonférence du Cercle, & qui par conséquent a un rapport fini au diametre. Si cette droite tant cherchée est ou commensurable, ou un Incommensurable de la 1[re] espece, il sera possible de la trouver, & de la déterminer, quelque compliquée que puisse être la construction dont elle dépendra : mais si elle est un Incommensurable de quelqu'une des trois autres especes, on ne la déterminera jamais. Et si on peut démontrer qu'elle n'est ni commensurable, ni incommensurable de la 1[re] espece, il est démontré que la Quadrature du Cercle est impossible, & par conséquent le Probleme est résolu.

1504. Comme on n'a connu jusqu'ici que des commensurables, ou la 1re espece d'Incommensurables, on a crû la Quadrature du Cercle possible en elle-même, & tant d'efforts employés inutilement pour la trouver n'ont été une preuve que de la difficulté du Probleme, ou du défaut de l'art. Mais les trois nouvelles especes d'Incommensurables font voir que cette Quadrature pourroit être impossible en elle-même, du moins pour l'esprit humain.

1505. Il y a même toute apparence qu'elle est impossible par cet endroit. $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ est un Incommensurable de la 3me espece, plus grand que 1, dont la différence à 1 est finie, mais finie indéterminable en petitesse, ou telle que son quarré est infiniment petit (357). Je suppose que le diametre du Cercle étant 1, sa circonférence soit $3\infty^{\frac{1}{\infty}}$, je dis qu'on trouvera tout ce qu'on trouve présentement dans ce Probleme. La circonférence sera un peu plus que triple du diametre : mais on ne pourra déterminer la fraction qu'il faudroit ajouter à 3 pour avoir la circonférence. Car quelque fraction qu'on trouve, elle sera déterminable, puisqu'elle sera déterminée ; or il en faudroit une indéterminable : car $\infty^{\frac{1}{\infty}} = 1 + \frac{1}{x}$, x étant un fini indéterminable en grandeur, & $3\infty^{\frac{1}{\infty}} = 3 + \frac{3}{x}$.

1506. Il sera même impossible en ce cas là de démontrer directement l'impossibilité de la Quadrature, c'est-à-dire de démontrer que le diametre est à la circonférence :: $1 \cdot 3\infty^{\frac{1}{\infty}}$, d'où s'ensuivroit l'impossibilité de trouver une ligne $= 3\infty^{\frac{1}{\infty}}$; car il pourra seulement n'être pas impossible de démontrer, que la circonférence ne soit ni commensurable au diametre, ni incommensurable de la 1re espece, mais parmi les trois autres especes d'Incommensurables, dont elle sera

néceſſairement une des grandeurs, il ſera impoſſible de déterminer, ni de quelle eſpece elle ſera, ni quelle elle ſera, puiſque ces trois eſpeces ſont abſolument inconnues.

1507. Il eſt bon de ſavoir que ces trois eſpeces exiſtent, & que comme elles contiennent une infinité d'infinités de grandeurs finies, dont les rapports à toutes les grandeurs commenſurables ou incommenſurables de la 1re eſpece, ne peuvent abſolument être connus, on doit trouver en Geométrie des lignes qui aient à d'autres ces rapports indéterminables, que même on en doit trouver ſouvent, qu'il ne feroit point du tout étonnant que le rapport de la circonférence du Cercle au diametre fût de ce nombre, qu'il y a même toute apparence qu'il en eſt, & que toutes les autres rectifications ou quadratures qu'on ne trouve point, pourroient bien avoir une impoſſibilité priſe dans la même cauſe.



SECTION VIII.

Sur les forces des Corps en général.

Ce que c'est que la force des Corps. 1508. UN Corps n'a de force que par le mouvement, ou, ce qui est le même, il n'a de force qu'autant qu'il est en mouvement, de sorte que quand il a plus de mouvement, il a plus de force, & au contraire.

1509. La quantité de mouvement d'un corps, qu'on appelle aussi sa force, est le produit de sa masse par sa vitesse. Car il est d'autant plus capable d'un grand effet, ou a d'autant plus de force qu'il est plus grand, & se meut plus vîte, ou au contraire.

1510. Comme deux produits formés de différentes grandeurs peuvent être égaux, deux Corps inégaux en masse & en vitesse peuvent avoir des quantités de mouvement ou des forces égales. Ainsi si le Corps $A > a$ a pour vitesse $u < V$, & que $A . a :: V . u$, Au est $= aV$.

1511. Si de plus, ces deux Corps sont disposés de maniere que l'un ne puisse exercer sa force sans surmonter celle de l'autre, ils demeureront tous deux immobiles, quoiqu'avec une tendance au mouvement, parce qu'une force égale n'en peut surmonter une égale. C'est là le principe général de tout Equilibre, qui est par conséquent un Repos produit par deux forces égales qui tendent à des effets opposés.

1512. Une vitesse infiniment petite peut être prise pour le Repos. On la peut exprimer par $\frac{u}{\infty}$, u étant une vitesse finie quelconque.

1513. $a \times \frac{u}{\infty}$ est donc une force infiniment petite ou nulle par rapport à toute force $a \times u$.

1514. De-là vient qu'on dit que la force de la Percussion est infinie par rapport à celle de la simple Pesanteur

Car lorſqu'un corps, quelque peſant qu'il ſoit, eſt en repos, ſa force eſt $\frac{au}{\infty}$, & ſi le moindre corps donne un choc, ou fait une percuſſion, il a une viteſſe finie, quelque petite qu'elle ſoit, & ſa force eſt *au*.

1515. La viteſſe eſt le rapport de l'Eſpace parcouru au Temps pendant lequel il a été parcouru, de ſorte que plus l'eſpace eſt grand, & le temps petit ou court, plus la viteſſe eſt grande, ou au contraire. Donc *e* étant l'eſpace, & *t* le temps, $u = \frac{e}{t}$. *Viteſſe.*

1516. Donc dans un temps fini la viteſſe ne peut être infinie, ſi l'eſpace n'eſt infini, ni infiniment petite, ſi l'eſpace n'eſt infiniment petit ou *de*. *Viteſſes finies, ou infinies, ou infiniment petites dans des temps, ſoit finis, ſoit infiniment petits.*

1517. De même dans un temps infiniment petit *dt*, la viteſſe ne peut être infinie, ſi l'eſpace n'eſt fini, ni infiniment petite, ſi l'eſpace n'eſt infiniment petit du 2[d] ordre ou *dde*.

1518. Puiſque dans le cas de l'Equilibre une force demeure ſans action (1511), on voit en général qu'il doit y avoir d'autres cas où une force perdra une partie de ſon action; c'eſt-à-dire, qu'elle fera dans des circonſtances où elle fera moins que ce qu'elle eût pu par elle-même. Pour ce qui eſt de faire plus, il eſt clair que nulles circonſtances ne lui en ſauroient donner le pouvoir, & qu'il y auroit contradiction. Seulement pluſieurs forces peuvent ſe joindre enſemble, & faire plus qu'une ſeule. Ainſi ſi une force, c'eſt-à-dire, un corps mû avec une certaine viteſſe, frappe un autre corps perpendiculairement, il y fait toute l'impreſſion qu'il y peut jamais faire, étant mû de cette viteſſe : mais il en fait une moindre, s'il frappe obliquement avec la même viteſſe. Il en va de même de toutes les impulſions ou tractions, où il faut toujours conſidérer ſelon quel angle ou quelle direction la force s'applique au corps qui doit être mû. *Directions des Forces.*

1519. Quand la force agit pleinement, ſon effet la repréſente, c'eſt-à-dire, peut être pris pour ſa meſure, puiſque c'eſt tout ce qu'elle peut; & quand deux forces différentes

agissent ainsi, leurs effets les représentent, ou les mesurent, ou leur sont proportionnels.

1520. Mais quand deux forces ou causes ont leurs actions diminuées par les circonstances, les effets ne sont proportionnels qu'aux forces ou causes modifiées comme elles doivent l'être. Ainsi si de deux forces différentes l'une donne un choc perpendiculaire, & l'autre un oblique, les deux effets ou impressions sont comme la masse de la 1re, multipliée par sa vitesse, & par le Sinus de l'angle droit, & la masse de la 2de multipliée par sa vitesse, & par le Sinus de l'angle aigu qu'on aura supposé. Et si les deux forces, c'est-à-dire, les deux masses & les deux vitesses sont égales, & les chocs différens, les effets seront comme les deux Sinus correspondans.

Force simplement motrice, & Force accélératrice.

1521. Outre la maniere de l'application de la force au corps mû, en quoi consiste la *direction* de la force, il y a encore la durée de l'application. Ou la force ne s'applique au corps qui doit être mû, qu'autant de temps précisément qu'il en faut pour le choc, après quoi le corps se sépare de la force motrice; ou cette force s'applique continuellement au corps, le poursuit dans son mouvement, & renouvelle toujours son impression sur lui. Dans le 1er cas, le mouvement du corps est *uniforme*, c'est-à-dire, qu'il a toujours, & à l'infini, une vitesse égale, supposé qu'il ne rencontre point d'obstacles qui la diminuent. Dans le 2d, le mouvement est *accéléré*, parce que la force qui meut, augmente dans le second instant l'effet du premier, & toujours ainsi de suite, tant qu'elle est appliquée. C'est de cette 2de maniere que l'on conçoit qu'agit la force de la Pesanteur, quelle qu'elle soit, toujours appliquée aux corps qu'elle meut vers le centre de la Terre. Au mouvement accéléré s'oppose le *retardé*, tel que celui d'une Pierre que j'aurois jettée en l'air de bas en haut.

1522. J'appelle force *simplement motrice*, celle qui n'est appliquée qu'autant qu'il faut pour le choc, & force *accélératrice* celle qui l'est toujours; car il suffit de considérer le mouvement accéléré, puisque le retardé n'est que le même, renversé. Je cherche la mesure de l'une & de l'autre de ces forces,

qui doit être l'effet de chacune, en ſuppoſant que chacune agiſſe pleinement.

Il eſt clair d'abord que l'effet de la force ſimplement motrice, eſt un certain eſpace parcouru en un certain temps par le corps qu'elle a mû, & qu'elle eſt d'autant plus grande que cet eſpace eſt plus grand, & ce temps plus court, ou au contraire. Donc ſa meſure ou ſon expreſſion eſt $\frac{e}{t}$.

Force accélératrice conſtante. Propriétés du mouvement qu'elle produit.

1523. Une force ſimplement motrice n'eſt ni variable, puiſqu'elle n'agit qu'un inſtant, ou pendant le moindre temps poſſible, ni, à proprement parler, conſtante, & cela par la même raiſon, car il faudroit qu'elle agît également pendant tous les inſtans de ſon action : or elle n'en a qu'un. Mais la force accélératrice qui agit pendant pluſieurs inſtans peut être ou conſtante, ou variable ; conſtante, ſi ſon action eſt égale pendant des inſtans égaux ; variable, ſi c'eſt le contraire.

1524. Je la ſuppoſe conſtante, comme on conçoit d'ordinaire qu'eſt la Peſanteur. En ce cas, ſi pendant le 1er inſtant elle a imprimé au corps un certain degré de viteſſe, elle lui en imprime un égal dans un 2^d^ inſtant égal, & toujours ainſi de ſuite. Donc la ſomme des viteſſes, ou la viteſſe totale acquiſe par le corps au bout d'un certain temps déterminé, ſera toujours comme la ſomme des inſtans qui compoſeront ce temps déterminé, ou comme ce temps, & les différentes viteſſes totales acquiſes au bout de différens temps ſeront comme ces temps.

1525. Ce qui meſurera la force accélératrice, ou exprimera combien elle eſt plus grande ou plus petite, doit être auſſi bien que pour la force ſimplement motrice, un rapport de l'eſpace au temps, puiſque toutes deux font parcourir un eſpace dans un temps, & que toutes deux ſont d'autant plus grandes qu'elles font parcourir un plus grand eſpace dans un temps plus court, ou au contraire. Mais puiſqu'elles ſont différentes, il doit y avoir une différence, & une différence tirée de leur nature. La force accélératrice étant toujours appliquée au corps, & l'effet de cette application continuelle étant un

certain eſpace parcouru : plus la force accélératrice ſera grande, plus l'eſpace parcouru ſera grand, & le temps court pendant lequel l'eſpace ſera parcouru, & pendant lequel la force aura eu beſoin d'être appliquée au corps pour le lui faire parcourir. Donc cette force comme motrice enferme l'idée du temps pendant lequel un eſpace a été parcouru, & comme accélératrice l'idée de ce même temps pendant lequel elle a été appliquée ; & il eſt clair que l'idée du temps n'entre pas de cette 2[de] maniere dans la force ſimplement motrice. Donc la meſure de la force ſimplement motrice étant l'eſpace diviſé par le temps, ou $\frac{e}{t}$, celle de la force accélératrice ſera l'eſpace diviſé par le quarré du temps, ou $\frac{e}{tt}$.

1526. Puiſque la force accélératrice eſt ſuppoſée conſtante, $\frac{e}{tt}$ eſt donc un rapport conſtant. Donc E étant plus grand que e, & T plus grand que t, on a toujours $\frac{E}{TT} = \frac{e}{tt}$, ou $E . e :: TT . tt$; c'eſt-à-dire, que les eſpaces parcourus en différens temps ſont comme les quarrés des temps.

1527. Donc ſi l'on conçoit le temps total diviſé en parties égales, par exemple, en Minutes, & que l'eſpace parcouru pendant la 1[re] Minute ſoit 1, celui qui ſera parcouru pendant 2 Minutes ſera 4, pendant 3 Minutes 9, &c. Et ſi on prend ſéparément l'eſpace parcouru pendant chaque Minute, celui de la 1[re] eſt 1, de la 2[de] 3, de la 3[me] 5, &c. & ainſi de ſuite ſelon les nombres impairs.

1528. Les viteſſes acquiſes pendant le cours de chaque temps égal, ſont égales, la force accélératrice étant conſtante (1370) : donc ſi la viteſſe acquiſe pendant la 1[re] Minute a fait parcourir 1, la viteſſe acquiſe pendant la 2[de] aura auſſi fait parcourir 1. Mais l'eſpace parcouru pendant cette 2[de] Minute eſt 3 (1527) ; donc ſi cet eſpace 3 eſt conçu diviſé en 1 & 2, 1 étant néceſſairement parcouru en vertu de la viteſſe acquiſe pendant la 2[de] Minute, il faut que 2 ait été parcouru en vertu de la viteſſe qui étoit toute acquiſe à la

fin de la 1re Minute. Donc si à la fin de la 1re Minute la force accélératrice avoit cessé d'être appliquée au corps, il n'auroit parcouru que 2, espace double de celui qu'il avoit parcouru pendant la 1re par un mouvement accéléré. Or si à la fin de la 1re Minute il eût été abandonné par la force accélératrice, son mouvement seroit devenu uniforme, puisqu'un mouvement n'est accéléré ou uniforme, que parce que la force est ou n'est pas toujours appliquée au corps. Donc dans la 2de Minute il auroit parcouru par un mouvement uniforme un espace double de celui qu'il avoit parcouru dans la 1re par un mouvement accéléré.

1529. Et comme un espace quelconque peut être pris pour 1, il suit en général que si au bout d'un espace quelconque un corps est abandonné par la force accélératrice, ou, ce qui est la même chose, si avec la vitesse qu'il a acquise lorsqu'il est parvenu au bout de cet espace, il vient à se mouvoir d'un mouvement uniforme, il parcourra dans un même temps un espace double de celui qu'il avoit parcouru par un mouvement accéléré.

1530. Par là on change aisément tout mouvement accéléré en uniforme; car au lieu de l'espace e parcouru en un certain temps par le mouvement accéléré, il n'y a qu'à prendre $2e$ qui seroit parcouru dans le même temps d'une vitesse uniforme égale à celle que le corps avoit acquise au dernier instant de son mouvement.

1531. Toute vitesse uniforme est d'un certain degré déterminé, & par conséquent elle est telle qu'elle pourroit avoir été originairement la vitesse accélérée d'un corps tombant, qui étant parvenue à ce degré, seroit devenue uniforme selon l'idée présente. Or en ce cas l'espace e étant celui que le corps auroit parcouru, ou h la hauteur d'où il seroit tombé, $2e$ ou $2h$ seroit l'espace que la vitesse devenue uniforme lui feroit parcourir dans un temps égal à celui de sa chûte. Donc si on prend h pour la hauteur, d'où un corps aura dû tomber pour acquerir un certain degré de vitesse, $2h$ sera l'espace que fera

parcourir à un corps dans le même temps une viteſſe uniforme de ce même degré.

1532. Donc, que dans un certain temps le corps ait parcouru l'eſpace e ou h par un mouvement accéléré, ou $2e$ ou $2h$ par un mouvement uniforme, dont la viteſſe ſoit égale à celle qu'il aura acquiſe au dernier inſtant du mouvement accéléré, c'eſt la même choſe.

1533. Puiſque E ou $H . e$ ou $h :: TT . tt$ (1526), on a $T . t :: \sqrt{H} . \sqrt{h}$. Et puiſque les viteſſes acquiſes au bout de différens temps, ſont comme ces temps (1524), ces viteſſes ſont donc comme les racines des hauteurs correſpondantes.

1534. Donc les hauteurs ſont comme les quarrés des viteſſes correſpondantes, ou les repréſentent.

1535. Et puiſque ce qu'eſt h dans la viteſſe accélérée, $2h$ l'eſt dans la viteſſe uniforme égale à la derniere viteſſe acquiſe par une chûte faite de la hauteur h (1532), $2h$ repréſentera le quarré de cette viteſſe uniforme, comme h repréſente celui de la viteſſe accélérée (1534).

Voilà tout le Siſteme de Galilée ſur la Peſanteur démontré *à priori*, par les ſeules définitions néceſſaires de force ſimplement motrice & accélératrice, & indépendamment de toute expérience.

Il eſt vrai que nous avons ſuppoſé avec Galilée, & avec preſque tous les Philoſophes la peſanteur ou ſon action conſtante, & que cette ſuppoſition peut avoir quelque difficulté. Car quoiqu'une force ſoit toujours appliquée à un corps, il paroît que dans le 1[er] inſtant où elle le trouve en repos, & lui donne un coup, elle lui doit imprimer une plus grande viteſſe que dans le 2[d] inſtant où elle le trouve fuyant devant elle, & ſe dérobant à ſon action. Mais ce n'eſt pas ici le lieu d'examiner cette difficulté, il ſuffit que le Siſteme de Galilée ſoit généralement reçu, & nous l'allons porter dans l'Infini, où il peut être utile de le conſidérer.

Force accélératrice, & Force ſimplement motrice, conſidérées dans l'Infini.

1536. Il ne s'agit que de forces Finies, ſoit ſimplement motrices, ſoit accélératrices. Elles ſont toujours Finies dans quelque temps qu'elles agiſſent, ſoit infiniment petit, ſoit

fini, soit infini; car certainement le temps de la durée de leur action ne change rien à leur nature de force, il ne peut que modifier leur action. Donc $\frac{e}{t}$ étant l'expression d'une force simplement motrice, & $\frac{e}{tt}$ celle d'une force accélératrice, finies l'une & l'autre, ces deux expressions doivent toujours être celles de deux forces Finies, quelque différence ou quelque modification que puisse y apporter la supposition des temps.

1537. Je commence par la force accélératrice, quoique moins simple que l'autre, agissante dans un temps infiniment petit ou instant, qui sera dt, infiniment petit de t, temps Fini. Cette force est non-seulement toujours Finie, mais elle est toujours accélératrice, même dans l'instant dt; car le temps n'étant pas moins divisible que l'espace, l'instant dt peut être conçu comme formé d'une infinité de ddt, temps infiniment petits du 2^{d} ordre, pendant lesquels la force accélératrice a été toujours appliquée au corps sur lequel elle agissoit. Or dans $\frac{e}{tt}$, expression de la force accélératrice, e est un espace fini total, qu'elle a fait parcourir pendant tout le temps fini t, dont il faut prendre le quarré, parce que la force est accélératrice. Donc le temps total étant ici dt, il en faut prendre aussi le quarré dt^2, qui sera nécessairement le dénominateur de la fraction qui exprimera la force. Et comme cette force est toujours finie, le numérateur de la fraction ou l'espace total parcouru ne peut être que dde, espace infiniment petit du 2^{d} ordre. Donc l'expression de la force accélératrice agissante dans un instant dt, est $\frac{dde}{dt^2}$.

1538. Donc un corps qui tombe par sa seule pesanteur, ne parcourt dans le 1er instant dt de sa chûte, qu'un espace infiniment petit du 2^{d} ordre.

1539. Tous les instans étant supposés égaux, le corps dans le 2^{d} instant parcourt $3dde$, dans le 3me $5dde$, &c. ou, ce qui revient au même, l'espace total parcouru au bout du

2d instant est $4dde$, au bout du 3me $9dde$, &c. jusqu'à ce qu'enfin le coëfficient de dde étant le moindre infini possible de la Suite des quarrés, il change le dde en de, c'est-à-dire, que l'espace total parcouru sera infiniment petit du 1er ordre. La $\sqrt[2]{}$ de ce coëfficient infini de dde, sera le nombre des instans dt, pendant lesquels de a été parcouru : or ce coëfficient infini étant le moindre infini possible de la Suite des quarrés, sa $\sqrt[2]{}$ est finie. Donc de espace infiniment petit du 1er ordre a été parcouru pendant un nombre Fini, mais indéterminable en grandeur, d'instans dt, ou absolument dans un temps infiniment petit du 1er ordre.

1540. Le nombre fini indéterminable en grandeur des instans dt, pendant lesquels de a été parcouru, étant x, & $x^2 = \infty$; on aura donc l'espace $x^2 dde = \infty dde = de$ parcouru dans le temps xdt, & pour l'expression de la force, $\frac{x^2 dde}{x^2 dt^2} = \frac{\infty dde}{\infty dt^2} = \frac{de}{\infty dt^2} = \frac{de}{dt}$, grandeur Finie.

1541. Quand le nombre des dt est devenu $= \infty$, on a l'espace $\infty^2 dde$ parcouru pendant le temps ∞dt, or $\infty^2 dde = e$, & $\infty dt = t$. Donc un espace total Fini a été parcouru dans un temps Fini, & l'expression de la force est $\frac{e}{tt}$, déja trouvée.

1542. Dans le 1er instant de la chûte du corps, la vitesse n'a été qu'infiniment petite du 1er ordre, puisqu'un espace dde a été parcouru dans un temps dt. Ensuite $3dde$ étant parcouru dans un 2d dt égal, $5dde$, dans un 3me dt, &c. la vitesse est toujours infiniment petite, jusqu'à ce que le coëfficient de dde soit ∞, car alors $\infty dde = de$ étant parcouru dans un dt, la vitesse est Finie. Or le coëfficient qui exprime le nombre des dde parcourus dans un dt, étant toujours un terme de la Suite des Impairs, il ne peut devenir Infini, que quand cette Suite a eu un nombre infini de termes, ce qu'il est aisé de voir, ou après qu'il y a eu un nombre Infini égal de dt, c'est-à-dire, après un temps Fini. Donc

ce n'eſt qu'après un temps Fini qu'un eſpace de infiniment petit du 1er ordre vient à être parcouru dans un inſtant dt du même ordre.

1543. Donc il faut à la force accélératrice un temps Fini pour imprimer au corps une viteſſe finie, ou, ce qui eſt le même, elle a beſoin d'être appliquée pendant un temps Fini.

1544. Quand l'eſpace parcouru dans un dt eſt $\infty\, dde$, l'eſpace total parcouru eſt le produit de dde par la ſomme de la progreſſion arithmétique des Impairs, depuis 1 juſqu'à ∞, ſon premier terme infini. Or le nombre des termes qu'elle a dans cette étendue eſt la moitié moindre que celui des termes de la Suite naturelle, qui commenceroit par 1, & ſe termineroit par le même ∞. Le nombre des termes de la Suite naturelle ſeroit ∞, donc celui de la Suite des Impairs eſt $\frac{\infty}{2}$. Sa différence eſt 2. Donc la ſomme cherchée eſt $2 \times \frac{\infty}{2} \times \frac{\infty}{2} = \frac{\infty^2}{2}$, & l'eſpace total parcouru $\frac{\infty^2 dde}{2}$, grandeur finie.

1545. Donc quand la force accélératrice imprime une viteſſe finie, il s'eſt paſſé un temps fini, quelque petit qu'il ſoit, & un eſpace fini a été parcouru.

1546. Puiſque les viteſſes d'inſtans égaux paſſent de l'Infiniment petit au Fini, elles ſont croiſſantes, ainſi qu'il eſt indiſpenſable dans un mouvement accéléré.

1547. Si la force accélératrice eſt ſuppoſée conſtante, elle a la même action & le même effet dans tous les inſtans égaux, & par conſéquent ce qu'elle a produit dans le premier, elle le produit dans tous. Dans le premier elle a imprimé au corps une viteſſe infiniment petite du 1er ordre, donc dans tous les inſtans ſuivans elle lui en imprime une égale. Ainſi les viteſſes de chaque inſtant ſont inégales & croiſſantes (1546), & les augmentations de viteſſe toujours égales.

1548. Comme dans chaque inſtant une viteſſe infiniment petite égale, s'ajoute toujours à la ſomme des viteſſes déja acquiſes, l'augmentation eſt du même ordre que la ſomme,

tant que la somme n'est qu'un infiniment petit. Or cette somme est un infiniment petit, tant que le temps total de la chûte du corps ou l'espace total parcouru n'est pas encore fini (1543) : mais depuis l'instant inclúsivement où cela arrive, la vitesse de chaque instant suivant étant finie, l'augmentation de vitesse n'est plus à compter par rapport à elle, & l'on peut prendre la vitesse de chaque instant pour uniforme, & l'exprimer comme telle par le rapport de l'espace de de cet instant à dt. Ainsi ce n'est qu'en supposant un temps fini déja écoulé, & un espace fini parcouru qu'on peut prendre la vitesse de chaque instant pour uniforme.

1549. Si la force accélératrice agit pendant un temps $= \infty$, le dénominateur de son expression est ∞^2, & pour avoir une force toujours Finie, il faut que le numérateur, c'est-à-dire, l'espace total parcouru soit aussi ∞^2. Donc pendant un temps infini un espace total infini du 2d ordre est parcouru.

1550. Mais quand un espace total infini du 1er ordre est-il donc parcouru ? Car il est impossible que la force vienne à faire parcourir un ∞^2 dans un temps $= \infty$, sans avoir passé par faire parcourir un ∞ dans un temps, soit fini, soit infini : or dans un temps fini il ne paroît pas que cela se puisse. La solution de cette difficulté est ce que nous avons vû tant de fois. L'espace étant ∞, l'expression de la force sera $\frac{\infty}{tt}$, quelque temps que soit t, & il faut que cette expression soit finie. Donc $tt = \infty$, donc t est un temps fini indéterminable en grandeur, tel que son quarré est infini. Donc tant que le temps est fini déterminable, l'espace total parcouru est fini, si le temps devient fini indéterminable en grandeur, l'espace est infini du 1er ordre, si le temps est infini du 1er ordre, l'espace est du 2d.

1551. Donc l'espace total parcouru commence par être de l'ordre immédiatement inférieur au temps total, ensuite il est du même ordre, après cela de l'ordre immédiatement supérieur, ensuite d'ordres toujours plus supérieurs.

1552. Quand le temps total est devenu infini du 1er

ordre, la vitesse de chaque instant est infinie du même ordre, car elle est la somme d'autant de vitesses infiniment petites égales qu'il y a eu d'instans dt : or dans un temps infini du 1er ordre, il y a un nombre de $dt = \infty^2$, & un nombre d'infiniment petits, qui est ∞^2, fait une somme de l'ordre de ∞.

1553. Puisqu'alors la vitesse de chaque instant est de l'ordre de ∞, l'augmentation de vitesse toujours égale & infiniment petite, l'empêche encore infiniment moins d'être uniforme, que quand cette vitesse étoit finie.

1554. Considérons maintenant la force simplement motrice. Tout le monde dit que c'est celle qui ne fait que frapper le corps dans un temps indivisible, & l'on en prétend faire une force toute différente de l'accélératrice. Mais il me semble qu'il y a beaucoup à démêler dans cette idée.

La force simplement motrice & l'accélératrice ont nécessairement quelque chose de commun, & l'accélératrice qui s'applique toujours au corps ne sera que motrice, si ayant frappé le corps, & s'y étant appliquée pendant le temps, quel qu'il soit, nécessaire à la motrice, elle cesse de s'y appliquer. Or je demande quel est ce temps nécessaire à la motrice.

Un temps indivisible n'existe point, non plus qu'un espace indivisible. Ce temps est donc infiniment petit, un dt. La force simplement motrice est donc dans le même cas que l'accélératrice agissant dans un dt, & cessant ensuite de s'appliquer au corps. Or l'accélératrice agissant dans un temps infiniment petit, ne peut imprimer au corps qu'une vitesse infiniment petite du 1er ordre (1542) ; & si après cela la force cessoit de s'appliquer au corps, il n'auroit que cette vitesse avec laquelle il ne pourroit parcourir qu'un espace infiniment petit dans un temps fini, son mouvement étant devenu uniforme, c'est-à-dire, qu'il demeureroit physiquement & sensiblement en repos. Il n'y auroit donc nulle force simplement motrice, qui pût mouvoir ou déplacer un corps, ce qui est bien éloigné des phénomenes.

Comme toutes les forces simplement motrices impriment

des viteſſes finies, on ne peut donc concevoir autre choſe, ſinon que ce ſont des forces qui pendant un temps fini, ſi court que l'on voudra, ont été accélératrices, ou appliquées au corps, après quoi elles ont ceſſé de l'être. Il eſt aiſé de voir que de-là les phénomenes s'enſuivent.

1555. Donc tout corps qui imprime à un autre une viteſſe finie, ne la lui imprime qu'en un temps fini, par degrés, & ſelon les regles du mouvement accéléré.

Que toute force ſimplement motrice, eſt accélératrice pendant un temps fini.

1556. Si deux corps, dont l'un a choqué l'autre en repos, vont tous deux enſemble après le choc, le choquant a employé un temps fini à communiquer à l'autre ce qu'il devoit lui donner de ſa viteſſe, & a été pendant ce temps force accélératrice qui lui étoit toujours appliquée, après quoi lorſqu'ils vont enſemble d'une même viteſſe, il eſt vrai que le choquant eſt encore appliqué à l'autre, mais non en qualité de force accélératrice comme il étoit auparavant; il ne le meut plus du tout, & n'eſt qu'une partie d'une maſſe totale qui ſe meut.

1557. Ce même raiſonnement ſubſiſte, ſoit que les deux corps ſoient parfaitement durs, ou qu'ils ne le ſoient pas. S'ils ne le ſont pas, le corps choquant applatit le choqué aux endroits voiſins du choc, & en eſt réciproquement applati; & ce n'eſt que pendant cet applatiſſement mutuel, qui augmente par degrés, que le corps choquant eſt force accélératrice. Après cela les deux corps applatis vont enſemble, s'il n'y a rien de plus. On voit bien que nous voilà arrivés au Reſſort, mais il n'en eſt pas queſtion ici.

On pourra voir combien tout ceci s'accorde avec ce qui a été dit dans l'Hiſt. de l'Acad. en 1722 (*p. 109 & ſuiv.*) d'après M. de Mairan, qui a expliqué la Réflexion des Corps d'une maniere nouvelle, & beaucoup plus préciſe que l'on n'avoit encore fait. Si quelque impreſſion finie de mouvement ſe pouvoit faire dans un inſtant indiviſible, il ſemble que la Réflexion en devroit être un exemple.

1558. La force, d'abord accélératrice, ayant ceſſé d'agir ſur le corps, ſon mouvement devient uniforme, & la viteſſe

en

en est la derniere vitesse acquise par l'accélération, de sorte que dans un temps fini égal à celui pendant lequel l'accélération a duré, il parcourra un espace double de celui qu'il avoit parcouru, & toujours ainsi.

1559. Si ce mouvement devenu uniforme, est comparé à lui-même, qui eût continué d'être accéléré, il suit de l'art. 1551, que plus le temps de l'un & de l'autre sera long, plus l'espace parcouru par le mouvement accéléré sera grand par rapport à l'espace parcouru par le mouvement uniforme.

1560. Dès que la force accélératrice est parvenue à imprimer au corps une vitesse finie, & quand la force, que nous appellions simplement motrice, a cessé d'être accélératrice, l'expression de la vitesse de chaque instant, soit du mouvement accéléré, soit de l'uniforme, est $\frac{de}{dt}$, le temps pendant lequel se font les deux mouvemens étant supposé fini. Dans l'uniforme le rapport de de à dt est constant, dans l'accéléré il est variable, & toujours croissant.

1561. Dans l'accéléré l'augmentation de vitesse à chaque instant est $\frac{dde}{dt}$, & $\frac{de}{dt} + \frac{dde}{dt} = \frac{de}{dt}$ rend la vitesse instantanée uniforme, & la vitesse totale au bout de chaque temps fini est formée d'une infinité de vitesses instantanées uniformes pendant chaque instant, & croissantes d'un instant à l'autre.

1562. Si la force accélératrice n'étoit point constante, l'augmentation de vitesse de chaque instant, ou $\frac{dde}{dt}$, ne seroit plus une grandeur constante, mais elle n'en disparoîtroit pas moins dans la somme $\frac{de}{dt} + \frac{dde}{dt}$, & par conséquent la vitesse accélérée se réduiroit toujours à des vitesses instantanées uniformes. Ce seroit la même chose, si la force accélératrice étant constante par elle-même, son action étoit inégale par les circonstances, comme le seroit l'action de la Pesanteur constante sur un corps qu'elle feroit tomber le long de la

concavité d'une Courbe différemment inclinée à l'horiſon en tous ſes points, ou côtés.

1563. Si la force accélératrice n'eſt pas conſtante en elle-même, ou ſi, étant conſtante, elle a une action inégale à cauſe des circonſtances, ou ſi une force conſtante eſt différente d'une autre conſtante auſſi, il eſt clair que la viteſſe inſtantanée $\frac{de}{dt}$, qui pareillement eſt toujours néceſſairement variable d'inſtant en inſtant, le ſera différemment dans tous ces différens cas, mais toujours uniforme dans chaque inſtant. De-là il ſuit que la variation quelconque des $\frac{de}{dt}$, ſera toujours celle des Infiniment petits de quelque Courbe, qui pareillement ne ſont conſtans ou n'ont un rapport conſtant que pendant un pas infiniment petit de la Courbe. Et cette réduction des mouvemens accélérés à des Courbes, qui les expriment ou les repréſentent, eſt l'avantage qu'on tire de l'uniformité inſtantanée des élémens de ces mouvemens, ce qui n'auroit pas été poſſible ſi dans chaque inſtant infiniment petit l'augmentation de viteſſe avoit dû être comptée.

Par exemple, ſi on ſuppoſe la Peſanteur conſtante, on voit que dans cette hipotheſe, les eſpaces étant comme les quarrés des temps (1526), & dans la Parabole $x = yy$, les Abſciſſes x de la Parabole repréſenteront ou ſeront les hauteurs d'où un corps peſant ſera tombé, & que les Ordonnées y repréſenteront les temps, ou, ce qui eſt le même, qu'une Ordonnée quelconque repréſentant la durée de la chûte d'un corps, l'Abſciſſe correſpondante repréſentera l'eſpace qu'il aura parcouru, ou la hauteur d'où il ſera tombé. Et comme dans cette hipotheſe les viteſſes acquiſes au bout des différens temps, ou, ce qui eſt la même choſe, les viteſſes uniformes $\frac{de}{dt}$ de chaque inſtant infiniment petit, ſont comme les temps (1524), ces viteſſes ſeront comme les y de la Parabole ou les $\sqrt[2]{x}$, puiſque $y = \sqrt[2]{x}$. Donc $\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt[2]{x}}{1}$. Or dans la Pa-

rabole $dx . dy :: 2y . 1 :: 2\sqrt[2]{x} . 1$. Donc $\frac{de}{dt} = \frac{2\sqrt[2]{x}}{1} = \frac{dx}{dy}$ de la Parabole, car ici, où il ne s'agit que de rapports, $\sqrt[2]{x}$ & $2\sqrt[2]{x}$, c'est la même chose.

Réciproquement, s'il étoit donné que $\frac{de}{dt} = \frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt[2]{x}}{1}$ d'une Courbe, & qu'il fallût trouver quelle hipothese a été faite sur la Pesanteur, on verroit aussi-tôt que cette Courbe cherchée est la Parabole où $dx . dy :: 2\sqrt[2]{x} . 1$. Donc les Abscisses étant prises pour les espaces parcourus, les vitesses sont comme les racines de ces espaces, ce qui emporte que la Pesanteur soit constante.

1564. On peut concevoir la Pesanteur comme une force inhérente au centre de la Terre, & qui retire toujours les corps vers ce centre, & quoique cette idée ne soit pas physique, elle est suffisante pour le dessein présent, & plus facile à saisir que toute autre. Si l'on a donné à un corps une impulsion selon une ligne droite Tangente du globe de la Terre, & que le mouvement commence au point d'attouchement, ce corps, s'il suivoit cette impulsion, décriroit cette Tangente à l'Infini, & s'éloigneroit toujours du centre de la Terre. Mais la Pesanteur, qu'on suppose qui agit toujours, le retire toujours vers ce centre, & par conséquent le retire dès le 1er instant infiniment petit de son mouvement. Dans ce 1er instant il ne pouvoit décrire par son mouvement propre ou d'impulsion, qu'une partie infiniment petite de la Tangente, & il ne se seroit écarté du globe ou du Cercle que de l'étendue de la base d'un angle de contingence, mais la Pesanteur qui le retire vers le centre, l'empêche de faire un écart de cette étendue, de sorte qu'à la fin de l'instant il est encore sur la circonférence du Cercle. Dans le 2^d^ instant, si la Pesanteur cessoit d'agir, il suivroit par son mouvement propre la direction du côté droit infiniment petit du Cercle qu'il a décrit dans le 1er instant, & feroit un écart égal à la base

Forces Centrifuges, ou Centripetes.

d'un angle de contingence : mais la Pesanteur le retire encore, & le retient sur une circonférence circulaire, & toujours ainsi de suite.

La Pesanteur ainsi conçue, & toute autre force pareille s'appelle force *centrale.*

Si on conçoit la force par laquelle le corps est toujours retiré vers un centre comme inhérente au corps, elle s'appelle force *centripete*, & à cette force s'oppose la *centrifuge*, par laquelle le corps qui a une impulsion en ligne droite tend à la suivre, & à s'écarter d'une circonférence circulaire.

Mais comme tout cela revient au même, il suffit de considérer la force Centrale, du moins pour l'ordinaire.

1565. En général un corps qui a reçu une impulsion ne peut se mouvoir qu'en ligne droite, selon la direction déterminée de cette impulsion. Il décrira cette droite à l'Infini, & s'il s'en détourne, il faut que ce soit par une cause étrangere. S'il s'en détourne continuellement, ou, ce qui est le même, décrit une Courbe, il faut que ce soit par une cause étrangere toujours appliquée à ce corps. Si cette cause le détourne toujours vers un même point, c'est une force centrale.

1566. Donc tout mouvement curviligne qui se rapporte à un point fixe, doit être conçu comme composé d'un mouvement rectiligne d'impulsion, & d'un mouvement rectiligne de traction, causé par une force centrale toujours agissante, & inhérente au point fixe supposé.

Mesure de la force Centrale, & ses propriétés.

1567. Pour considérer la force centrale dans une Courbe quelconque qu'elle fait décrire, il faut donc concevoir un corps qui a reçu une impulsion, selon la direction de laquelle il décriroit une ligne droite à l'Infini, dont il est perpétuellement détourné par la force centrale inhérente à un point fixe, pris dans le plan de la Courbe. Les lignes de traction par lesquelles agit cette force pour retirer sans cesse le corps, le détourner de la ligne droite qu'il tend à suivre, & le retenir sur la circonférence de la Courbe, sont des droites tirées du point fixe ou centre supposé, & terminées à tous les côtés infiniment petits de la Courbe. On les appelle aussi *Rayons.*

Il eſt clair que ces Rayons ſont différemment inclinés aux différens arcs de la Courbe, & que par conſéquent ces arcs étant les petites droites que le corps décrit à chaque inſtant, les lignes par leſquelles la force centrale agit ſur le corps, ſont toujours différemment inclinées à celles par leſquelles le corps ſe meut, ou, ce qui eſt la même choſe, que l'action de la force centrale ſur le corps eſt toujours inégale. Mais comme il peut y avoir encore d'autres inégalités, nous allons chercher en général, quelle eſt la meſure de la force centrale, qui fait décrire une Courbe quelconque, en y faiſant entrer tout ce qu'il eſt imaginable qui y entre. Nous ſuppoſons la force centrale finie, & conſtante en elle-même, quoique ſon action puiſſe être inégale.

1568. Puiſque l'effet continuel de la force centrale eſt de détourner le corps de la droite qui tend à décrire, elle a beſoin d'être d'autant plus grande que ce corps eſt par lui-même plus difficile à détourner de la ligne droite. Or il eſt par lui-même d'autant plus difficile à détourner de cette ligne, qu'il a une plus grande quantité de mouvement avec laquelle il tend à la décrire. Sa quantité de mouvement eſt le produit de ſa maſſe, ou poids p par ſa viteſſe u. Donc il eſt d'autant plus difficile à détourner de la ligne droite que pu eſt plus grand. Donc de ce chef la meſure de la force centrale eſt pu.

1569. Mais la force centrale eſt appliquée avantageuſement au corps, ou, ce qui eſt le même, plus le rayon par lequel elle agit dans un inſtant quelconque eſt incliné au côté de la Courbe, que le corps décrit en cet inſtant, plus la force a beſoin d'être grande pour agir malgré ce déſavantage.

Si l'on conçoit deux rayons infiniment proches tirés du point fixe aux deux extrémités d'un côté ds de la Courbe, & du même point fixe pris pour centre, un arc circulaire infiniment petit dx décrit ſur le moindre des deux rayons, de ſorte qu'il détermine leur différence dy; il eſt viſible que plus le grand rayon $y + dy$ ſera oblique à ds, plus ds ſera grand par rapport à dx. Donc $\frac{ds}{dx}$ meſure l'inégalité de l'action

de la force centrale sur le corps. Donc de ce chef sa mesure est $\frac{ds}{dx}$, & elle est d'autant plus grande que ds est plus grand par rapport à dx, parce que son application est moins avantageuse, car il s'agit uniquement de la grandeur de la force, & non de celle de son action.

1570. Plus la force centrale fait faire de grands détours au corps, plus elle est grande. Or puisque ce corps décrit une Courbe, la grandeur des détours qu'il fait à chaque instant est la même que celle des angles de contingence, ou de la courbure de la Courbe. Or les différentes courbures sont en raison renversée des Rayons de la Développée que j'appelle r. Donc de ce chef la mesure de la force centrale est $\frac{1}{r}$.

1571. Plus la force centrale fait faire de détours en un même temps, plus elle est grande. Or plus la vitesse d'impulsion u d'un Corps est grande, plus il faut que la force centrale lui fasse faire en même temps un grand nombre de détours, pour le tenir toujours sur la Courbe. Donc de ce chef la mesure de cette force est u.

1572. Et comme il n'est pas possible d'imaginer rien de plus, on a, en rassemblant tout, pour mesure ou pour expression de la force centrale pu (1568) $\times \frac{ds}{dx}$ (1569) $\times \frac{1}{r}$ (1570) $\times u$ (1571) $= \frac{pu^2 ds}{r dx}$.

1573. Le quarré de toute vitesse uniforme peut être exprimé par $2h$, h étant la hauteur d'où le corps sera tombé pour acquérir cette vitesse (1535). Donc $\frac{pu^2 ds}{r dx} = \frac{2phds}{rdx}$, ce qui est une des formules que feu M. Varignon a données sur ce sujet en 1706 dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, & celle qui m'a paru la plus propre à être déduite immédiatement & naturellement des premieres notions.

1574. Si la Courbe décrite est un Cercle, on a $ds = dx$, & par conséquent $\frac{2ph}{r}$, ce qui est la formule des forces

centrales dans le Cercle, donnée par feu M. le M. de l'Hôpital en 1700 dans les Mémoires de l'Académie. r exprime encore ici le Rayon de la Développée, qui dans le Cercle est le même que le Rayon.

1575. Des quatre principes qui entrent dans la mesure ou dans la formule de la force centrale, il y en a deux, le poids du corps & sa vitesse, qui ne peuvent jamais aller ni dans l'Infini, ni dans l'infiniment petit. Mais les deux autres y peuvent aller, & c'est ce que nous allons examiner.

Si un Rayon, par lequel agit la force centrale, est tel qu'il concourre avec le côté de la Courbe, l'autre Rayon terminé à l'autre extrémité de ce côté concourra aussi avec lui, & par conséquent ces deux Rayons ne seront que la même droite, nul intervalle infiniment petit du 1[er] ordre ne les séparera, & on aura $dx = 0$, ds subsistant. Donc alors $\frac{2phds}{rdx}$ est une grandeur infinie.

Cependant la force centrale est toujours supposée finie, aussi-bien que la pesanteur. Mais $\frac{ds}{dx} = \infty$ signifie seulement que si ce cas étoit possible, la force centrale seroit infinie; car sa fonction perpétuelle étant de détourner le corps de la ligne droite, & de lui faire décrire une Courbe, il faudroit qu'elle eût cette vertu à un degré infini pour la pouvoir encore exercer, lorsqu'elle ne combat plus du tout par sa direction celle du corps, & qu'au contraire elle le met elle-même sur la même ligne droite. Mais comme la force centrale ne peut être infinie, le cas de $\frac{ds}{dx} = \infty$ est physiquement impossible, quoique géométriquement possible. Aussi n'arrive-t'il jamais dans aucun phénomene, que la force centrale ait dans aucun point la même direction que la Courbe qu'elle fait décrire, ou agisse par une Tangente de cette Courbe. On peut imaginer que les Planetes mues d'une premiere impulsion en ligne droite décrivent des Courbes autour du Soleil, parce qu'une force centrale inhérente dans le Soleil les retire per-

pétuellement vers lui, mais quelles que ſoient ces Courbes, Cercles, ou Ellipſes, telles qu'on voudra, la force centrale n'agira jamais par une Tangente, parce qu'on ne peut tirer à aucune de ces Courbes une Tangente d'un point pris au-dedans de leur circonférence. Que ſi par une eſpece de jeu géométrique, on imagine que la force centrale réſide dans un point pris au-dehors de quelqu'une de ces Courbes, il s'enſuivra néceſſairement que quand la Planete ſera arrivée à un point où la direction de la force centrale ſera Tangente, cette force, parce qu'elle n'eſt pas infinie, ne pourra continuer davantage à faire mouvoir la Planete ſur la Courbe.

1576. Quoique dans le cas de $\frac{ds}{dx} = \infty$ on imagine, du moins géométriquement, la force centrale comme infiniment grande, il n'y a point de cas oppoſé où l'on puiſſe l'imaginer comme infiniment petite dans le même ſens, c'eſt-à-dire, comme appliquée ſi avantageuſement que, quoiqu'infiniment petite, elle pût encore agir. Sa direction, & celle du corps pendant quelque inſtant, peuvent dans le ſens qu'on vient de voir être la même ou infiniment peu différentes; mais elles ne peuvent jamais être infiniment différentes, car elles ne peuvent l'être davantage que lorſqu'elles ſont perpendiculaires l'une à l'autre, ce qui n'eſt que fini, & a une meſure finie. Et en effet, $\frac{ds}{dx} = 0$ eſt impoſſible, car il eſt aiſé de voir que ds ne peut être $= 0$, dx ſubſiſtant.

1577. Le cas le plus oppoſé à celui de $\frac{ds}{dx} = \infty$ eſt donc $\frac{ds}{dx} = 1$, c'eſt-à-dire, celui de $ds = dx$, ou de la force centrale agiſſante dans un Cercle au centre duquel elle réſide (1574), alors elle agit toujours perpendiculairement à la direction du corps, & avec tout l'avantage poſſible de ce chef.

1578. La direction perpendiculaire de la force centrale donne lieu d'imaginer aiſément un effet des directions obliques, ſelon qu'elles ſont poſées d'un côté ou de l'autre de la direction

direction perpendiculaire. Le corps décrit un côté quelconque de la Courbe d'un certain sens déterminé ; si la direction oblique de la force centrale tire le corps en ce même sens, elle hâte son mouvement, si elle le tire du sens contraire, elle retarde son mouvement : or le sens dont les directions obliques tirent, dépend de leur position d'un côté ou d'autre d'une direction perpendiculaire. Elles hâtent ou retardent d'autant plus le mouvement qu'elles sont plus obliques, quoiqu'en même temps elles aient moins d'effet pour détourner le corps, ou lui faire décrire une Courbe. Quant aux directions perpendiculaires, elles n'ont nul effet par rapport à l'accélération, ou au retardement du mouvement.

1579. De-là il suit que dans le cas de $\frac{ds}{dx} = \infty$, la force centrale, dont la direction concourroit avec celle du corps, n'auroit d'autre effet que de hâter ou de retarder son mouvement, selon qu'elle le tireroit, ou du même sens dont il iroit, ou du sens contraire.

1580. Si dans $\frac{2phds}{rdx}$, r, Rayon de la Développée, est $= \infty$; c'est-à-dire, si la Courbe au point supposé est infiniment peu courbe, ou à quelqu'étendue en ligne droite, comme il arrive ordinairement dans les inflexions, rdx est une grandeur finie, & $2phds$ une infiniment petite, & par conséquent $\frac{2phds}{rdx} = 0$, c'est-à-dire, que la force centrale agit infiniment peu : car elle ne peut être infiniment petite, ou, ce qui revient au même, c'est-à-dire, que quand elle seroit infiniment petite, elle n'agiroit pas moins. En effet, il n'est pas besoin d'une force centrale pour donner un mouvement en ligne droite, que le corps a de lui-même. Et comme il est impossible que la force centrale, dont l'effet essentiel est de détourner le corps, ait réellement contribué à ce mouvement en ligne droite, ce cas est physiquement impossible, aussi-bien que celui de $\frac{ds}{dx} = \infty$, c'est-à-dire, qu'une force centrale ne peut jamais faire décrire une Courbe qui ait une étendue en ligne

droite plus grande que celle d'un de ses côtés.

1581. Si $r = 0$, ou la Courbe infiniment courbe, $\frac{2phds}{rdx} = \infty$: mais la force centrale ne pouvant être infinie, ni par conséquent son action, ce cas est physiquement impossible.

1582. Donc il est physiquement impossible que des Courbes décrites par des corps en vertu de forces centrales, aient des Tangentes qui concourrent avec aucun de leurs points, du côté où réside la force centrale, ni une courbure nulle ou infinie.

1583. Au lieu de concevoir un Corps qui décrit une Courbe en vertu d'une premiere impulsion en ligne droite, & de l'action continuelle d'une force centrale inhérente à un point fixe pris au dedans de cette Courbe, si l'on conçoit ce même Corps tombant par sa pesanteur le long d'une Courbe, du côté qu'elle est concave, comme le long d'un Canal qui le conduiroit, il est clair que le mouvement de ce Corps, qui par la pesanteur seule ne seroit que rectiligne, devient curviligne à cause de la Courbe supposée, qu'elle l'empêche à chaque moment de prendre le mouvement rectiligne qu'il tend à prendre, & que par conséquent cette tendance est une certaine force qu'il exerce à chaque moment contre la Courbe qui lui résiste. Si la Courbe manquoit au Corps, ou finissoit, & je suppose que ce fût par un petit côté incliné à l'horison, le Corps devenu libre suivroit la direction de ce dernier petit côté, ou de la derniere Tangente de la Courbe, & par conséquent ce petit côté étant conçû comme un arc circulaire infiniment petit, décrit sur un certain Rayon, & d'un certain centre, le Corps s'éloigneroit toujours de ce centre. Et comme c'est évidemment la même chose pour tous les petits côtés de la Courbe, la force que le Corps exerce à chaque moment sur chacun d'eux, peut être appellée *centrifuge*, par rapport aux différens centres de tous ces petits côtés pris pour des arcs circulaires infiniment petits.

1584. Donc si une Courbe quelconque est différemment inclinée à l'horison en tous ses points, & qu'un Corps tombe

le long de sa concavité, il exerce contre chacun de ses petits côtés deux différentes forces. L'une est celle de sa pesanteur, car chaque petit côté de la Courbe soutient ce Corps, & porte une partie plus ou moins grande de sa pesanteur absolue, selon qu'il est plus ou moins incliné à l'horison. L'autre force est la centrifuge par laquelle il tend à s'éloigner en ligne droite du centre de chaque petit côté ou arc qu'il décrit. Nous ne parlerons point de la 1re force, qui est extremement connue, il ne s'agit que de la 2de.

1585. Dans le cas supposé, la force centrifuge agit à chaque instant comme dans un Cercle, & d'un instant à l'autre comme dans un Cercle différent, de sorte que r est le rayon variable de ces Cercles, & le rayon de la Développée de la Courbe à un point quelconque. Donc la force centrifuge de chaque instant s'exprime par $\frac{2ph}{r}$ (1577).

1586. Sur cela on peut faire une remarque, qui servira à confirmer l'usage de notre Théorie des différens Infinis. *Application de la Théorie précédente au Calcul d'une Courbe.*

Dans les Mém. de l'Acad. de 1700 (*p. 9 & suiv.*) feu M. de l'Hopital a trouvé $dx = \frac{dy \times \sqrt{y} - \sqrt{a}}{\sqrt{2\sqrt{ay} - a}}$ pour l'équation différentielle d'une Courbe, telle qu'un Corps qui tomberoit librement le long de sa concavité, & qui par conséquent la presseroit différemment à chaque point, tant par la pesanteur que par sa force centrifuge, toutes deux toujours différemment combinées ensemble, la presseroit toujours avec une force égale à la pesanteur absolue.

Cette Courbe a un dernier côté horisontal, & parallele à l'axe, auquel répond une Ordonnée infinie, qui est aussi une hauteur infinie d'où le Corps est tombé. Le Corps arrivé à ce dernier côté le presse par toute sa pesanteur absolue, & par conséquent la force centrifuge doit alors être nulle, car autrement le Corps presseroit alors la Courbe par une force plus grande que sa pesanteur absolue. D'ailleurs parce que la force centrifuge doit être nulle à ce dernier côté, le rayon

de la Développée y doit être infini, & il l'eſt en effet par la nature de la Courbe. Donc ſi on applique là la formule $\frac{2ph}{r}$, on a $h = \infty$, $r = \infty$, & par conſéquent $\frac{2ph}{r} = 2p$; force centrifuge, qui non-ſeulement n'eſt pas nulle, mais eſt double de la peſanteur abſolue.

Il y a donc là de l'erreur, & elle vient, comme nous l'avons vû bien des fois, des infinis mal caractériſés.

Je prens le rayon de la Développée de cette Courbe ſelon la formule ordinaire $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$.

Puiſque dans cette Courbe $dy = \frac{\sqrt{2\sqrt{ay} - a} \times dx}{\sqrt{y} - \sqrt{a}}$, on a $dy^2 = \frac{\overline{2\sqrt{ay} - a} \times dx^2}{y - 2\sqrt{ay} + a}$ & $dy^2 + dx^2 = \frac{\overline{2\sqrt{ay} - a + y - 2\sqrt{ay} + a} \times dx^2}{y - 2\sqrt{ay} + a}$ $= \frac{y\,dx^2}{\overline{\sqrt{y} - \sqrt{a}}^2}$. On a par le calcul $ddy = \frac{-dy\,dx\sqrt{a}}{2\sqrt{2\sqrt{ay} - a} \times \overline{\sqrt{y} - \sqrt{a}}^2}$.

Donc $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} = \frac{2y\,dx \times \sqrt{2\sqrt{ay} - a}}{dy\sqrt{a}}$, & en mettant au lieu de dx, ſa valeur $\frac{dy \times \sqrt{y} - \sqrt{a}}{\sqrt{2\sqrt{ay} - a}}$, il vient $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} = \frac{2y \times \sqrt{y} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}}$.

Si $y = \infty$, on a donc pour le Rayon de la Développée en ce point $r = \frac{2\infty \times \infty^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}} = \frac{2\infty^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}$.

Donc dans la Courbe d'égale preſſion, y ou h étant $= \infty$, $\frac{2ph}{r}$ ſe réduit pour l'ordre à $\frac{\infty}{\infty^{\frac{3}{2}}} = \infty^{\frac{2-3}{2}} = \infty^{-\frac{1}{2}}$ $= \frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$, force centrifuge infiniment petite.

1587. Puiſqu'à l'extrémité de cette Courbe le rayon de la Développée eſt infini, la courbure eſt alors infiniment petite, & c'eſt effectivement ce qui rend la force centrifuge

nulle malgré la vitesse infinie, car il n'y a point de force centrifuge dans un mouvement fait en ligne droite, quelle qu'en soit la vitesse.

1588. Mais puisque le rayon de la Développée est de l'ordre de $\infty^{\frac{3}{2}}$, ou au dessus du Fini de plus qu'un ordre potentiel, il faut que la courbure soit plus qu'infiniment petite, ou, selon la Théorie de la Sect. XIII, au dessous de $\frac{1}{\infty^2}$, de plus qu'un ordre potentiel; & pour voir plus précisément ce qui en est, on peut prendre cette courbure de l'extrémité selon cette Théorie.

On aura, après les substitutions nécessaires, $ddy = \frac{-dy^2 \times \overline{\sqrt{y} - \sqrt{a}}}{2y \times 2\sqrt{y} - \sqrt{a}}$, ce qui seul donne la courbure de l'extrémité, puisqu'alors $ds = dx$, le dernier côté étant parallele à l'axe.

y étant aussi alors $= \infty$, on a $\frac{-dy^2}{4y} = \frac{-dy^2}{4\infty}$. Reste à savoir ce que vaut dy^2.

On a par-tout $dy \,.\, dx :: \sqrt{2\sqrt{ay} - a} \,.\, \sqrt{y} - \sqrt{a}$, & dans l'Infini, $dy \,.\, dx :: \sqrt{2\sqrt{ay}} \,.\, \sqrt{y}$, & pour l'ordre $:: \infty^{\frac{1}{4}} \,.\, \infty^{\frac{1}{2}}$. Donc en supposant $dx = \frac{1}{\infty}$, puisqu'il subsiste dans le parallélisme, on aura $dy \,.\, \frac{1}{\infty} :: \infty^{\frac{1}{4}} \,.\, \infty^{\frac{1}{2}}$, ou $dy = \frac{\infty^{\frac{1}{4}}}{\infty \times \infty^{\frac{1}{2}}} = \infty^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{\infty^{\frac{5}{4}}}$. Donc $dy^2 = \frac{1}{\infty^{\frac{5}{2}}}$; & $\frac{-dy^2}{\infty} = -\frac{1}{\infty^{\frac{7}{2}}}$, courbure qui est entre l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$ & $\frac{1}{\infty^4}$.

1589. On peut remarquer ici que comme à la courbure de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ que nous appellons ordinaire & finie, répond un rayon de la Développée fini, il doit répondre à une cour-

bure de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$ un rayon de la Développée de l'ordre de ∞, & à une courbure qui passe $\frac{1}{\infty^3}$ sans aller jusqu'à $\frac{1}{\infty^4}$, un rayon de la Développée qui soit entre ∞ & ∞^2, & c'est effectivement ce qui se trouve ici. De plus $\infty^{\frac{3}{2}}$ est précisément moyen géométrique entre ∞ & ∞^2 comme $\frac{1}{\infty^{\frac{7}{2}}}$ l'est entre $\frac{1}{\infty^3}$ & $\frac{1}{\infty^4}$.

1590. Il est très-aisé de voir par la nature de la Courbe d'égale pression qu'elle n'a point d'Asymptote, & selon la courbure qu'on lui trouve ici à son extrémité, elle n'en doit pas avoir (1182). Cette Courbe est du nombre de celles qui sont Courbes dans une étendue infinie, & ensuite droites dans une étendue finie (1182), c'est alors que la force centrifuge y devient nulle.

1591. On peut prendre une idée de cette Courbe, en considérant seulement les expressions de la force centrifuge variable à chaque point, & de l'action de la pesanteur variable aussi, selon que la Courbe est plus ou moins inclinée à l'horison. Je suppose qu'un côté quelconque de la Courbe étant ds, il est prouvé que cette action de la pesanteur est $\frac{pdx}{ds}$.

Le Corps est supposé tomber librement. Donc il ne tombe que le long de la concavité de la Courbe, car il est visible qu'il ne suivroit jamais sa convexité.

Il est naturel de penser d'abord que la Courbe dans toute son étendue tournera sa convexité vers l'horison, comme feroit un Quart de Cercle posé sur un plan horisontal auquel il seroit perpendiculaire par son extrémité supérieure. En ce cas le Corps sera toujours soutenu par la Courbe, & il la pressera tant par la force centrifuge que par la pesanteur.

Mais parce que tout ce qui peut être conçû sans contradiction est possible & nécessaire en fait de Courbes, il est possible que cette Courbe ait dans une partie de son étendue sa concavité tournée vers l'horison, comme l'auroit le Quart

de Cercle dont on vient de parler, devenu demi-Cercle. Alors il eſt vrai que dans la moitié ſupérieure de ce demi-Cercle concave vers l'horiſon, le Corps ne ſeroit pas ſoutenu par la Courbe, à ne conſidérer que ſa peſanteur, & par conſéquent ne la preſſeroit pas, qu'au contraire ſa peſanteur ne tendroit qu'à le faire tomber verticalement : mais la force centrifuge peut être telle qu'elle tendra à appliquer le Corps contre cette même partie de la Courbe, d'où la peſanteur tendra à le détacher.

Donc la force centrifuge concourant tantôt avec la peſanteur, & tantôt la combattant, il faut exprimer en général la ſomme de leurs actions par $\frac{2ph}{r} \pm \frac{pdx}{ds}$, & cette grandeur complexe doit toujours par la ſuppoſition être $= p$. Ou en prenant pour p une ligne conſtante a qui la repréſentera, & entrera dans l'équation de la Courbe, on aura $\frac{2ah}{r} \pm \frac{adx}{ds} = a$.

Pour trouver l'origine de la Courbe, je vois qu'il y faut ſuppoſer la hauteur h d'où le Corps tombe, la moindre qu'il ſoit poſſible. Je prens $h = 0$. Donc $\frac{adx}{ds} = a$. Donc la force centrifuge n'agit point, & de plus $dx = ds$; c'eſt-à-dire, que la Courbe a ſon premier côté parallele à l'axe ou à l'horiſon. Donc alors le Corps ne peut que tomber verticalement par ſa peſanteur, & il n'y a nulle preſſion. Donc le cas de $h = 0$ eſt impoſſible. Donc à l'origine de la Courbe h eſt une grandeur finie, ou le Corps a déja une viteſſe telle qu'il l'auroit acquiſe en tombant en ligne droite de cette hauteur h.

h étant finie à l'origine, $\frac{2ah}{r}$ n'y peut être $= 0$ autrement que par $r = \infty$; mais alors il n'y auroit point de courbure, & le Corps continueroit à tomber en ligne droite ſans faire de preſſion, ce qui eſt contre la ſuppoſition de l'origine de la Courbe, & de toute l'étendue de la Courbe.

Par la même raiſon $\frac{adx}{ds}$ ne peut à cette origine être $= 0$;

car cela marqueroit un premier côté vertical, & le Corps ne feroit encore que continuer à tomber ſelon la ligne droite h.

Donc à l'origine la grandeur complexe $\frac{2ab}{r} \pm \frac{adx}{ds}$ ſubſiſte.

On y peut ſuppoſer, comme on a fait d'abord, $dx = ds$, c'eſt-à-dire, le côté horiſontal, ce qui donne $\frac{2ab}{r} \pm a = a$, & néceſſairement $\frac{2ab}{r} - a = a$, puiſque $\frac{2ab}{r}$ n'eſt pas $= 0$. De-là ſuit $h = r$. Donc à ce premier côté horiſontal ſuppoſé la force centrifuge eſt double de la peſanteur qui tend à faire tomber verticalement le Corps que la Courbe ne ſoutient nullement, la force centrifuge applique le Corps contre la Courbe, & cauſe ſeule la preſſion; & elle ne la cauſe qu'avec un effort égal à la peſanteur abſolue du Corps, puiſque la moitié de ſon effort ou de ſon action eſt détruite par la peſanteur qui agit directement contr'elle. De plus à ce premier côté horiſontal la hauteur, d'où le Corps doit être tombé pour avoir la viteſſe qu'il a, eſt égale au rayon de la Développée de la Courbe.

dx ayant été pris arbitrairement $= ds$, & ſans aucun rapport néceſſaire à l'origine, elle n'eſt point encore néceſſairement déterminée : mais ſi en la ſuppoſant on trouve que toutes les variations poſſibles de la Courbe s'y lient, elle le ſera effectivement.

dx ayant commencé par être $= ds$, ne peut varier qu'en devenant plus petit, car il ne peut pas être plus grand. Si enfin $dx = 0$ ou $\frac{adx}{ds} = 0$, on a $\frac{2ab}{r} = a$, c'eſt-à-dire, que la Courbe ayant eu un côté horiſontal, vient à en avoir un vertical le long duquel le Corps tombe ſans cauſer aucune preſſion par ſa peſanteur, que la force centrifuge ſeule cauſe la preſſion en appliquant ce Corps contre le côté vertical, & comme il faut que ce ſoit avec une force égale à la peſanteur abſolue, il faut que $2h$ ſoit $= r$.

Donc dans la variation qui a été depuis le côté horiſontal juſqu'au vertical, la force centrifuge de double qu'elle étoit de

la

la pesanteur absolue, lui est devenue égale. Donc elle a toujours décrû.

Et puisqu'elle agissoit seule au commencement de cette variation, & qu'elle agit encore seule à la fin, elle a toujours agi seule pendant toute la variation, j'entens quant à la pression. Donc la pesanteur l'a toujours combattue, & a toujours diminué son effort. Donc la grandeur générale $\frac{2ab}{r} \pm \frac{adx}{ds}$ a toujours été dans cette variation $\frac{2ab}{r} - \frac{adx}{ds}$.

Donc la Courbe y a toujours été concave vers l'horison, puisqu'elle ne soutenoit nullement le Corps.

En même temps il est visible que la hauteur h ne peut qu'avoir augmenté. Et comme r, qui étoit d'abord $= h$, est devenu $= 2h$, cela veut dire que par rapport à la hauteur d'où le Corps étoit tombé ou à sa vitesse, le rayon de la Développée a été deux fois plus grand, ou la courbure de la Courbe deux fois moindre à la fin de la variation qu'au commencement, ce qui a diminué de moitié la force centrifuge prise en elle-même.

Après $dx = 0$ ou $\frac{dx}{ds} = 0$, dx ne peut que recommencer à croître par rapport à ds. Et après que la grandeur générale $\frac{2ab}{r} \pm \frac{adx}{ds}$ a été pendant une variation $\frac{2ab}{r} - \frac{adx}{ds}$, il faut qu'elle devienne $\frac{2ab}{r} + \frac{adx}{ds}$. C'est-à-dire, que la Courbe recommence à avoir des côtés inclinés à l'horison, & que la force centrifuge commence à causer la pression conjointement avec la pesanteur. Donc alors le Corps est soutenu en partie par la Courbe qui tourne sa concavité vers l'horison.

Comme $\frac{adx}{ds}$ croît toujours par l'augmentation continuelle que dx prend par rapport à ds, il faut que $\frac{2ab}{r}$ décroisse pour conserver l'égalité essentielle à la Courbe. Donc dans cette seconde variation le Corps presse toujours la Courbe par une plus grande partie de sa pesanteur absolue, & moins par sa

force centrifuge qui concourt alors avec la pesanteur.

A la fin de la variation, il faut que dx soit $= ds$, ou qu'il y ait un côté horisontal, qui sera donc pressé par toute la pesanteur du Corps. Alors $\frac{adx}{ds} = a$. Donc $\frac{2ah}{r} = 0$. Ce qui ne se pourroit, h étant alors nécessairement infinie, si r n'étoit un Infini d'un ordre supérieur, ainsi que nous avons vû.

Il suit de tout cela que l'origine de la Courbe, que nous avons supposée, étoit effectivement la vraie.

REFLEXION
SUR LES SOMMES DES SUITES,
Qui a été faite trop tard pour être insérée dans le corps du Livre.

SOIT la Suite $A^2 + A$, qui est $1 + 1 = 2 . 4 + 2 = 6 . 9 + 3 = 12 . 20 . 30 . 42$, &c. à l'Infini.

Je dis que quoique $A^2 + A$ ait ses termes plus grands que les correspondans de A^2, elle n'a que la même somme que A^2, car la somme de A^2 est $\frac{\infty^3}{3}$ (580), & celle de $A^2 + A$ est donc $\frac{\infty^3}{3} + \frac{\infty^2}{2} = \frac{\infty^3}{3}$, conclusion qui sera reçue de tous ceux qui admettent l'Infini.

Mais afin que cela soit, il faut nécessairement que tous les termes de $A^2 + A$ n'aient pas été plus grands que ceux de A^2, comme ils l'étoient à l'origine de leur Suite, & qu'ils aient commencé à un certain endroit à n'être qu'égaux à ceux de A^2.

Il faut de plus que tous les termes de $A^2 + A$, plus grands que ceux de A^2, n'entrent point dans la somme de $A^2 + A$, & pour cela il faut que la somme de ces termes, plus grands que leurs correspondans dans A^2, disparoisse devant ceux d'un ordre supérieur qui les suivent dans $A^2 + A$, & pour disparoître, il faut qu'ils ne soient qu'en nombre Fini.

Or tout cela arrive selon les principes qui ont été établis.

n étant ſucceſſivement tous les Nombres Naturels, $nn + n$ eſt l'expreſſion générale de $A^2 + A$. Quand n eſt un nombre fini indéterminable ſi grand que par l'élévation au quarré il devient Infini, on a $nn + n = nn$, & à plus forte raiſon tous les $nn + n$ ſuivans ne ſont que nn, & $A^2 + A$ n'eſt plus que A^2. Et le premier $nn + n = nn$ n'eſt qu'à une diſtance Finie de l'origine de la Suite, & par conſéquent tous les termes précédens Finis ne ſont qu'en nombre fini, & leur ſomme finie diſparoît devant les Infinis qui ſuivent, & ils ſont tous inutiles à la ſomme.

De même tous les nn finis de A^2, qui ſont en même nombre que les $nn + n$ Finis de $A^2 + A$, & plus petits, ſont inutiles à la ſomme (211). D'où il ſuit que quant à la ſomme $A^2 + A$ n'eſt exactement que A^2.

Je ne vois pas qu'on pût expliquer autrement *à priori* la cauſe de l'égalité des deux ſommes.

Il eſt viſible qu'il en ira de même de $A^2 - A$.

Le même raiſonnement ſubſiſtera ſur les Suites de Figurés comparés aux A^m qui leur répondent, c'eſt-à-dire, ſur la Suite des Triangulaires que j'appelle T, comparée à A^2, ſur la Suite des Pyramidaux que j'appelle P, comparée à A^3, &c.

Un nombre Triangulaire quelconque étant $\frac{nn + n}{2}$ (126), T commence à n'avoir plus que des $\frac{nn}{2}$ dès que nn eſt Infini, & à commencer de ce point là les termes de T ne ſont que ceux de A^2 diviſés par 2, & par conſéquent la ſomme de T ſera la ſomme de A^2, qui aura 2 pour diviſeur. Or la ſomme totale de A^2 eſt $\frac{\infty^3}{3}$, & la ſomme totale de T eſt $\frac{\infty^3}{6}$ (576) $= \frac{\infty^3}{3 \times 2}$. Donc la ſomme totale de A^2, & celle de T ne ſont que les mêmes que ſi ces deux Suites ne commençoient qu'au premier nn Infini. Donc tous les termes qui ont précédé cet nn dans l'une & l'autre Suite ſont inutiles à leurs ſommes.

Ils ne pourroient l'être, s'ils étoient en nombre infini, car étant finis ils feroient une ſomme de l'ordre de ∞ qui

ſe joindroit d'un côté aux ∞ de A^2, & de l'autre aux ∞ de T, & de plus comme tous les termes de T ſont moindres que ceux de A^2, & tous les Finis de T moindres que ceux de A^2 dans un plus grand rapport que celui de 1 à 2, ce rapport ne venant que dans l'Infini, ce nombre infini de termes finis qui entreroient de part & d'autre dans les deux ſommes totales, & dont les ſommes auroient un autre rapport que celui de 1 à 2, empêcheroit que le rapport de la ſomme totale de T à celle de A^2 ne fût exactement, comme il l'eſt, celui de 1 à 2.

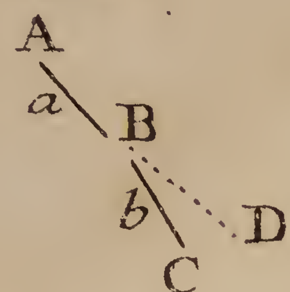
Donc le premier nn infini de T & de A^2 n'eſt qu'à une diſtance finie de leur origine, & n eſt un Fini indéterminable.

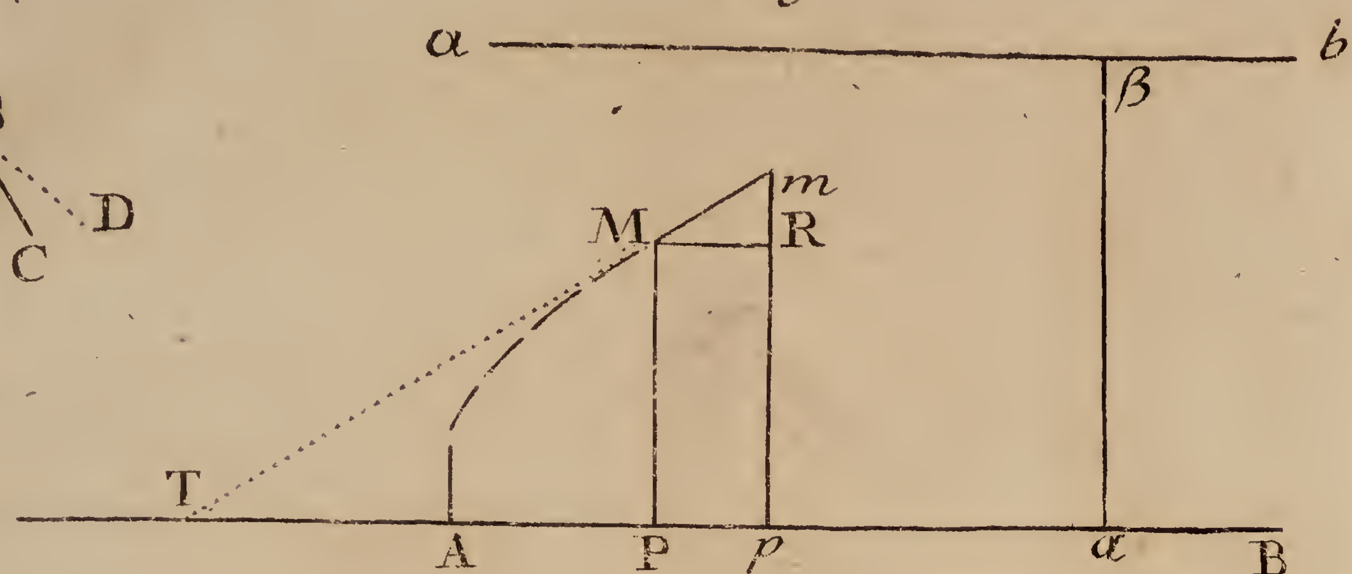
On en dira autant de P comparée à A^3. Chaque Pyramidal étant $\frac{n^3+3n^2+2n}{6}$ (126), la ſomme de $A^3 = \frac{\infty^4}{4}$, & celle de $P = \frac{\infty^4}{24}$ (576) $= \frac{\infty^4}{4\times 6}$, on voit que dès que n^3 eſt Infini, chaque terme de P eſt $\frac{1}{6}$ du terme correſpondant de A^3, que par là la ſomme totale de P eſt $\frac{1}{6}$ de celle de A^3, d'où tout le reſte ſuit.

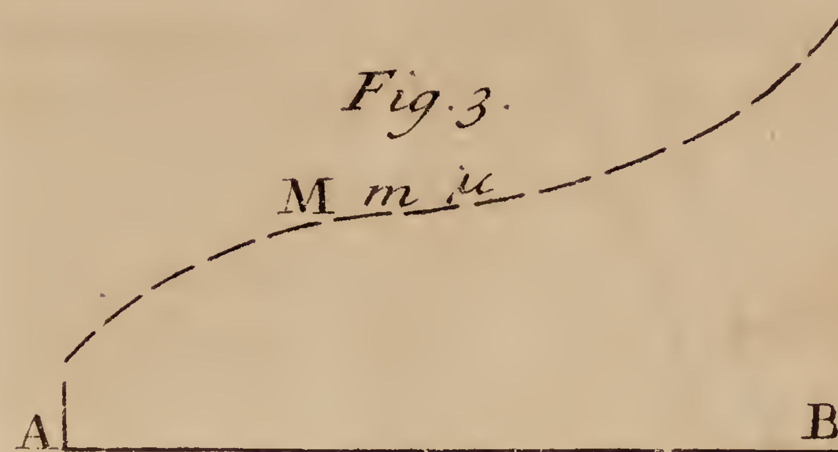
Les ſommes de tous les ordres des Figurés ne ſont donc que les ſommes des A^n correſpondantes diviſées par le diviſeur de la formule de chaque ordre, & quoique les Suites de Figurés, priſes dans tout leur cours fini, ſoient fort différentes des A^n correſpondantes, elles ne ſont plus, dès qu'elles ont atteint l'Infini, que ces mêmes A^n diviſées par le nombre conſtant qui leur convient, & tous leurs termes finis, qui ſont les ſeuls que nous connoiſſions, & qui les caractériſent à notre égard, n'entrent pour rien dans leurs ſommes.

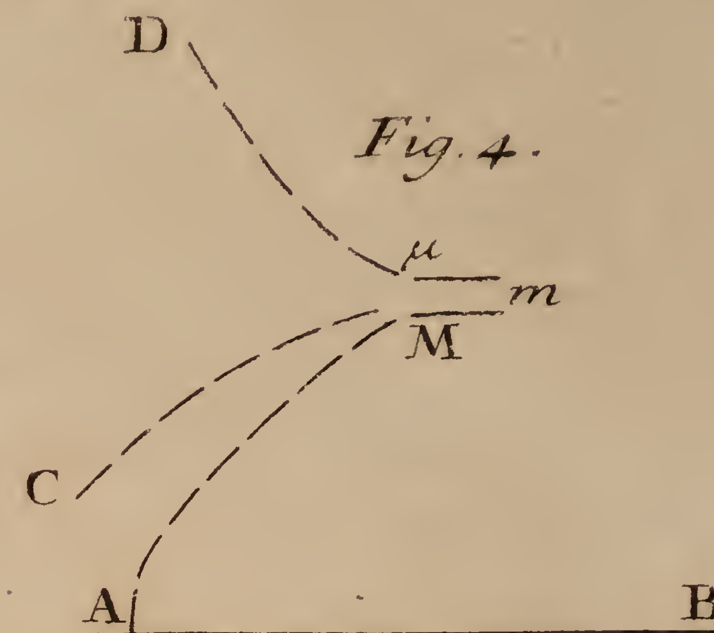
Il ſuit de-là qu'il ne faut pas juger les Suites, ſur tout à l'égard des ſommes, par leurs termes finis ſeuls, & qu'il eſt néceſſaire de les ſuivre dans l'Infini, où il arrive ſouvent des changemens conſidérables, & qu'on n'eût pas prévus.

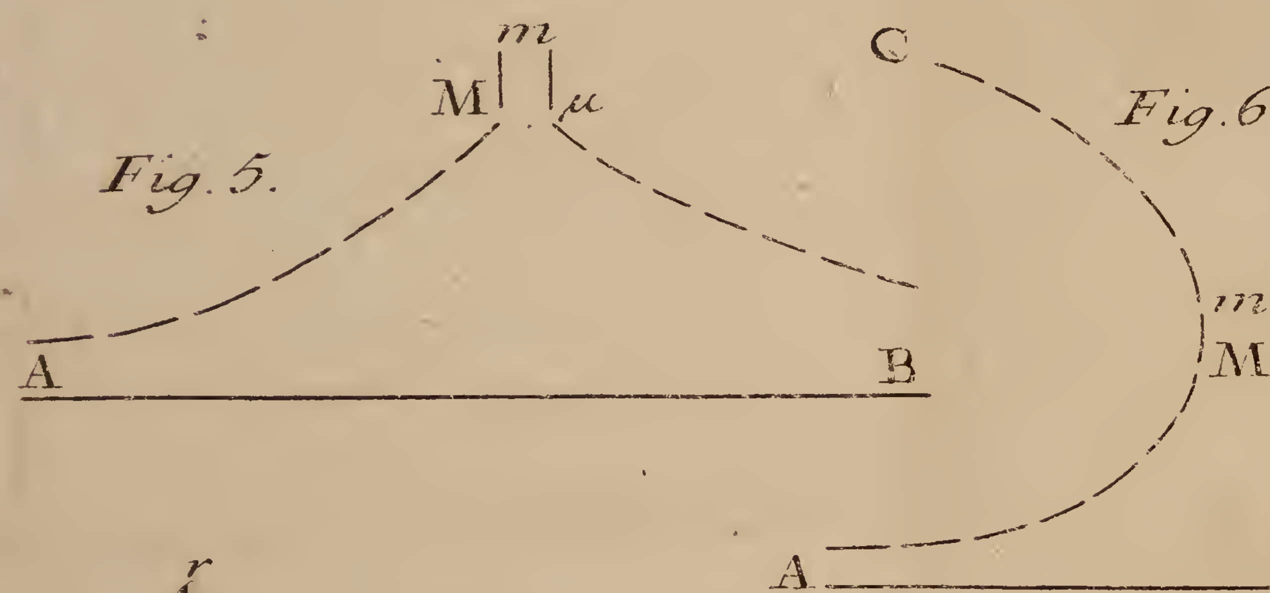
FIN.

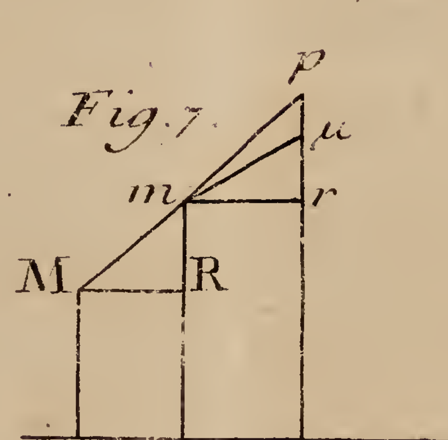

Fig. 1.
A
a
B
b
D
C

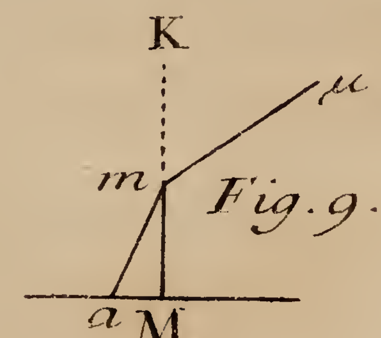

Fig. 2.
a
b
β
m
M
R
T
A
P
p
α
B

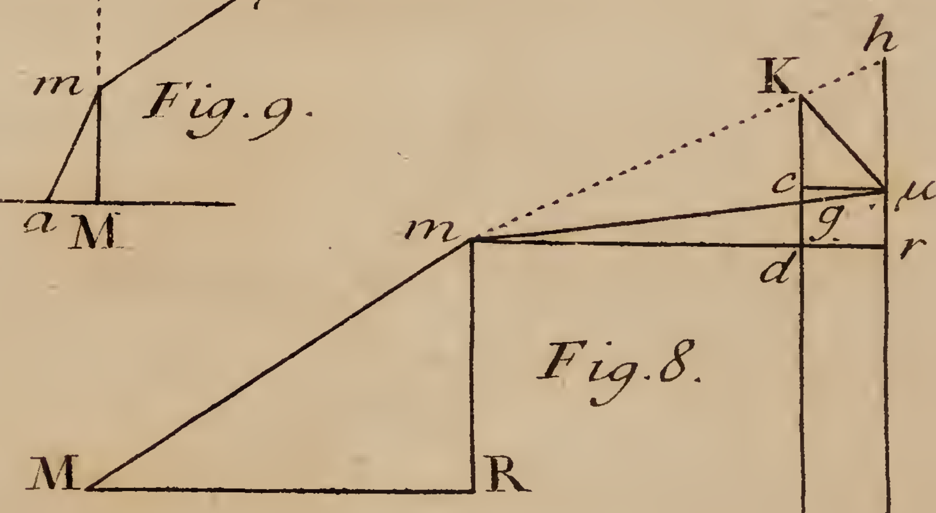

Fig. 3.
M m μ
A
B

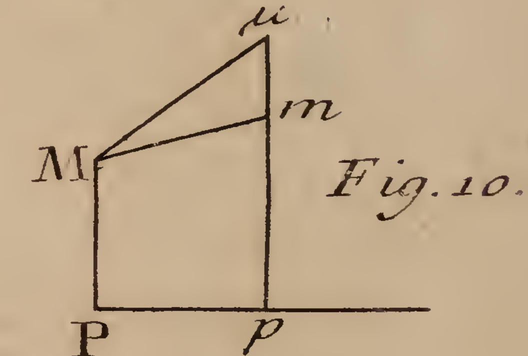

D
Fig. 4.
μ
m
M
C
A
B

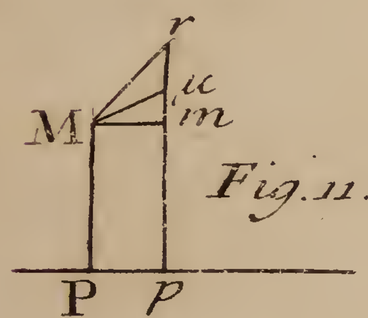

m
M
μ
Fig. 5.
A
B
C
Fig. 6.
m
M
A
B

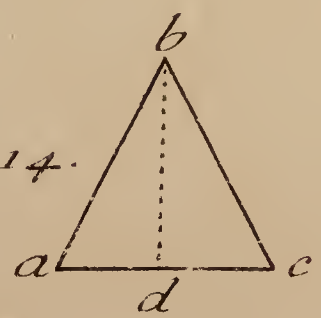

p
Fig. 7.
μ
m
r
M
R

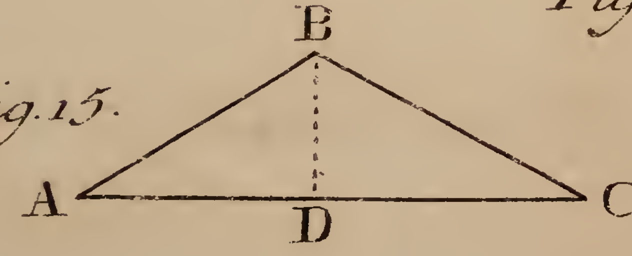

K
μ
m
Fig. 9.
a
M

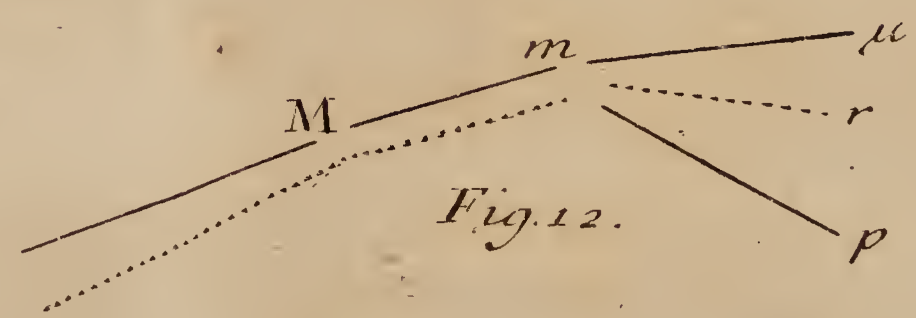

h
K
c
μ
g
m
d
r
Fig. 8.
M
R

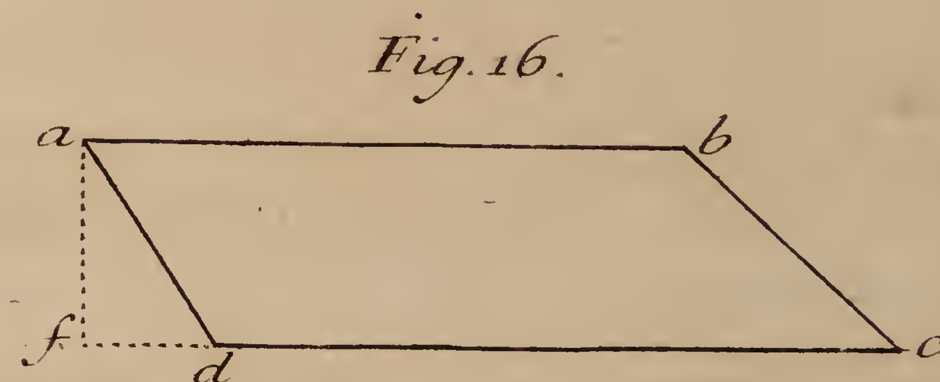

μ
m
M
Fig. 10.
P
p

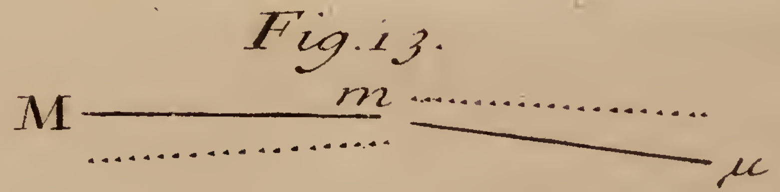

r
μ
M
m
Fig. 11.
P
p

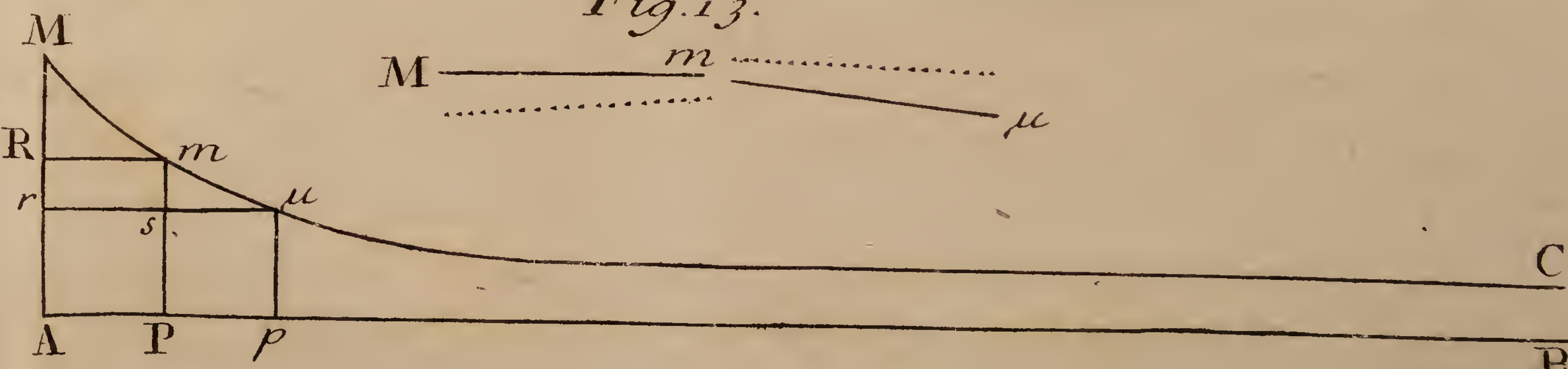

b
Fig. 14.
a
c
d

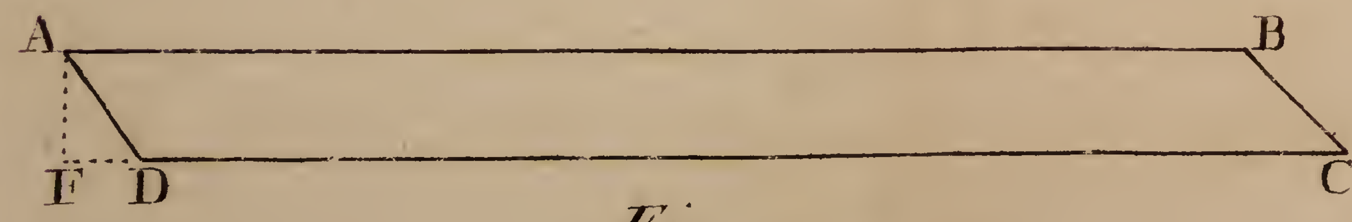

B
Fig. 15.
A
D
C


m
μ
M
r
Fig. 12.
p


Fig. 16.
a
b
f
d
c


Fig. 13.
M
m
μ


M
R
m
r
s
μ
C
A
P
p
B
Fig. 18.


A
B
F
D
C
Fig. 17.



